RMS 134 [1543 bis]

On considère deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad u_n \leqslant k + \frac{n\varepsilon_k}{k}.$$

Démontrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$

❧ Soient $0 < \eta < 1$ et $\varepsilon = \eta^2 > 0$.

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que $\varepsilon > 0$, il existe un rang K_0 tel que

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $K_0 \leqslant k \leqslant n$, on a donc

$$0 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{k}. \tag{$\star$}$$

Le terme médian étant indépendant de k et l'entier k prenant un nombre fini de valeurs, on peut passer au minimum dans $(\star)$:

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \min_{K_0 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{k} \right).$$

❧ Une étude rapide montre que la fonction f définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{x}$$

atteint son minimum en

$$x = x_0 = \sqrt{n\varepsilon} = \sqrt{n}\,\eta.$$

Cela nous suggère de poser

$$k = \left\lfloor \sqrt{n}\,\eta \right\rfloor.$$

Comme $0 < \eta < 1$ et $1 \leqslant \sqrt{n} \leqslant n$, il est clair que $\left\lfloor \sqrt{n}\,\eta \right\rfloor \leqslant n$ et comme $\left\lfloor \sqrt{n}\,\eta \right\rfloor$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_1, \qquad \left\lfloor \sqrt{n}\,\eta \right\rfloor \geqslant K_0.$$

On peut donc déduire de $(\star)$ que

$$\forall n \geqslant \max\{K_0, N_1\}, \qquad 0 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant f\left(\left\lfloor \sqrt{n}\,\eta \right\rfloor\right) \leqslant \frac{\sqrt{n}\,\eta + 1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{n}\,\eta}$$

puisque, comme on sait, $\sqrt{n}\,\eta \leqslant \left\lfloor \sqrt{n}\,\eta \right\rfloor \leqslant \sqrt{n}\,\eta + 1$. Il reste donc

$$\forall n \geqslant \max\{K_0, N_1\}, \qquad 0 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\eta.$$

Comme ${}^1/_{\sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_2, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \eta$$

et par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant \max\{K_0, N_1, N_2\}, \qquad 0 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant 3\eta.$$

Autrement dit : la suite de terme général $u_n/\sqrt{n}$ tend vers 0, c'est-à-dire

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$