RMS 134 [1522]

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

1❧ *On suppose que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f'(x) = e^{-x}.$$

Démontrer que f *tend vers* 0 *au voisinage de* $+\infty$.

2❧ *Plus généralement, on suppose que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0.$$

Démontrer que f *tend vers* 0 *au voisinage de* $+\infty$.

1❧ La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}$$

et une solution particulière est de la forme

$$y_0(x) = Bxe^{-x}$$

donc il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

On en déduit (par croissances comparées) que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

✍ *Un calcul rapide montre que* $B = 1$, *mais on n'a même pas besoin de connaître la valeur de* B *pour conclure !*

2❧ Puisque la fonction f est donnée, on peut définir une fonction auxiliaire g en posant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f'(x) + f(x).$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction g est bien continue sur $\mathbb{R}$ et, par hypothèse, elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

On peut alors voir la fonction f comme une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = g(x). \tag{$\star$}$$

Les solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$ sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}.$$

On en déduit la solution générale de $(\star)$ en faisant varier la constante :

$$y(x) = A(x)e^{-x} \qquad \text{avec} \qquad A'(x)e^{-x} = g(x),$$

donc A est une primitive de $[x \mapsto g(x)e^x]$.

Comme la fonction f est une solution de l'équation différentielle $(\star)$, il existe une constante K telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x}\left(K + \int_0^x g(t)e^t \,dt\right).$$

La valeur de K importe peu, il reste à démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \int_0^x g(t)e^t \,dt = 0.$$

✍ *Tout cela est particulièrement astucieux et aussi classique qu'astucieux... Impossible de traiter cet exercice sans connaître l'astuce !*

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad |g(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Sur le segment $[0, A]$, la fonction g est continue, donc elle est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [0, A], \quad |g(t)| \leqslant M.$$

Pour tout $x \geqslant A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x g(t)e^t \,dt\right| &\leqslant \left|\int_0^A g(t)e^t \,dt\right| + \left|\int_A^x g(t)e^t \,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^A |g(t)|e^t \,dt + \int_A^x |g(t)|e^t \,dt \\
&\leqslant M\int_0^A e^t \,dt + \varepsilon\int_A^x e^t \,dt \\
&\leqslant Me^A + \varepsilon e^x.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad \left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t \,dt\right| \leqslant Me^A.e^{-x} + \varepsilon.$$

Comme $Me^A.e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un seuil $A' > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A', \qquad 0 \leqslant Me^A.e^{-x} \leqslant \varepsilon$$

et finalement

$$\forall\, x \geqslant \max\{A, A'\}, \qquad \left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t \,dt\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat attendu.