RMS 134 [1409]

> *On pose*
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
> **1❧** *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
> **2❧** *On suppose qu'il existe une matrice* B *telle que* $B^2 = A$. *Trouver un polynôme annulateur simple de* B. *Aboutir à une contradiction et conclure.*
> **3❧** *Démontrer que* A *est semblable à* C.

1❧ La matrice A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Elle admet donc 0 pour seule valeur propre et, si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à $\mathrm{Diag}(0,0,0)$, donc on aurait $A = 0_3$.

La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2❧ On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et que} \qquad A^3 = 0_3.$$

Par conséquent, $B^6 = A^3 = 0_3$ et B admet X^6 pour polynôme annulateur.

Comme $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, son polynôme minimal est un diviseur unitaire de X^6 dont le degré est compris entre 1 et 3 (au sens large). Il y a donc trois possibilités :

- si le polynôme minimal de B est X, alors $B = 0_3$ et $A = B^2 = 0_3$: impossible !
- si le polynôme minimal de B est X^2, alors $B^2 = 0_3$ et $A^2 = B^4 = 0_3$: impossible !
- si le polynôme minimal de B est X^3, alors $B^3 = 0_3$ et
$$A^2 = B^4 = B^3.B = 0_3$$
ce qui est impossible aussi.

Bref, rien ne va. Par conséquent, notre hypothèse initiale est fausse et il n'existe pas de matrice $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

3❧ Notons f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On a donc

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2.$$

Analyse — S'il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans laquelle la matrice de f est C, alors il faut que

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = 0, \quad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1.$$

Synthèse — La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_2, e_1, e_3)$ est une base (permutation des vecteurs de la base canonique) et la matrice de f dans cette base est bien égale à C.

Les matrices A et C sont donc semblables.