# RMS 134 [1520]

*Démontrer l'existence de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\, dt$$

*et calculer sa valeur.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in I = [0, +\infty[$, on pose

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}.$$

❧ Il est clair que chaque fonction $u_n$ est intégrable sur I (continue sur l'intervalle fermé I et $\mathcal{O}(1/t^2)$ lorsque t tend vers $+\infty$).

❧ Il est tout aussi clair que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $I_0 = ]0, +\infty[$ car

$$\forall\, t > 0, \quad u_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

✍ *La série $\sum u_n(0)$ est grossièrement divergente !*

❧ La somme S est donc définie sur $I_0$ :

$$\forall\, t \in I_0, \qquad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).$$

Chaque fonction $u_n$ est continue sur $I_0$ et

$$\forall\, a > 0,\ \forall\, t \in [a, +\infty[, \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

✍ *Il s'agit de majorer une fonction monotone (décroissante) de* $t$...

Le majoration est indépendant de $t$ et c'est le terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions $u_n$ sont continues, on en déduit que la somme S est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ et donc sur l'intervalle

$$I_0 = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

❧ Pour tout $t \in I_0$, la suite de terme général $|u_n(t)|$ tend vers 0 en décroissant. Le Critère spécial des séries alternées permet donc de dominer le reste de cette série :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I_0, \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)\Big| \leqslant \big|u_{n+1}(t)\big| \tag{$\star$}$$

et en particulier pour $n = 0$ :

$$\forall\, t \in I_0, \quad \big|S(t)\big| = \big|R_0(t)\big| \leqslant \big|u_1(t)\big|.$$

On a démontré que la fonction $u_1$ était intégrable sur $I_0$, donc la fonction S est intégrable sur $I_0$ (théorème de comparaison).

Nous avons (enfin !) démontré l'existence de l'intégrale.

❧ Décomposons la somme en somme partielle et reste : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} S_n(t) + R_n(t)\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale (les $u_k$ et le reste $R_n$ sont des fonctions intégrables sur $I_0$ comme on l'a démontré).

Pour tout $t \in I_0$, la suite de terme général $R_n(t)$ tend vers $0$ (puisque c'est le reste d'une série convergente) et, d'après $(\star)$,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I_0, \quad \left|R_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Le majorant est indépendant de $n$ et, en tant que fonction de $t$, il est intégrable sur $I_0$ (fonction de référénce), donc la convergence est dominée et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} R_n(t)\,dt = 0.$$

Finalement, la série de terme général

$$\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = (-1)^k\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+k^2t^2} = \frac{(-1)^k}{k}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

converge (ce qui n'est pas surprenant) et

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

❧ Le cours sur les séries entières nous dit que

$$\forall\, x \in\, ]-1,1[, \quad \ell n(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k.$$

Comme la série du second membre converge pour $x = 1$, on déduit du Théorème d'Abel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ell n\, 2$$

et donc que

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \frac{-\pi\,\ell n\, 2}{2}.$$

✍ *L'intégrale est donc* négative. *C'était prévisible ! En effet, d'après le Critère spécial des séries alternées, le reste est du signe du premier terme négligé et en particulier, la somme (= reste d'ordre $0$) est du signe du premier terme. Donc*

$$\forall\, t > 0, \quad S(t) \leqslant 0$$

*et l'intégrale de $S$ est donc négative.*