RMS 134 [1479]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t). \tag{$\star$}$$

1❧ *La fonction f est convexe.*
2❧ *La dérivée f' est négative.*
3❧ *La fonction f tend vers une limite finie en $+\infty$. (Préciser laquelle.)*
4❧ *La dérivée f' tend vers une limite finie en $+\infty$. (Préciser laquelle.)*
5❧ *La fonction $\alpha^2 f^2 - (f')^2$ est négative.*
6❧ *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$f(t) \leqslant f(0)e^{-\alpha t}.$$

1❧ Comme f est positive, l'inégalité $(\star)$ montre que sa dérivée seconde f'' est positive. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2❧ Supposons qu'il existe un réel $t_0 \geqslant 0$ tel que $f'(t_0) > 0$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse t_0 a pour expression

$$y = f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

Comme f est convexe, son graphe est au-dessus de ses tangentes et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geqslant f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

Comme $f'(t_0) > 0$, le second membre tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et, par comparaison, f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. Cela contredit l'hypothèse sur f (la fonction est supposée majorée).

Par conséquent, la dérivée est négative : $f'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3❧ Comme la dérivée est négative, la fonction f est décroissante. Par hypothèse, elle est positive, donc minorée et elle admet donc une limite finie $\ell \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$.

Si $\ell > 0$, alors

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad f(t) \geqslant \ell$$

(puisque f est décroissante) et, d'après $(\star)$,

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad f''(t) \geqslant \ell\alpha^2.$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall\, t > 0,\ \exists\, c_t > 0, \quad \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = f''(c_t) \geqslant \ell\alpha^2$$

et donc

$$\forall\, t > 0, \quad f'(t) \geqslant f'(0) + \ell\alpha^2 t.$$

✍ *Comme f est supposée deux fois dérivable et non pas de classe $\mathscr{C}^2$, on ne peut pas appliquer ici le Théorème fondamental. On peut le remplacer par le Théorème des accroissements finis, car $f' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est continue sur le segment $[0, t]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, t[$.*

Le minorant tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ (car $\alpha > 0$ et ℓ est ici supposé *strictement* positif). Par comparaison, la dérivée f' tend vers $+\infty$ alors qu'il s'agit d'une fonction négative : c'est absurde !

Par conséquent, la fonction f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

4❧ La fonction f' est croissante (puisque f est convexe) et négative (on vient de le démontrer), donc elle tend vers une limite finie $\ell' \leqslant 0$ au voisinage de $+\infty$.

Supposons que $\ell' < 0$. Comme f' est croissante, on a alors

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f'(x) \leqslant \ell'.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \leqslant f(0) + \ell' x.$$

Comme $\ell' < 0$, on en déduit par comparaison que f tend vers $-\infty$ au voisinage de $+\infty$, ce qui est absurde (la fonction f est, par hypothèse, positive).

5 On considère la fonction $g = \alpha^2 f^2 - (f')^2$: comme f est deux fois dérivable, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g'(x) = 2\alpha^2 f(x) f'(x) - 2f'(x) f''(x) = 2f'(x)\big[\alpha^2 f(x) - f''(x)\big].$$

Or la dérivée f' est négative et le crochet est négatif, donc la dérivée g' est positive. La fonction g est donc croissante. Comme

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \alpha^2 \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2 - \lim_{x\to+\infty} [f'(x)]^2 = 0,$$

la fonction g est donc négative sur $\mathbb{R}_+$.

6 En factorisant g :

$$g(x) = \big[\alpha f(x) - f'(x)\big]\big[\alpha f(x) + f'(x)\big] \leqslant 0$$

on obtient que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \alpha f(x) + f'(x) \leqslant 0.$$

✍ *On sait que $\alpha > 0$, on a démontré que $f(x) \geqslant 0$ et que $f'(x) \leqslant 0$. Par conséquent, si le premier crochet est nul, alors $f(x) = f'(x) = 0$ et le second crochet est nul aussi.*

Notre conclusion est donc vraie même lorsqu'on semble diviser par zéro !

Comme f est deux fois dérivable, nous définissons une fonction continue et positive g en posant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \alpha f(x) + f'(x).$$

✍ *Il y a un cours sur les* équations différentielles, *il n'y en a pas sur les* inéquations *différentielles !*

La méthode que nous présentons ici est aussi astucieuse que fructueuse : on introduit une fonction auxiliaire g pour pouvoir considérer f comme la solution d'une équation différentielle (très facile à résoudre) et on étudie les propriétés de f selon les propriétés de g.

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) + \alpha y(x) = g(x).$$

Il existe donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^{-\alpha x}\Big(A + \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\,dt\Big).$$

Pour $x = 0$, on obtient $f(0) = A$, donc

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) &= f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t} g(t)\,dt \\ &\leqslant f(0)e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

puisque la fonction g est négative sur $\mathbb{R}_+$.