RMS 134 [1405]

Soit u, un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ tel que

$$u^3 + u = 0.$$

1❧ *Démontrer que*

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u \qquad \textit{et que} \qquad \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

2❧ *Démontrer que u n'est pas injectif et que $\operatorname{rg} u = 2$.*

3❧ *En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1❧ Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous indique que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u. \tag{1}$$

Par ailleurs, si le vecteur y appartient à $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, alors il existe un vecteur x tel que $y = u(x)$ et $u^2(x) = u(y) = 0_E$. Or, par hypothèse,

$$0_E = u^3(x) + u(x) = u\big(u^2(x)\big) + u(x) = u(0_E) + y = y.$$

Donc $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont en somme directe et, d'après la relation (1) sur les dimensions,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

❧ Par hypothèse, le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de u. Comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux nous donne

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + I). \tag{2}$$

On déduit de cette décomposition que

$$\dim E = \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker}(u^2 + I)$$

et de (1) que $\dim \operatorname{Ker}(u^2 + I) = \dim \operatorname{Im} u$.

Par ailleurs, pour tout vecteur $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et donc

$$(u^2 + I)(y) = u^3(x) + u(x) = 0_E$$

donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2 + I)$.

Ayant démontré une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure à l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

✍ *En appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, on a obtenu*

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

Il faut alors résister à la tentation d'identifier $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$: un sous-espace peut avoir une infinité de supplémentaires !

(Seul le supplémentaire orthogonal, quand il existe, est unique.)

2❧ Si u est injectif, alors $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et par conséquent $E = \operatorname{Ker}(u^2 + I)$. On a donc

$$u^2 = -I$$

et en particulier

$$(\det u)^2 = -1$$

(puisque la dimension de E est *impaire*), ce qui est absurde (puisque $\det u \in \mathbb{R}$).

❧ On déduit de (1) que $\operatorname{rg} u < 3$ et donc $\operatorname{rg} u \leqslant 2$.

Comme u n'est pas l'endomorphisme nul (par hypothèse), le sous-espace $\operatorname{Ker}(u^2+I)$ n'est pas réduit au vecteur nul (d'après (2)) et il existe donc un vecteur $x_0 \neq 0_E$ dans ce sous-espace.

La famille (x_0) est donc libre et, d'après le Théorème d'augmentation des familles libres, la famille $(x_0, u(x_0))$ est liée si, et seulement si, le vecteur $u(x_0)$ appartient au sous-espace engendré par x_0 ; autrement dit, s'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x_0) = \alpha \cdot x_0.$$

En appliquant u, on en déduit que

$$u^2(x_0) = \alpha^2 \cdot x_0 \quad \text{et donc que} \quad \alpha^2 \cdot x_0 = -x_0$$

puisque $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2+I)$. Comme $x_0 \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha^2 = -1$, ce qui est impossible (puisque α est réel).

Par conséquent, la famille $(x_0, u(x_0))$ est libre. Comme $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2+I)$ et que $\operatorname{Ker}(u^2+I)$ est un sous-espace stable par u, on a justifié que cet espace contenait une famille libre de deux vecteurs.

✍ *Quel que soit le polynôme P, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.*

Ainsi,

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2+I) \geqslant 2.$$

Finalement, on a démontré que

$$\operatorname{rg} u = 2 \qquad \text{et que} \qquad \dim \operatorname{Ker} u = 1$$

d'après (1).

✍ *On peut aboutir au résultat en étudiant le polynôme caractéristique de u.*

On connaît un polynôme annulateur de u : $X(X^2+1)$. Le polynôme minimal de u est un polynôme unitaire, non constant, qui divise tous les polynômes annulateurs. Comme u n'est pas l'endomorphisme nul, on en déduit que le polynôme minimal de u est égal à (X^2+1) ou à $X(X^2+1)$.

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré 3 (la dimension de E) et possède les mêmes facteurs irréductibles que le polynôme minimal (ce dernier point est au programme lorsque le polynôme minimal est scindé mais pas dans le cas général).

Par conséquent, le polynôme caractéristique est de la forme

$$(X^2+1)^m \quad \textit{ou} \quad X^{m_1}(X^2+1)^{m_2}$$

où les entiers m, m_1 et m_2 sont au moins égaux à 1. Comme le degré est égal à 3, la seule possibilité est $X(X^2+1)$.

Comme 0 est une racine simple du polynôme caractéristique, la dimension du noyau est égale à 1 et le rang est donc égal à 2 (1).

3❧ Comme $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, on peut choisir un vecteur e_1 qui dirige $\operatorname{Ker} u$.

On choisit ensuite un vecteur e_2, non nul, dans $\operatorname{Ker}(u^2+I)$. On a justifié plus haut que le couple $(e_2, e_3) = (e_2, u(e_2))$ était alors une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker}(u^2+I)$. Comme ce sous-espace est un plan, on a donc trouvé une base !

On dispose ainsi

— d'un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} u$

— et d'une base de $\operatorname{Ker}(u^2+I)$.

Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E, on en déduit que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de E.

Par choix de e_1, on a $u(e_1) = 0_E$.

Par choix de e_3, on a $u(e_2) = e_3$ et comme $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2+I)$, on a

$$u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2.$$

Donc la matrice de u relative à cette base est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *Pour bien comprendre la question posée, il faut d'abord lire la matrice A comme il convient ! Cette matrice est diagonale par blocs :*

$$A = \mathrm{Diag}(A_0, A_1) \quad \textit{avec} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Cela doit alors faire penser à une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels (une droite et un plan) stables par u et donc à une base de E adaptée à la décomposition (2).