RMS 134 [1423]

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1❧ *Pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2❧ *Condition nécessaire et suffisante sur* A *pour que* B *soit diagonalisable.*

1❧ La propriété à établir est évidente pour $P = 1$ et pour $P = X$.
Si elle est vraie pour $P = X^k$, alors

$$B^{k+1} = B^k B \overset{\text{HR}}{=} \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc démontrée (par récurrence) pour $P = X^k$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k,$$

on a

$$XP' = \sum_{k=0}^{d} a_k k X^k$$

et le résultat est ainsi établi par linéarité :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2❧ Supposons que B soit diagonalisable. Alors le polynôme minimal P de B est scindé, à racines (réelles !) simples.

D'après la formule précédente, il faut donc que P et XP' soient des polynômes annulateurs de A. Les valeurs propres de A doivent donc être des racines de P, mais aussi des racines de XP'.

Comme P n'a que des racines simples, aucune racine de P n'est racine de P'. Par conséquent, il faut que toutes les racines de P soient aussi racines de X et P n'admet donc qu'une seule racine : 0 et il s'agit d'une racine simple.

Donc le polynôme minimal de B est égal X et $B = 0_{2n}$.

❧ Réciproquement, si $A = 0_n$, alors $B = 0_{2n}$ est évidemment diagonalisable !

❧ En conclusion, la matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est nulle.