RMS 134 [1539]

> *Soient* X *et* Y, *deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs* p *et* q. *On pose* $Z = {}^{X}\!/_{Y}$.
> **1❧** *Vérifier que* $Z \leqslant X$. *Démontrer que* Z *admet une espérance et une variance. Préciser la valeur de* $\mathbf{E}(Z)$.
> **2❧** *Caractériser la loi de* Z.

✍ *Pour une fois,* $q \neq 1-p$*... Méfiance !*

1❧ Comme la variable aléatoire Y suit une loi géométrique, elle est toujours supérieure à 1, donc $Z \leqslant X$.

Comme la variable aléatoire Z est positive, on en déduit que $Z^2 \leqslant X^2$.

La variable aléatoire X, de loi géométrique, admet des moments de tout ordre. Par comparaison, les variables aléatoires Z et Z^2 sont donc d'espérance finie. Donc Z admet une espérance et une variance.

❧ La variable aléatoire ${}^{1}\!/_{Y}$ est bien définie (puisque le dénominateur Y ne s'annule jamais) et d'espérance finie (puisqu'elle est presque sûrement bornée : $\mathbf{P}(0 \leqslant Y \leqslant 1) = 1$).

Ainsi, la variable aléatoire $Z = X \times {}^{1}\!/_{Y}$ apparaît comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie. Par conséquent,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big).$$

D'après le cours, $\mathbf{E}(X) = {}^{1}\!/_{p}$ et d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\cdot pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k} = \frac{-p\,\ell n(1-q)}{q}$$
$$= \frac{-p\,\ell n\,p}{q}.$$

✍ *Le rayon de convergence du développement en série entière de* $\ell n(1-x)$ *est égal à* 1 *et* $0 < q < 1$.

Finalement,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{-\,\ell n\,p}{q}.$$

2❧ Les valeurs de Z appartiennent à $\mathbb{Q}_+^*$. Pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe un unique couple $(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$r = \frac{n}{d} \qquad \text{avec} \qquad n \wedge d = 1$$

(représentation irréductible de r). Dans ces conditions,

$$Z(\omega) = r \iff \exists\, a \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} X(\omega) &= an \\ Y(\omega) &= ad \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$[Z = r] = \bigsqcup_{a \in \mathbb{N}^*} [X = an] \cap [Y = ad].$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$ et indépendance des variables aléatoires X et Y, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = {}^{n}\!/_{d}) &= \sum_{a=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = an)\,\mathbf{P}(Y = ad) \\
&= \sum_{a=1}^{+\infty} p(1-p)^{an-1}.q(1-q)^{ad-1} \\
&= \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \cdot \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)^n} \cdot \frac{(1-q)^d}{1-(1-q)^d}.
\end{aligned}$$