RMS 134 [1483]

> *Calculer*
> $$\varphi(x) = \int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u}$$
> *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *On posera* $v = \tan u$.

❧ En tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, $\varphi(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

❧ La fonction tan réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$ sur $J = \mathbb{R}$. On peut donc effectuer le changement de variable $v = \tan u$ pour tout $x \in I_0$.

✍ *Si* $x \in I_0$*, alors le segment* $[0 \leftrightarrow x]$ *est contenu dans l'intervalle ouvert* I_0*.*

On sait que

$$\cos^2 u = \frac{1}{1+v^2} \quad \text{et} \quad dv = (1+\tan^2 u)\,du = \frac{du}{\cos^2 u}$$

donc, pour tout $x \in I_0$,

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\frac{3}{\cos^2 u}+1} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+3(1+v^2)}\,dv.$$

Autrement dit, pour tout $x \in I_0$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{3}\int_0^{\tan x} \frac{dv}{4/3+v^2} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}\tan x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}\tan x}{2}.\end{aligned}$$

✍ *Il est utile de retenir que*

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}$$

pour tout $a > 0$*.*

❧ Comme l'intégrande est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (Théorème fondamental).

✍ *On peut aussi remarquer que* φ *est la primitive* $\boxed{\textit{nulle en } x = 0}$ *d'une fonction paire : cette fonction* φ *est donc impaire.*

En particulier,

$$\varphi(\pi/2) = \lim_{x\to(\pi/2)-} \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Par symétrie,

$$\varphi(-\pi/2) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{3+\cos^2 u} = \varphi(\pi/2) - \varphi(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

L'intégrande étant une fonction paire et périodique, de période π, on en déduit que

$$\int_0^{\pi} \frac{du}{3+\cos^2 u} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{3+\cos^2 u} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \tag{$\star$}$$

❧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

✍ *Cet entier relatif n est égal à*

$$\left\lfloor \frac{x+\pi/2}{\pi} \right\rfloor$$

mais cela est sans importance.

Dans le cas général ($|x - n\pi| < \pi/2$), on déduit de la relation de Chasles, de la périodicité de l'intégrande et de la propriété ($\star$) que

$$\begin{aligned}\int_0^x \cdots &= \int_0^{n\pi} \cdots + \int_{n\pi}^x \cdots \\ &= 2n\int_0^{\pi/2} \cdots + \int_0^{x-n\pi} \cdots \\ &= \frac{n\pi}{2\sqrt{3}} + \varphi(x - n\pi)\end{aligned}$$

et comme $x - n\pi \in I_0$, on a finalement

$$\varphi(x) = \frac{n\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3}\tan x}{2}.$$

❧ Dans le cas particulier où $x = n\pi + \pi/2 = (2n+1)\pi/2$,

$$\varphi(x) = (2n+1)\varphi(\pi/2) = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{3}}.$$