Soit E, un espace euclidien. On note K, l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E.

1❧ *Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que $p \in K$ si, et seulement si,*

$$\forall\, x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

2❧ *En déduire que K est compact.*

1❧ (Question de cours)

❧ Si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x \in E$, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, donc

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

(Théorème de Pythagore).

✍ *Cette propriété signifie qu'un projecteur orthogonal est toujours une application linéaire continue et que $|||p||| \leqslant 1$.*

Comme $p(x) = x$ pour tout vecteur $x \in \operatorname{Im} p$, on en déduit que, en général, $|||p||| = 1$.

❧ Réciproquement, si p n'est pas une projection orthogonale, alors il existe deux vecteurs $u \in \operatorname{Im} p$ et $v \in \operatorname{Ker} p$ tels que $\langle u \,|\, v \rangle \neq 0$. (En particulier, ces deux vecteurs sont distincts de 0_E.)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$x(t) = u + t \cdot v \quad \text{si bien que} \quad p[x(t)] = u.$$

En calculant $\|x(t)\|^2$, on vérifie qu'il existe des réels t tels que

$$\|x(t)\| > \|u\| = \|p[x(t)]\|.$$

2❧ L'ensemble K est une partie de $L(E)$, espace vectoriel de <u>dimension finie</u>. Cet espace peut être muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.

❧ D'après la question précédente,

$$\forall\, p \in K, \qquad |||p||| \leqslant 1,$$

donc K est une partie bornée de $L(E)$.

❧ Considérons une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de projecteurs orthogonaux qui converge vers une endomorphisme $f \in L(E)$.

Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \|f(x) - p_n(x)\| \leqslant |||f - p_n|||\, \|x\|$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = f(x).$$

De manière analogue, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\|(f\circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x)\| \\
&\qquad \leqslant \|(f\circ f)(x) - (p_n\circ f)(x) + (p_n \circ f)(x) - (p_n\circ p_n)(x)\| \\
&\qquad \leqslant \|(f - p_n)\circ f(x)\| + \|[p_n \circ (f - p_n)](x)\| \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(inégalité triangulaire et linéarité de } p_n) \\
&\qquad \leqslant |||f - p_n|||\, \|f(x)\| + |||p_n|||\, |||f - p_n|||\, \|x\| \\
&\qquad \leqslant |||f - p_n|||\, \big[\|f(x)\| + \|x\|\big].
\end{aligned}$$

Comme $|||f - p_n|||$ tend vers 0 (par hypothèse), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (p_n \circ p_n)(x) = (f\circ f)(x).$$

Comme tous les p_n sont des projecteurs,

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad p_n(x) = (p_n \circ p_n)(x)$$

donc

$$\forall\, x \in E,\quad f(x) = (f \circ f)(x)$$

par unicité de la limite.

L'endomorphisme f est donc un projecteur. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad |||p_n||| \leqslant 1$$

donc $|||f||| \leqslant 1$.

✍ *La boule unité fermée de $L(E)$ est fermée : comme tous les p_n appartiennent à ce fermé, la limite f appartient encore à ce fermé.*

D'après la question précédente, l'endomorphisme f est donc un projecteur orthogonal. Nous avons donc démontré que K était une partie fermée de $L(E)$.

❧ Comme $L(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée et bornée de $L(E)$ est compacte. Donc K est compacte.

✍ ***Variante rapide** — D'après la première question, la partie K est l'intersection de la boule unité fermée de $L(E)$ et de l'ensemble*

$$[f \circ f - f = \omega_E]$$

des projecteurs de E.

L'application $[f \mapsto f \circ f - f]$ est continue de $L(E)$ dans $L(E)$ (comme $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre, les applications polynomiales sont continues), donc l'ensemble des projecteurs de E est un fermé (image réciproque d'un singleton [=fermé] par une application continue).

L'ensemble K est donc une partie fermée (intersection de deux fermés) contenue dans une partie compacte (la boule unité d'un espace vectoriel de dimension finie), donc K est bien un compact.