RMS 134 [1486]

> *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note*
> $$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} X^n.$$
> *Pour tout réel $R > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que toutes les racines complexes de P_n ont un module supérieur à R.*

✍ *Pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{C}$: il possède donc n racines complexes (en comptant avec multiplicité).*

Par ailleurs, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers la fonction $\exp$ (théorie des séries entières) et la fonction $\exp$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{C}$.

Il faut bien que les racines de P_n soient passées quelque part... Nous allons montrer qu'elles sont parties vers l'infini.

Nous allons raisonner par l'absurde en fixant $R > 0$ et en supposant qu'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que le polynôme P_n admette au moins une racine complexe z_n telle que $|z_n| \leqslant R$.

✍ *Il revient au même de considérer un compact K non vide et de supposer que*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \geqslant N,\ \exists\, z_n \in K, \quad P_n(z_n) = 0.$$

En effet, tout compact est borné et donc contenu dans un disque fermé de rayon $R > 0$.

❧ Autrement dit, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |z_{n_k}| \leqslant R \quad \text{et} \quad P_{n_k}(z_{n_k}) = 0.$$

Comme la suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe bornée, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$|\ell| \leqslant R.$$

❧ Les polynômes P_n sont les sommes partielles de la série entière dont la somme est $\exp$. Comme le rayon de convergence de cette série entière est infini, cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact contenu dans $\mathbb{C}$ et en particulier sur le disque fermé $[|z| \leqslant R]$. Comme ℓ et les z_{n_k} appartiennent tous à ce disque fermé, on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\big|\exp(\ell) - P_{n_k}(z_{n_k})\big| &\leqslant \big|\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})\big| + \big|\exp(z_{n_k}) - P_{n_k}(z_{n_k})\big| \\ &\leqslant \big|\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})\big| + \|\exp - P_{n_k}\|_\infty\end{aligned}$$

où la borne supérieure est prise sur le disque fermé $[|z| \leqslant R]$.

Comme z_{n_k} converge vers ℓ et que $\exp$ est continue sur $\mathbb{C}$, on a bien

$$\lim_{k\to+\infty} \big|\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})\big| = 0.$$

Comme la suite des fonctions $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le disque fermé $[|z| \leqslant R]$,

$$\lim_{k\to+\infty} \|\exp - P_{n_k}\|_\infty = 0.$$

Par encadrement, on a donc démontré que

$$\exp(\ell) = \lim_{k\to+\infty} P_{n_k}(z_{n_k}).$$

Or, par définition, $P_{n_k}(z_{n_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\exp(\ell) = 0$: impossible !