On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on suppose qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *vérifie :* $\exp(M) = A$.

1❧ *Démontrer que* M *admet une unique valeur propre. Préciser la forme de cette valeur propre.*

2❧ *Démontrer que* M *est triangulaire supérieure.*

3❧ *Résoudre l'équation* $\exp(M) = A$.

1❧ En tant que matrice à coefficients complexes, la matrice M est trigonalisable. Si elle admet deux valeurs propres distinctes, alors elle est même diagonalisable. D'après le cours, la matrice $A = \exp(M)$ serait alors diagonalisable.

Mais la matrice A n'admet qu'une seule valeur propre (elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux). Par conséquent, si la matrice A était diagonalisable, elle serait en fait diagonale — et ce n'est clairement pas le cas !

La matrice M admet donc une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

D'après le cours, e^λ est une valeur propre de $\exp(M) = A$, donc $e^\lambda = -1$. Par conséquent, il existe un entier impair $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\text{Sp}(M) = \{ik\pi\}.$$

2❧ Comme $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, son polynôme caractéristique est égal à $(X - \lambda)^2$ et, pour les raisons expliquées plus haut, son polynôme minimal est lui aussi égal à $(X - \lambda)^2$.

✍ *Le polynôme minimal est un diviseur unitaire non constant du polynôme caractéristique. Il n'y a donc que deux possibilités :* $(X - \lambda)$ *et* $(X - \lambda)^2$. *Comme* $M \neq \lambda I_2$, *le polynôme minimal est égal à* $(X - \lambda)^2$.

En posant $N = M - \lambda I_2$, on a une matrice nilpotente d'indice 2 :

$$N \neq 0_2, \qquad N^2 = 0_2$$

telle que $M = \lambda I_2 + N$. Comme N et I_2 commutent, on déduit de la formule du binôme que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell}{k} \lambda^{k-\ell} N^\ell$$
$$= \lambda^k I_2 + k\lambda^{k-1} N. \qquad \text{(car } N^2 = 0_2\text{)}$$

Par conséquent,

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} I_2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{k!} N = e^\lambda I_2 + e^\lambda N.$$

Comme $\exp(M) = A$, on en déduit que $e^\lambda = -1$ (ce qui confirme le résultat démontré précédemment) et que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien démontré que la matrice M était triangulaire :

$$M = \lambda I_2 + N = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3❧ Comme on vient de le voir, la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(M) = A$ si, et seulement si, il existe un complexe λ tel que

$$e^\lambda = -1 \quad \text{et} \quad M = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe λ vérifie $e^{\lambda} = -1$ si, et seulement si, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2p+1)i\pi$. Donc la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(M) = A$ si, et seulement si, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} (2p+1)i\pi & -1 \\ 0 & (2p+1)i\pi \end{pmatrix}.$$