> *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire*
> $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k + X_{k=1}.$$

❧ La fonction S_n est bien une variable aléatoire en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires. Comme une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire d'espérance finie, la variable aléatoire S_n est aussi un variable aléatoire d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) + \mathbf{E}(X_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} 2p = 2np.$$

❧ On peut aussi écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=2}^{n+1} X_k = X_1 + X_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} X_k.$$

Comme les variables aléatoires X_k sont bornées, elles admettent toutes un moment d'ordre deux et comme elles sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{V}(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \mathbf{V}(2X_k) + \mathbf{V}(X_{n+1}) &= [4(n-1)+2]\,\mathbf{V}(X)\\ &= (4n-2)p(1-p).\end{aligned}$$

✍ *La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances. Lorsque les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, la formule se complique avec l'apparition des covariances qui ne sont plus nécessairement nulles :*

$$\mathbf{V}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(Y_k) + 2 \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} \mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell).$$

Avec $Y_k = X_k + X_{k+1}$ et $Y_\ell = X_\ell + X_{\ell+1}$, on a

- $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell) = 0$ *pour $k < \ell - 1$ d'après le lemme des coalitions (puisque les paires d'indices $\{k, k+1\}$ et $\{\ell, \ell+1\}$ sont alors* disjointes*)* ;
- *et pour $k = \ell - 1$:*

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) &= \mathbf{Cov}(X_k + X_{k+1}, X_{k+1} + X_{k+2})\\ &= \mathbf{Cov}(X_k, X_{k+1} + X_{k+2})\\ &\qquad + \mathbf{V}(X_{k+1}) + \mathbf{Cov}(X_{k+1}, X_{k+2})\\ &= \mathbf{V}(X_{k+1}) = p(1-p)\end{aligned}$$

à nouveau par le lemme des coalitions.