

Soit un jeu de $2n$ cartes numérotées de 1 à $2n$. De combien de manières peut-on mélanger ce jeu ? De combien de manières peut-on le mélanger de telle sorte que les cartes portant un numéro impair soient ordonnées en croissant ?

Il y a $(2n)!$ permutations d'un ensemble à $2n$ éléments, donc il y a $(2n)!$ mélanges possibles en tout.

Pour que les cartes portant un numéro impair soient ordonnées en croissant,

— on choisit la position des cartes de numéro impair dans le paquet mélangé : il s'agit de choisir n positions parmi $2n$ positions possibles, donc il y a

$$\binom{2n}{n}$$

possibilités ;

— la position de chaque carte de numéro impair est maintenant déterminée (puisque ces cartes sont rangées par ordre croissant) ;

— les positions occupées par les cartes de numéro pair sont également déterminées (elles ne peuvent qu'occuper les n places restantes) ;

— toutes les permutations des cartes de numéro pair sont possibles et comme il y a n cartes de numéro pair, il y a $n!$ possibilités.

D'après le principe multiplicatif, il y a donc

$$\binom{2n}{n} n! = \frac{(2n)!}{n!}$$

manières de mélanger les cartes en faisant en sorte que les cartes de numéro impair soient rangées dans l'ordre croissant.