RMS 134 [1465]

> *Trouver la limite de la suite de terme général*
> $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k+n}.$$

✍ *Les termes de la somme dépendent de l'indice n, par conséquent S_n **n'est pas** la somme partielle d'une série.*

✍ *En réécrivant les termes de la somme, on fait apparaître le motif k/n :*

$$\tan \frac{1}{k+n} = \tan\Big(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+k/n)}\Big)$$

qui doit faire penser aux sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Mais la tangente complique la donne !

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le quotient $\frac{1}{k+n}$ est compris entre 0 et $1/n$. Il est donc petit et par conséquent

$$\tan \frac{1}{k+n} \approx \frac{1}{k+n}, \tag{1}$$

ce qui suggère que

$$S_n \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

Malheureusement, la relation (1) n'a pas vraiment de sens (l'entier k est-il fixé ? s'agit-il d'un équivalent uniforme en k ?) et aucun théorème du cours ne permet de passer de cette relation de comparaison entre les termes à la relation analogue entre les sommes.

❧ **Première méthode**

La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[0, \pi/4]$ et

$$\forall\, x \in [0, \pi/4], \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x$$
$$\tan''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$$

donc

$$\forall\, 0 \in [0, \pi/4], \quad 0 \leqslant \tan''(x) \leqslant 2 \times 1 \times (1+1^2) = 4.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a donc

$$\forall\, x \in [0, \pi/4], \quad \big|\tan x - x\big| \leqslant 4\frac{x^2}{2} = 2x^2.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big|S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\Big| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^2} \leqslant \frac{2n}{(1+n)^2}. \tag{2}$$

✍ *Pour majorer une somme, on peut parfois se contenter de multiplier le plus grand terme par le nombre total de termes...*

L'encadrement (2) prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = 0.$$

On a reconnu plus haut une somme de Riemann et on a déjà calculé sa limite, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell n\, 2.$$

❧ **Variante de la première méthode**

✍ *On a travaillé sur le segment $[0, \pi/4]$ de manière assez arbitraire. Or les arguments de la fonction* $\tan$ *sont tous compris entre $1/2n$ et $1/n$. Il serait donc plus judicieux d'étudier* $\tan$ *au voisinage de 0 et plus précisément l'écart entre le graphe de* $\tan$ *et sa tangente à l'origine...*

On considère la fonction $f = [x \mapsto \tan x - x]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 1/n]$ et

$$\forall\, x \in [0, 1/n], \quad 0 \leqslant f'(x) = \tan^2 x \leqslant \tan^2 \frac{1}{n}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est donc lipschitzienne sur $[0, 1/n]$ avec en particulier

$$\forall\, x \in [0, 1/n], \quad \big|f(x)\big| = \big|f(x) - f(0)\big| \leqslant \tan^2 \frac{1}{n} \cdot |x| \leqslant \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}.$$

On a donc (inégalité triangulaire)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|f\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}$$

et donc (somme de n termes, tous égaux)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right| \leqslant \tan^2 \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = 0$$

et on peut conclure de la même manière.

✍ *Il est important de noter qu'on a utilisé ici un théorème moins précis que dans la première version (inégalité des accroissements finis, c'est-à-dire approximation au premier ordre, vs inégalité de Taylor-Lagrange au second ordre), mais on s'en est servi de façon plus judicieuse (en considérant un intervalle plus petit).*

Cela explique pourquoi on a obtenu une meilleure approximation (le majorant de (3) est un infiniment petit du second ordre alors que le majorant de (2) était un infiniment petit du premier ordre).

❧ **Deuxième méthode**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \tan \frac{1}{n+t}.$$

Il est clair que cette fonction est continue et décroissante. Une comparaison classique entre somme et intégrale nous donne l'encadrement suivant.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) - f(0) + \int_0^n \tan \frac{1}{n+t}\, dt \leqslant S_n \leqslant \int_0^n \tan \frac{1}{n+t}\, dt \tag{4}$$

D'une part,

$$f(n) - f(0) = \tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, le changement de variable $t = nu$ nous donne

$$\int_0^n \tan \frac{1}{n+t}\, dt = \int_0^1 g_n(u)\, du \quad \text{avec} \quad g_n(u) = n \tan \frac{1}{n(1+u)}.$$

Chaque fonction g_n est intégrable sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un segment) et

$$g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n(1+u)} = \frac{1}{1+u}.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue sur $[0, 1]$ (et donc intégrable sur ce segment).

Par croissance de la fonction tan sur $[0, 1/n] \subset [0, 1]$,

$$\forall\, u \in [0, 1], \quad 0 \leqslant n \tan \frac{1}{n(1+u)} \leqslant n \tan \frac{1}{n}$$

et d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction tan est 2-lipschitzienne sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \tan \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n},$$

si bien que la convergence est dominée :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, u \in [0, 1], \quad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant 2.$$

(Le majorant est indépendant du paramètre n et, en tant que fonction de u, il est intégrable sur le segment $[0, 1]$.)

On déduit alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)\,du = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ell n\, 2$$

et finalement, on déduit de (4) que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell n\, 2$$

par encadrement.