RMS 134 [1659]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$*. On suppose que* f *et* f'' *sont bornées.*

1❧ *Justifier l'existence des réels*

$$M_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|f(x)\right| \quad et \quad M_2(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|f''(x)\right|.$$

2❧ *Soit* $x \in \mathbb{R}_+$*. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que*

$$\forall\, h > 0, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

3❧ *Justifier alors l'existence de*

$$M_1(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f'(x)\right|$$

et démontrer que

$$M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}. \qquad (\star)$$

4❧ *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, on définit une fonction* $f_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *en posant*

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2 - (2-x)^{2+\varepsilon} \quad et \quad \forall\, x > 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2.$$

Démontrer que f_ε*,* f'_ε *et* f''_ε *sont bornées sur* $\mathbb{R}_+$*. Préciser les valeurs de* $M_0(f_\varepsilon)$*, de* $M_1(f_\varepsilon)$ *et de* $M_2(f_\varepsilon)$*.*

5❧ *En déduire que le facteur 2 est la meilleure constante possible dans l'inégalité* $(\star)$*.*

1❧ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure réelle (Axiome de la borne supérieure). Comme f et f'' sont définies sur $\mathbb{R}_+$, les ensembles

$$\left\{\left|f(x)\right|,\ x \in \mathbb{R}_+\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\left|f''(x)\right|,\ x \in \mathbb{R}_+\right\}$$

ne sont pas vides. Comme f et f'' sont supposées bornées, ces deux ensembles sont également majorés. Par conséquent, les deux réels $M_0(f)$ et $M_2(f)$ sont bien définis.

2❧ D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \left|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\, M_2(f).$$

En particulier, pour $a = x \in \mathbb{R}_+$ et $b = x + h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2(f).$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\left|\left|hf'(x)\right| - \left|f(x+h) - f(x)\right|\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2(f)$$

et donc que

$$\begin{aligned}\left|hf'(x)\right| &\leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2(f) + \left|f(x+h) - f(x)\right| \\ &\leqslant 2M_0(f) + \frac{h^2}{2}\, M_2(f)\end{aligned}$$

(à nouveau par inégalité triangulaire). Comme $h > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

3❧ Dans l'encadrement précédent, le majorant est indépendant de x. Cela prouve que la dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et par conséquent que le réel $M_1(f)$ est bien défini (pour les raisons données plus haut).

Dans cet encadrement, le minorant est indépendant de $h > 0$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \inf_{h>0} \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

Une étude (rapide!) des variations de la fonction

$$\varphi = \left[h \mapsto \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}\right]$$

montre que

$$\inf_{h>0} \varphi(h) = \varphi\left(\sqrt{\frac{4M_0(f)}{M_2(f)}}\right) = 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Par conséquent, on a bien

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Le majorant est indépendant de la variable x, on peut cette fois passer à la borne supérieure et trouver :

$$M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

4❧ Il est clair que f_ε est strictement croissante sur $[0, 2]$. Comme

$$f_\varepsilon(2) = 2, \quad f_\varepsilon(0) = 2 - 2^{2+\varepsilon} = 2 - 4.2^\varepsilon < -2$$

et que $f_\varepsilon(x) = 2$ pour tout $x > 2$, on en déduit que

$$M_0(f_\varepsilon) = 4.2^\varepsilon - 2.$$

❧ Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 2$, on a

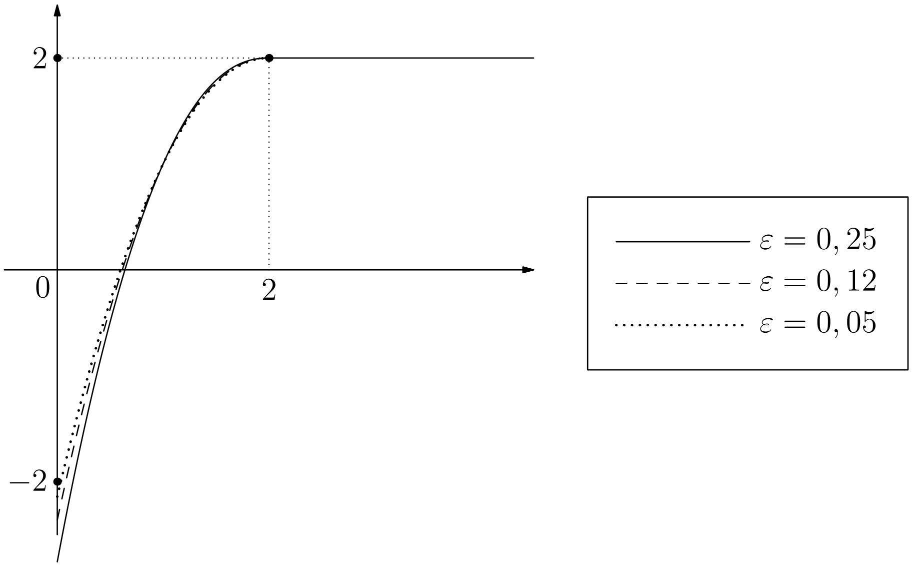
$$f'_\varepsilon(x) = (2+\varepsilon)(2-x)^{1+\varepsilon}.$$

Il est aussi clair que la dérivée f'_ε est décroissante sur $[0, 2]$ (et nulle sur $]2, +\infty[$!) avec

$$f'_\varepsilon(0) = 2^{1+\varepsilon}(2+\varepsilon), \quad f'_\varepsilon(2) = 0.$$

Par conséquent,

$$M_1(f_\varepsilon) = 2.(2+\varepsilon).2^\varepsilon.$$



❧ Enfin, f_ε'' est nulle sur $]2,+\infty[$ et

$$\forall\, x \in [0,2], \quad f_\varepsilon''(x) = -(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)(2-x)^\varepsilon.$$

La dérivée seconde est donc négative et croissante sur $[0,2]$:

$$f_\varepsilon''(0) = -(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon, \quad f_\varepsilon''(2) = 0$$

d'où finalement

$$M_2(f_\varepsilon) = (2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon.$$

✍ *Un détail à ne pas perdre de vue : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.*

En effet,

— *elle est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,2[$ et sur $]2,+\infty[$;*
— *elle tend vers 2 à gauche et à droite de $x=2$ (donc le raccord est continu) ;*
— *sa dérivée tend vers 0 à gauche et à droite de $x=2$ (donc le raccord est de classe $\mathscr{C}^1$) ;*
— *sa dérivée seconde tend vers 0 à gauche et à droite de $x=2$ (donc le raccord est de classe $\mathscr{C}^2$).*

En revanche, la fonction f_0 définie par

$$\forall\, x \in [0,2], \quad f_0(x) = 2-(2-x)^2 \quad \text{et} \quad \forall\, x > 2, \quad f_0(x) = 2$$

n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$: sa dérivée seconde est égale à -2 sur $[0,2[$ et identiquement nulle sur $]2,+\infty[$.

Cette fonction ne peut donc pas servir de contre-exemple alors même que

$$M_1(f_0) = 2\sqrt{M_0(f_0)M_2(f_0)}.$$

$\boxed{5❧}$ Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\alpha < 2$ tel que

$$\frac{M_1(f)}{\sqrt{M_0(f)M_2(f)}} \leqslant \alpha$$

pour toute fonction f bornée et de dérivée seconde bornée.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\frac{M_1(f_\varepsilon)}{\sqrt{M_0(f_\varepsilon)M_2(f_\varepsilon)}} = \frac{2.(2+\varepsilon).2^\varepsilon}{\sqrt{[4.2^\varepsilon-2][(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon]}} \leqslant \alpha.$$

En faisant tendre ε tend vers 0, on obtiendrait alors

$$\frac{2.2.1}{\sqrt{[4-2][2.1.1]}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \leqslant \alpha$$

(puisque les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $\alpha < 2$.

Le facteur 2 est donc optimal (minimal).