RMS 134 [1410]

Soient a et b, deux nombres réels distincts et n, un entier naturel. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose

$$u(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP.$$

1❧ *Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.*
2❧ *Donner la décomposition en éléments simples de la fraction ${}^{P'}/_{P}$ pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ (non constant).*
3❧ *Démontrer que u est diagonalisable en précisant valeurs propres et sous-espaces propres.*

1❧ Il est clair que $u(P)$ est un polynôme à coefficients complexes, quel que soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
❧ Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, non nul, de degré $d \leqslant n$ et de coefficient dominant $a_d \neq 0$. Alors

$$\deg[(X-a)(X-b)P'] \leqslant 1 + 1 + (d-1) = d+1$$

et le coefficient du terme de degré $(d+1)$ est égal à da_d (qui peut être nul si le polynôme P est constant). D'autre part,

$$\deg(nXP) = 1 + d$$

et le coefficient du terme de degré $(d+1)$ est égal à na_d.

Par différence, le degré de $u(P)$ est inférieur à $(d+1)$ et le coefficient du terme de degré $(d+1)$ est égal à

$$(d-n)a_d.$$

Si $d < n$, alors $\deg u(P) \leqslant n$ et $u(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. Si $d = n$, alors le coefficient du terme de degré $d+1 = n+1$ est nul (puisque $n = d$), donc $\deg u(P) \leqslant n$ et $u(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On a ainsi démontré que $u(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
❧ La dérivation est linéaire sur $\mathbb{C}[X]$ et la multiplication des polynômes est bilinéaire (structure d'algèbre associative), donc l'application u est bien linéaire.
❧ On a ainsi démontré que u était bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2❧ Comme P n'est pas constant, il est scindé (Théorème de D'Alembert-Gauss) :

$$P = a_d \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

et le polynôme dérivé s'obtient avec la formule de Leibniz (dérivation d'un produit de r facteurs) :

$$P' = a_d \sum_{k=1}^{r} m_k (X-\alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{\ell \neq k} (X - \alpha_\ell)^{m_\ell}.$$

✍ *L'expression factorisée d'un polynôme scindé peut prendre deux formes :*
- *celle qui précède où les racines α_k sont deux à deux distinctes, ce qui impose de faire apparaître la multiplicité $m_k \in \mathbb{N}^*$ de chaque racine ;*
- *une factorisation où les racines λ_k ne sont pas nécessairement distinctes*

$$a_d \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$$

et les multiplicités sont alors sous-entendues.

La première factorisation est préférable quand il est utile de discuter sur les multiplicités.

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \sum_{k=1}^{r} \frac{a_d(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots[m_k(X-\alpha_k)^{m_k-1}]\cdots(X-\alpha_r)^{m_r}}{a_d(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_k)^{m_k}\cdots(X-\alpha_d)^{m_d}}\\ &= \sum_{k=1}^{r}\frac{m_k}{X-\alpha_k}.\end{aligned}$$

✍ *Comme P n'est pas constant, on a $\deg P' < \deg P$ et par conséquent la partie entière de la fraction P'/P est nulle — ce qu'on voit aussi sur l'expression précédente.*

3❧ Un polynôme P (non nul !) est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ si, et seulement si, $u(P) = \lambda P$, c'est-à-dire

$$(X-a)(X-b)\frac{P'}{P} = nX + \lambda.$$

L'expression développée de P'/P qu'on a trouvée suggère de chercher P de la forme

$$P = (X-a)^{m_a}(X-b)^{m_b}.$$

Dans ce cas, l'équation précédente devient

$$m_a(X-b) + m_b(X-a) = nX + \lambda.$$

En identifiant les termes de degré 0 et de degré 1, on en déduit que P est un vecteur propre de u associé à λ si, et seulement si, il existe un entier $0 \leqslant m \leqslant n$ tel que

$$P = (X-a)^m(X-b)^{n-m} \quad \text{et} \quad \lambda = (a-b)m - an.$$

✍ *Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues !*

❧ Comme $a \neq b$, on a ainsi trouvé $(n+1)$ valeurs propres distinctes :

$$\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n, \quad \lambda_m = \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} m - an.$$

Comme la dimension de l'espace $\mathbb{C}_n[X]$ est égale à $(n+1)$, on en déduit que l'endomorphisme u est bien diagonalisable.

D'après le cours, on sait alors que chaque sous-espace propre est une droite vectorielle et, en effet, les calculs qui précèdent ont démontré que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_m était la droite vectorielle dirigée par le polynôme

$$P_m = (X-a)^m(X-b)^{n-m}.$$

✍ *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants, donc la famille $(P_m)_{0\leqslant m\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ dont tous les vecteurs sont de degré n.*