RMS 134 [1482 (variante)]

On pose

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ell n(1-t)}{t}\, dt.$$

1❧ *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0, 1[$. *(Préciser l'expression de sa dérivée.)*

2❧ *Démontrer que* f *est continue sur* $[0, 1]$.

3❧ *La fonction* f *est-elle dérivable en* 1 *?*

4❧ *Calculer le développement limité à l'ordre deux de* $f(x)$ *au voisinage de* $x = 0$.

Pour $0 < t < 1$, on pose

$$g(t) = \frac{\ell n(1-t)}{t}.$$

Il est clair que cette fonction g est continue sur $]0, 1[$. Sachant que

$$g(t) \underset{t \to 0}{=} \frac{-t + o(t)}{t} = -1 + o(1),$$

on peut poser $g(0) = -1$ pour obtenir ainsi une fonction continue sur l'intervalle $I = [0, 1[$.

D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction G définie par

$$\forall\, x \in [0, 1[, \quad G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

est alors une primitive de g et donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$.

1❧ Par composition, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1[$:

$$\begin{array}{ccccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & f(x) = G(x^2) \end{array}$$

et d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2)$$

soit

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad f'(x) = \frac{2\,\ell n(1-x^2)}{x}.$$

2❧ On sait que la fonction ℓn est intégrable au voisinage de l'origine. Lorsque t tend vers 1 (par valeurs inférieures),

$$g(t) \sim \ell n(1-t)$$

donc la fonction g est intégrable au voisinage de 1. La fonction f est donc bien définie en 1 :

$$f(1) = \int_0^1 g(t)\, dt.$$

✍ *Il suffit que la fonction* g *soit intégrable sur* $[0, 1[$ *pour que l'intégrale généralisée soit convergente.*

Comme g est continue sur l'intervalle $[0, 1[$, elle est donc intégrable sur $[0, 1[$ et, par définition des intégrales généralisées,

$$\int_0^1 g(t)\, dt = \lim_{x \to 1} \int_0^x g(t)\, dt = \lim_{x \to 1} G(x).$$

Par composition de limites, comme x^2 tend vers 1 lorsque x tend vers 1,

$$f(x) = G(x^2) \xrightarrow[x \to 1]{} \lim_{x \to 1} G(x) = \int_0^1 g(t)\, dt = f(1).$$

La fonction f est donc continue sur $[0,1]$.

✍ *Comment calculer $f(1)$? Avec un changement de variable et une intégration terme à terme :*

$$f(1) = \int_0^1 \frac{\ell n\, u}{1-u}\, du = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \ell n\, u\, du = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2} = \frac{-\pi^2}{6}.$$

Vous devriez pouvoir vérifier les détails sans difficulté.

3 L'expression de la dérivée montre que

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = -\infty.$$

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, on peut appliquer le Théorème des accroissements finis : pour tout réel $0 < x < 1$, il existe un réel $c_x \in]x,1[$ tel que

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(c_x).$$

L'encadrement $x < c_x < 1$ prouve que

$$\lim_{x\to 1} f'(c_x) = -\infty$$

donc le taux d'accroissement étudié ne tend pas vers une limite finie.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

✍ *On a en fait prouvé que le graphe de f avait une tangente verticale au point d'abscisse 1.*

4 En primitivant le développement limité à l'ordre 0 de g, on obtient le développement limité à l'ordre 1 de G :

$$G(x) \underset{x\to 0}{=} -x + o(x).$$

Comme x^2 tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut substituer pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de f :

$$f(x) = G(x^2) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2).$$

✍ *Le graphe de f admet donc une tangente horizontale à l'origine et est situé sous cette tangente.*

Le développement limité qu'on vient de calculer nous donne cette information au voisinage de l'origine <u>seulement</u>.

L'expression de la dérivée nous montre que f est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc $f(x) < f(0)$ pour tout $0 < x \leqslant 1$: le graphe de f est donc situé sous sa tangente à l'origine sur la totalité de l'intervalle $[0,1]$!