RMS 134 [1482]

> *On pose*
> $$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt.$$
> **1❧** *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$. *(Préciser l'expression de sa dérivée.)*
> **2❧** *Calculer le développement limité à l'ordre deux de* $f(x)$ *au voisinage de* $x=0$.

❧ Considérons la fonction g définie par

$$\forall\, t>0,\quad g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Il est clair que la fonction g est continue sur l'intervalle $I_0 =]0,+\infty[$. De plus,

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t - t^2/2 + o(t^2)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t). \qquad (\star)$$

En posant $g(0)=1$, on définit donc un prolongement de g qui est continu sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$.

D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction G définie par

$$\forall\, x\in I = \mathbb{R}_+,\quad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

est une primitive de g.

✍ *Plus précisément, la fonction* G *est* <u>*la*</u> *primitive de* g *qui tend vers* 0 *en* 0.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, le réel x^2 appartient à l'intervalle I, donc

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x) = G(x^2) - G(0) = G(x^2).$$

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2) = 2x\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2\ln(1+x^2)}{x}.$$

1❧ On connaît le développement limité à l'ordre 1 de g au voisinage de 0 $(\star)$. Comme G est une primitive de G, on en déduit que

$$G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + x - \frac{x^2}{4} + o(x^2) = x - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

(puisque $G(0)=0$).

✍ *Un développement limité n'a de sens qu'au voisinage d'un point de référence* x_0. *Il est donc absurde d'intégrer un développement limité sur un intervalle donné.*

En revanche, si on connaît le développement limité à l'ordre n *d'une fonction* g *au voisinage de* x_0 *:*

$$g(x_0+t) \underset{t\to 0}{=} a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$$

on obtient le développement limité à l'ordre $(n+1)$ *des primitives de* g *au voisinage de* x_0 *en primitivant terme à terme :*

$$G(x_0+x) \underset{x\to 0}{=} G(x_0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Puisqu'il s'agit d'un calcul de primitive, on prendra soin de tenir compte de la constante d'intégration $G(x_0)$ *!*

Lorsque x tend vers 0, le réel x^2 tend aussi vers 0, ce qui permet d'obtenir le développement limité de f par substitution.

$$f(x) = G(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

✍ *Mauvaise réponse ! C'est trop précis !*