On considère un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ *et un endomorphisme* f *de* E *tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1❧ *Soit* $x \in \operatorname{Ker}(f - I) \cap \operatorname{Im}(f - I)$. *Démontrer qu'il existe un vecteur* $y \in E$ *tel que*

$$x = f(y) - y.$$

Exprimer $f^n(y)$ *en fonction de* x, y *et* n.

2❧ *Démontrer que*

$$E = \operatorname{Ker}(f - I) \oplus \operatorname{Im}(f - I).$$

3❧ *Soit* $x \in E$. *Pour tout entier* $p \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$v_p(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} f^k(x).$$

Démontrer que la suite $\big(v_p(x)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*

✍ *L'hypothèse sur les normes signifie que l'application linéaire* f *est continue et que* $|||f||| \leqslant 1$. *On en déduit par récurrence que*

$$\forall\, u \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f^n(u)\| \leqslant \|u\|$$

et donc que $|||f^n||| \leqslant 1$.

1❧ Comme $x \in \operatorname{Im}(f - I)$, il existe bien $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.
Comme de plus $x \in \operatorname{Ker}(f - I)$, alors $f(x) = x$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad x = f^k(x) = f^k\big(f(y) - y\big) = f^{k+1}(y) - f^k(y).$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n \cdot x = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(y) - f^k(y) = f^n(y) - y$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{1}{n} \cdot \big(f^n(y) - y\big).$$

On en déduit en particulier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\| \leqslant \frac{\|f^n(y)\| + \|y\|}{n} \leqslant \frac{2\|y\|}{n}.$$

Cette propriété étant vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, on en déduit par passage à la limite que $x = 0_E$.

❧ Nous venons de montrer que les deux sous-espaces vectoriels

$$\operatorname{Ker}(f - I) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f - I)$$

sont en somme directe. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie et que f est un endomorphisme de E, on déduit du théorème du rang que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f - I) + \dim \operatorname{Im}(f - I)$$

et donc que

$$E = \operatorname{Ker}(f - I) \oplus \operatorname{Im}(f - I).$$

2❧ Soit $x \in E$. D'après la première question, il existe deux vecteurs

$$x_1 \in \operatorname{Ker}(f - I) \qquad \text{et} \qquad x_2 \in \operatorname{Im}(f - I)$$

tels que $x = x_1 + x_2$. On a donc $f(x_1) = x_1$ et il existe un vecteur $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2) - y_2$. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^k(x) = x_1 + f^k(x_2) = x_1 + f^{k+1}(y_2) - f^k(y_2).$$

Par conséquent,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \nu_p(x) = x_1 + \frac{1}{p+1} \cdot \big(f^{p+1}(y_2) - y_2\big).$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \big\|\nu_p(x) - x_1\big\| &= \frac{1}{p+1}\big\|f^{p+1}(y_2) - y_2\big\| \\ &\leqslant \frac{1}{p+1}\big(\big\|f^{p+1}(y_2)\big\| + \|y_2\|\big) \\ &\leqslant \frac{2}{p+1}\|y\|_2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{p\to+\infty} \nu_p(x) = x_1$$

où x_1 est le projeté de x sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f - I)$.

✍ *Ce qui précède est vraie pour n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie, que la norme soit associée à un produit scalaire ou pas...*

Complément

❧ On a utilisé (deux fois !) plus haut que, pour tout vecteur $x_2 \in \mathrm{Im}(f-I)$, il existait un vecteur $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2) - y_2$. Bien entendu, un tel vecteur y_2 n'est pas unique !

$$f(y_2) - y_2 = f(y_2') - y_2' \iff y_2' - y_2 \in \mathrm{Ker}(f - I)$$

Comme E est un espace euclidien,

$$E = \mathrm{Ker}(f - I) \overset{\perp}{\oplus} [\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp$$

et la projection orthogonale π_2 sur $[\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp$ est bien définie.

Si $y_2 \in E$ vérifie $f(y_2) - y_2 = x_2$, alors on pose $y_2' = \pi_2(y_2)$ et on a donc

$$y_2 = y_2' + \underbrace{[y_2 - y_2']}_{\in \mathrm{Ker}(f-I)}$$

ce qui prouve que $f(y_2') - y_2' = x_2$. Il existe donc un vecteur $y_2' \in [\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp$ tel que $x_2 = f(y_2') - y_2'$.

✍ *Après avoir analysé la situation, nous passons à la synthèse.*

❧ Considérons l'application linéaire

$$\varphi \;:\; [\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp \to \mathrm{Im}(f - I)$$

définie par

$$\forall\, y \in [\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp, \quad \varphi(y) = f(y) - y.$$

D'après l'analyse qui précède, cette application linéaire est surjective. De plus, cette application est injective :

$$y \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff y \in [\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp \cap \mathrm{Ker}(f - I) = \{0_E\}.$$

L'application φ est donc un isomorphisme de $[\mathrm{Ker}(f - I)]^\perp$ sur $\mathrm{Im}(f - I)$.

❧ Comme $[\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ est un espace vectoriel de dimension finie, sa sphère unité S est compacte (elle est fermée et bornée) et l'application linéaire φ est continue. L'application numérique $\|\varphi\|$ est donc bornée et atteint ses bornes sur S.

Comme l'application linéaire φ est injective et que le vecteur nul n'appartient pas à S, l'application φ ne s'annule pas sur S et l'application $\|\varphi\|$ ne prend que des valeurs strictement positives sur S.

Il existe donc deux réels <u>strictement</u> positifs α et β et deux vecteurs unitaires y_m et y_M de $[\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ tels que

$$\forall\, y \in S, \quad 0 < \alpha = \big\|\varphi(y_m)\big\| \leqslant \big\|\varphi(y)\big\| \leqslant \big\|\varphi(y_M)\big\| = \beta.$$

✍ *Les valeurs α et β sont respectivement le minimum et le maximum atteint par l'application*

$$\|\varphi\| \;:\; [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp \to \mathbb{R}$$

sur la sphère unité de $[\mathrm{Ker}(f-I)^\perp$.

On en déduit (par linéarité de φ et homogénéité de la norme) que

$$\forall\, y \in [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp, \quad \alpha\|y\| \leqslant \big\|\varphi(y)\big\| \leqslant \beta\|y\|$$

et donc (puisque φ est un isomorphisme) que

$$\forall\, x \in \mathrm{Im}(f-I), \quad \frac{1}{\beta}\|x\| \leqslant \big\|\varphi^{-1}(x)\big\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|.$$

❧ Notons π, la projection sur $\mathrm{Ker}(f-I)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f-I)$. On sait que $I-\pi$ est la projection sur $\mathrm{Im}(f-I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-I)$ et, comme E est un espace vectoriel de dimension finie, on sait que ces deux endomorphismes de E sont des applications linéaires continues.

On a démontré dans l'exercice que la suite d'applications linéaires $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait <u>simplement sur E</u> vers la projection π.

❧ On a démontré plus haut que

$$v_p(x) = \pi(x) + \frac{1}{p+1}\cdot(f^{p+1}-I)\big(\varphi^{-1}\circ(I-\pi)(x)\big)$$

pour tout $x \in E$. On a donc

$$v_p = \pi + \frac{1}{p+1}\cdot(f^{p+1}-I)\circ\varphi^{-1}\circ(I-\pi)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad |||v_p-\pi||| &\leqslant \frac{1}{p+1}\cdot|||f^{p+1}-I|||\;|||\varphi^{-1}|||\;|||I-\pi|||\\ &\leqslant \frac{1}{p+1}\cdot\big(|||f^{p+1}|||+|||I|||\big)\;|||\varphi^{-1}|||\;|||I-\pi|||\\ &\leqslant \frac{2}{p+1}\cdot\frac{1}{\alpha}\,|||I-\pi|||.\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lim_{p\to+\infty}|||v_p-\pi||| = 0$$

ou, autrement dit, que la suite d'applications linéaires $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge <u>uniformément sur la sphère unité de E</u> vers la projection π.