Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \,dt.$$

1❧ *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \pi/4.$$

En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est au moins égal à 1.

2❧ *Vérifier que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

En déduire un équivalent simple de I_n et déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum I_n x^n$.

3❧ *Calculer la somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

4❧ *Calculer la somme suivante.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1❧ La fonction tan est croissante sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall\, t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leqslant \tan t \leqslant 1. \tag{$\star$}$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leqslant \tan^n t \leqslant 1$$

et comme l'intégration conserve les inégalités, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}.$$

❧ Comme la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a donc

$$I_n x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x^n)$$

et comme la série géométrique $\sum x^n$ est <u>absolument</u> convergente pour tout $x \in]-1, 1[$, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum I_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est au moins égal à 1.

2❧ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité,

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 t) \tan^n t \,dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

✍ *Il faut reconnaître immédiatement la forme $u'.u^n$!*

❧ D'après $(\star)$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leqslant \tan^{n+1} t = \tan^n t. \tan t \leqslant \tan^n t$$

et donc, en intégrant,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+2} \leqslant I_{n+2} + I_n \leqslant 2I_n$$

et on déduit de la relation précédente que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)},$$

ce qui prouve que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

❧ De ce fait, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $I_n x^n$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum I_n x^n$ est grossièrement divergente.

Cela prouve que le rayon de convergence est au plus égal à 1 et finalement

$$R = 1.$$

3❧ Soit $|x| < 1$.

❧ On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0, \pi/4], \quad u_n(t) = x^n \tan^n t.$$

Chaque fonction u_n est continue sur le segment $[0, \pi/4]$ et donc intégrable sur ce segment.

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0, \pi/4], \quad \left|u_n(t)\right| \leqslant x^n.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t et comme $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ est convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/4]$.

Par conséquent, la somme de la série de fonctions est continue sur $[0, \pi/4]$ et

$$\int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n.$$

❧ Puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $x \tan t$, on connaît sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x\tan t}.$$

On change de variable :

$$u = \tan t, \qquad \frac{du}{1+u^2} = dt$$

pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)(1-xu)}.$$

Il reste à décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+u^2)(1-xu)} = \frac{a+bu}{1+u^2} + \frac{c}{1-xu}.$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant terme à terme, on trouve

$$c + a = 1, \quad b = ax, \quad c = bx = ax^2$$

donc

$$a = \frac{1}{1+x^2}, \quad b = \frac{x}{1+x^2}, \quad c = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{2u}{1+u^2} - x \cdot \frac{-x}{1-xu}\,du$$

et donc

$$\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\ln 2 - x\ln(1-x)\right).$$

$\boxed{4}$ Il est clair que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

est convergente (Critère spécial des séries alternées).

On a justifié que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2n+1} = I_{2n+2} + I_{2n}$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n I_{2n} - (-1)^{n+1} I_{2(n+1)}.$$

Comme la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, la série $\sum(-1)^n I_{2n}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Par linéarité, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} I_{2(n+1)} = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$