RMS 134 [1513]

On pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt.$$

1 *Démontrer que* F *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1, +\infty[$.

2 *Démontrer que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x)$$

et calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3 *En déduire un équivalent de* $F(x)$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

1 Pour $x \in \Omega =]-1, +\infty[$ et $t \in I =]0, \pi/2]$, on pose

$$\varphi(t, x) = \sin^x t = \exp(x \ln \sin t).$$

- **(Régularité)**
Pour tout $t \in I$, il est clair que $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω (voir l'expression exponentielle de φ) et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) = (\ln \sin t)^k \varphi(x, t).$$

- **(Intégrabilité** pour $k = 0$)
Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est continue sur l'intervalle I.
Pour $x > 0$, cette fonction tend vers 0 au voisinage de 0, donc elle est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur I.
Pour $x = 1$, cette fonction tend vers 1 au voisinage de 0 donc (même raisonnement) elle est intégrable sur I.
Pour $-1 < x < 0$,

$$\varphi(t, x) = \frac{\sin^x t}{t^x} \cdot t^x = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x \cdot t^x \underset{t \to 0}{\sim} t^x$$

donc la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est bien intégrable au voisinage de $t = 0$ et donc intégrable sur I.

- **(Intégrabilité** pour $k \geqslant 1$)

✍ *On doit savoir que* $\ln \sin t \sim \ln t$ *lorsque* t *tend vers* 0.

Pour tout $x > -1$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \underset{t \to 0}{\sim} (\ln \sin t)^k \cdot t^x \sim \ln^k t \cdot t^x$$

et donc, pour tout $-1 < y < x$,

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \underset{t \to 0}{=} o(t^y),$$

ce qui prouve l'intégrabilité sur I.

- **(Domination)**
Pour $t \in I$, le facteur $\ln \sin t$ est strictement négatif, donc la fonction $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est décroissante et positive. Par conséquent,

$$\forall\, a > -1, \ \forall\, x \in [a, +\infty[, \ \forall\, t \in I, \quad \left|\varphi(t, x)\right| \leqslant \varphi(t, a)$$

et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\forall\, a > -1, \ \forall\, x \in [a, +\infty[, \ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x)\right| \leqslant |\ln \sin t|^k \cdot \varphi(t, a).$$

On a trouvé un majorant indépendant du paramètre x et intégrable sur I.

✍ *Le majorant trouvé dépend du paramètre k, mais c'est sans importance.*

On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: quel que soit $a > -1$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \geqslant a, \quad F^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x)\, dt.$$

On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$\Omega = \bigcup_{a > -1} [a, +\infty[$$

et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > -1, \quad F^{(k)}(x) = \int_0^1 (\ell n \sin t)^k \sin^x t\, dt.$$

2❧ Soit $x \geqslant 0$. On a donc $x + 2 \geqslant 2 \geqslant 0$ et, comme x et $x + 2$ sont positifs, on peut intégrer par parties et

$$\begin{aligned}
F(x+2) &= \int_I \sin^x t . \sin^2 t\, dt \\
&= \int_I \sin^x t . (1 - \cos^2 t)\, dt \\
&= F(x) - \int_I \sin^x t . \cos t \times \cos t\, dt \\
&= F(x) - \left[\frac{\sin^{x+1} t}{x+1} \times \cos t \right]_0^{\pi/2} + \int_I \frac{\sin^{x+1} t}{x+1} \times (-\sin t)\, dt \\
&= F(x) - \frac{1}{x+1} F(x+2),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

❧ En particulier,

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)F(n+1)F(n+2) &= (n+2)F(n+1)\frac{n+1}{n+2}F(n) \\
&= (n+1)F(n)F(n+1)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite de terme général

$$(n+1)F(n)F(n+1)$$

est constante. Elle est donc égale à son premier terme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)F(n)F(n+1) = F(0)F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

3❧ Comme $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ pour tout $t \in I$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$$

donc la suite de terme général $F(n)$ est décroissante et positive. On en déduit d'une part que

$$(n+1)F(n)^2 \geqslant (n+1)F(n)F(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part que

$$nF(n)^2 \leqslant nF(n-1)F(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $F(n) \geqslant 0$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant F(n) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et donc que

$$F(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

✍ *Il reste à passer de la variable entière n à la variable réelle x. Il suffit essentiellement de savoir que*

$$x-1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil \leqslant x+1,$$

ce qui donne en particulier

$$1 \leqslant \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leqslant \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad \frac{x}{x+1} \leqslant \frac{x}{\lceil x \rceil} \leqslant 1$$

pour tout $x > 1$.

❧ La fonction F est décroissante et positive (même justification que pour la suite de terme général $F(n)$, cf ci-dessus), donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(\lceil x \rceil) \leqslant F(x) \leqslant F(\lfloor x \rfloor).$$

D'après ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, F(\lfloor x \rfloor) = \sqrt{\frac{x}{\lfloor x \rfloor}}\, \sqrt{\frac{2\lfloor x \rfloor}{\pi}}\, F(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

par produit et composition de limites. De même,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, F(\lceil x \rceil) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

et nous pouvons maintenant conclure :

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$