RMS 134 [1516]

> *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose*
> $$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$
> *Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[x \mapsto \cos^n x]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale est bien définie.

Comme $0 \leqslant \cos x < 1$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$,

$$\forall\, x \in]0, \pi/2]\,, \quad \lim_{n \to +\infty} \cos^n x = 0 \tag{1}$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0, \pi/2]\,, \quad 0 \leqslant \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x < 1 \tag{2}$$

donc, en intégrant (2),

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx \leqslant \int 0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

et, par convergence dominée [(1) et (2)],

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0.$$

On peut donc appliquer le Critère spécial des séries alternées et en conclure que la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

✍ *L'étude classique des intégrales de Wallis montre que*

$$|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

et donc que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann).

1❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0, \pi/2], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k x.$$

Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et par conséquent intégrable.

Pour $x \in]0, \pi/2]$, on reconnaît une série géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - (-\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x}$$

ce qui justifie la convergence simple vers une fonction continue :

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

mais aussi que la convergence est dominée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1 + \cos^{n+1} x}{1 + \cos x} \leqslant \frac{2}{1 + \cos x}.$$

✍ *Le majorant trouvé est indépendant du paramètre n et intégrable sur $]0, \pi/2]$ (puiqu'il admet un prolongement continu sur le segment $[0, \pi/2]$).*

On peut remarquer que la domination est vraie sur le segment $[0, \pi/2]$ puisque $f_n(0) = 1$ ou 0 selon la parité de n, mais pas la convergence simple : la suite de terme *général $f_n(0)$ est divergente. C'est sans importance pour appliquer le Théorème de convergence dominée.*

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

donc on a démontré que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

❧ Il reste à calculer l'intégrale. On pose pour cela

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

ce qui nous donne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}.$$

Après simplifications, il ne reste que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 dt = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1.$$