RMS 134 [1553]

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose que

$$u^3 = \frac{1}{3}(u^2 + u + I).$$

1❧ *Démontrer que u est un automorphisme de E.*
2❧ *Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n est une combinaison linéaire de I, u et u^2.*
3❧ *L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?*

1❧ Le polynôme

$$P_0 = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

est un polynôme annulateur de u et 0 n'est pas une racine de P_0. Donc 0 n'est pas une valeur propre de u et comme E est un espace de dimension finie, u est un automorphisme de E.

✍ *Variante : puisque P_0 est un polynôme annulateur de u,*

$$u \circ (3u^2 - u - I) = (3u^2 - u - I) \circ u = I$$

donc l'endomorphisme u est inversible, d'inverse

$$3u^2 - u - I.$$

NB : Cette variante ne suppose pas que E soit un espace vectoriel de dimension finie !

2❧ Le degré du polynôme minimal de u est inférieur à $\deg P_0 = 3$, donc

$$\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(I, u, u^2)$$

et en particulier

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u^n \in \mathrm{Vect}(I, u, u^2).$$

✍ *Il y a unicité de la décomposition de u^n si, et seulement si, la famille (I, u, u^2) est libre, c'est-à-dire si le polynôme minimal de u est le polynôme unitaire associé à P_0.*

3❧ Il est clair que 1 est une racine de P_0. On trouve alors

$$P_0 = (X-1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Le discriminant réduit de $3X^2 + 2X + 1$ est égal à -2, donc ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et P_0 est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, mais n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

On distingue donc trois cas :

— si $u = I$, alors u est diagonalisable ;

— si $u \neq I$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors le polynôme minimal μ de u est un diviseur de P_0 (à coefficients réels) et n'est pas égal à $(X-1)$, donc

$$\mu = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = (X-1)\Big(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\Big)$$

et u n'est pas diagonalisable (car μ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$) ;

— si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors le polynôme annulateur P_0 est scindé à racines simples (une racine réelle et deux racines complexes conjuguées) et u est donc diagonalisable.