RMS 134 [1396]

Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$. On suppose que $f \circ f = \omega$. Démontrer que $\operatorname{rg} f \leqslant 2$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc

$$f(y) = (f \circ f)(x) = 0_E.$$

Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et, d'après le Théorème du rang,

$$\dim E = 4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2 \dim \operatorname{Im} f,$$

donc $\operatorname{rg} g \leqslant 2$.

✍ ***Variante avec calculs élémentaires***

Nous allons démontrer que l'hypothèse $f \circ f = \omega$ implique que la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est au moins égale à 2.

❧ *Si $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, alors f est injective et $f \circ f$ est injective : c'est impossible.*

❧ *Si $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, alors il existe un vecteur $a \neq 0_E$ tel que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot a$. Si $f \circ f(x) = 0_E$, alors*

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) \in \operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot a.$$

Si $a \notin \operatorname{Im} f$, alors la relation précédente devient $f(x) = 0_E$, donc $\operatorname{Ker}(f \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$ et, comme l'inclusion réciproque est évidente, on en déduit que $\operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f$, donc $\dim \operatorname{Ker}(f \circ f) = 1$: c'est impossible.

Si au contraire $a \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $\alpha_0 \in E$ tel que $a = f(\alpha_0)$ et la propriété sur x nous donne un scalaire λ tel que

$$f(x) = \lambda a = f(\lambda \alpha_0)$$

c'est-à-dire

$$x - \lambda \alpha_0 \in \operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot a$$

et donc $x \in \operatorname{Vect}(a, \alpha_0)$. On a cette fois démontré que

$$\operatorname{Ker}(f \circ f) \subset \operatorname{Vect}(a, \alpha_0)$$

et donc que $\dim \operatorname{Ker}(f \circ f) \leqslant 2$: c'est impossible.

❧ *En définitive, la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est au moins égale à 2 et donc (Théorème du rang !) le rang de f est au plus égal à 2.*