RMS 134 [1488]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, on pose

$$g_n(t) = e^t\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n.$$

1❧ *Vérifier que*

$$\forall\,(t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*, \quad \big|g_n'(t)\big| \leqslant \frac{e^t}{n}.$$

2❧ *Démontrer que*

$$\forall\,(t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*, \quad \Big|e^{-t} - \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n\Big| \leqslant \frac{t}{n}.$$

3❧ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad G_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,dt.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(G_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

1❧ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que la fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad g_n'(t) = e^t\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^{n-1}\Big(\frac{-t}{n}\Big).$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\big|g_n'(t)\big| = \frac{te^t}{n} \cdot \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^{n-1} \leqslant \frac{1 \times e^t}{n} \times 1 = \frac{e^t}{n}. \qquad (\star)$$

2❧ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$. Comme la fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,t]$, on déduit de l'encadrement précédent et de l'inégalité des accroissements finis que

$$\big|g_n(t) - g_n(0)\big| \leqslant |t - 0| \max_{0\leqslant s\leqslant t} \big|g_n'(s)\big| \leqslant \frac{te^t}{n}.$$

En divisant par $e^t > 0$, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \Big|\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n - e^{-t}\Big| \leqslant \frac{t}{n}.$$

3❧ On déduit de l'encadrement précédent le résultat très classique :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n = e^{-t}$$

et on en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction constante 1.

Cela nous conduit à conjecturer que la suite $(G_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la fonction $[x \mapsto x]$.

Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\big|G_n(x) - x\big| = \Big|\int_0^x g_n(t) - 1\,dt\Big| &\leqslant \int_0^x \big|g_n(t) - 1\big|\,dt \\ &\leqslant \int_0^x \frac{te^t}{n}\,dt \qquad (\star) \\ &\leqslant \frac{ex}{n} \leqslant \frac{e}{n}.\end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et de limite nulle (lorsque n tend vers $+\infty$), ce qui prouve que la suite de fonctions $(G_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $[x \mapsto x]$.