RMS 134 [1489]

On considère le segment $I = [0, \pi/2]$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose*

$$\forall\, t \in I, \quad f_n(t) = n \cos^n t \sin t.$$

1❧ *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2❧ *Soit* $0 < \alpha < \pi/2$*. Démontrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $I_\alpha = [\alpha, \pi/2]$.
Cette suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur I *? On pourra considérer la suite de terme général*

$$u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt.$$

3❧ *Démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\,dt = g(0).$$

pour toute fonction g *continue sur* I.

1❧ Pour $t = 0$, il est clair que $f_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $0 < t \leqslant \pi/2$, on a $0 \leqslant \cos t < 1$ et par croissances comparées (suite géométrique *vs* puissance),

$$\sin t \cdot n \cdot (\cos t)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction identiquement nulle ω.

2❧ Pour $0 < \alpha < \pi/2$, par décroissance de la fonction cos sur I,

$$\forall\, \alpha \leqslant t \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant f_n(t) = \sin t \cdot n \cdot (\cos t)^n \leqslant 1 \times n \times \cos^n \alpha.$$

Ce majorant est indépendant de $t \in I_\alpha$ et comme $0 \leqslant \cos\alpha < 1$, il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (à nouveau par croissances comparées).

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur I_α vers la fonction ω.

❧ Toutes les fonctions f_n sont continues sur I et la fonction ω est également continue sur I. Comme I est un segment (en particulier, un intervalle borné), si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur I vers ω, alors on aurait

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \omega(t)\,dt = 0.$$

✍ *Il n'est pas utile de re-démontrer ce résultat, même si la démonstration est très simple : si* $a < b$*, alors*

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b \left| f_n(t) - f(t) \right| dt \leqslant (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = \left[\frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} = 1,$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction ω.

✍ *L'argument utilisé pour démontrer que la suite de fonctions ne convergeait pas uniformément sur* I *prouve en fait que la convergence n'est pas dominée.*

Ce qui suit établit la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un nouveau sens : on parle de convergence $*$-faible *ou de* convergence étroite *et la limite n'est plus une fonction mais la mesure de Dirac en 0, c'est-à-dire la forme linéaire ε_0 définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \quad \varepsilon_0(f) = f(0).$$

✍ *Pour alléger les notations mais surtout pour faciliter la compréhension, nous n'utiliserons pas l'expression des fonctions f_n, mais seulement les propriétés suivantes :*

— *les fonctions f_n sont positives ;*

— *les fonctions f_n sont intégrables sur $[0,1]$ et leur intégrale est égale à 1.*

On en déduit que

$$g(0) = \int_0^1 f_n(t)g(0)\,dt \tag{$\dagger$}$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f_n(t)g(t)\,dt - g(0) = \int_0^1 f_n(t)\big[g(t)-g(0)\big]\,dt. \tag{$\star$}$$

La relation ($\dagger$), sur laquelle tout repose, doit être comparée à la propriété bien connue du calcul des probabilités : toute constante a est aussi l'espérance d'une variable aléatoire presque sûrement égale à a.

$\boxed{3}$ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g est continue en $t = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,\alpha], \quad \big|g(t)-g(0)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée et par conséquent,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|g(t)-g(0)\big| \leqslant \big|g(t)\big| + \big|g(0)\big| \leqslant 2\|g\|_\infty.$$

D'après ($\star$) et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\Delta_n = \left|\int_0^1 f_n(t)g(t)\,dt - g(0)\right| &\leqslant \int_0^1 \big|f_n(t)\big[g(t)-g(0)\big]\big|\,dt \\ &\leqslant \int_0^1 f_n(t)\big|g(t)-g(0)\big|\,dt\end{aligned}$$

puisque les fonctions f_n sont positives.

Avec la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Delta_n &\leqslant \int_0^\alpha f_n(t)\big|g(t)-g(0)\big|\,dt + \int_\alpha^1 f_n(t)\big|g(t)-g(0)\big|\,dt \\ &\leqslant \int_0^\alpha f_n(t)\cdot\varepsilon\,dt + \int_\alpha^1 f_n(t)\cdot 2\|g\|_\infty\,dt \qquad \text{(positivité des } f_n\text{)} \\ &\leqslant \varepsilon\int_0^\alpha f_n(t)\,dt + 2\|g\|_\infty\cdot(1-\alpha)\sup_{t\in[\alpha,1]}\big|f_n(t)\big| \\ &\leqslant \varepsilon + 2\|g\|_\infty\cdot(1-\alpha)\sup_{t\in[\alpha,1]}\big|f_n(t)\big|\end{aligned}$$

car f_n est positive sur $[0,1]$ et son intégrale est égale à 1 (donc son intégrale sur le sous-segment $[0,\alpha]$ est inférieure à 1).

✍ *Dans la première intégrale, il est indifférent d'intégrer sur $[0,\alpha]$ ou sur $[0,1]$ puisqu'on intègre une fonction dont les valeurs sont petites.*

En revanche, dans la seconde intégrale, il est essentiel de n'intégrer que sur le sous-segment $[\alpha,1]$: c'est sur un tel intervalle, et pas sur l'intervalle $[0,1]$, que la convergence de la suite de fonctions est dominée.

Puisque la suite des fonctions f_n converge uniformément sur $[\alpha,1]$, le second terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 \leqslant 2\|g\|_\infty\cdot(1-\alpha)\sup_{t\in[\alpha,1]}\big|f_n(t)\big| \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existait un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 \leqslant \left| \int_0^1 f_n(t)g(t)\, dt - g(0) \right| \leqslant 2\varepsilon$$

et donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)\, dt = g(0).$$

✍ *On pourra rapprocher cette démonstration de la preuve du Théorème de Cesaro.*