RMS 134 [1663]

Soient $a < b$, deux nombres réels, et f, une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, telle que

$$f(a) = f(b) = 0$$

et on considère le polynôme

$$P_0 = \frac{(X-a)(X-b)}{2}.$$

1❧ *Trouver une relation simple entre les deux intégrales suivantes.*

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt$$

2❧ *En déduire que*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

1❧ Il est clair que les deux intégrales sont bien définies (fonctions continues sur un segment).

La fonction f et la fonction polynomiale associée à P_0 sont de classe $\mathscr{C}^2$, ce qui nous permet d'intégrer deux fois par parties après avoir remarqué que $P_0''(t) = 1$ pour tout $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b f(t)P_0''(t)\,dt \\
&= \big[f(t)P_0'(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)P_0'(t)\,dt \\
&= -\int_a^b f'(t)P_0'(t)\,dt && \text{(car } f(a) = f(b) = 0\text{)} \\
&= -\big[f'(t)P_0(t)\big]_a^b + \int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt \\
&= \int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt && \text{(car } P_0(a) = P_0(b) = 0\text{)}
\end{aligned}$$

2❧ La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, sa dérivée seconde f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée :

$$\forall\, t \in [a, b], \quad \big|f''(t)\big| \leqslant \|f''\|_\infty.$$

On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b \big|f''(t)P_0(t)\big|\,dt \leqslant \|f''\|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,dt.
\end{aligned}$$

✍ *On doit immédiatement se rendre compte que la fonction associée à P_0 est négative sur le segment $[a, b]$ (signe d'un trinôme entre ses racines).*

On effectue ensuite le changement de variable affine usuel pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ (cf le cours sur les fonctions convexes).

$$t = (1-u)a + ub \qquad dt = (b-a)\,du$$

On obtient ainsi

$$\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,dt = \frac{(b-a)^3}{2}\int_0^1 u(1-u)\,du = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

✍ *Il est plus efficace de changer de variable avant de développer la fonction intégrande : le facteur $(b-a)^3$ apparaît sous forme factorisée et le calcul de l'intégrale est alors immédiat.*

Complément

On vient d'effectuer le calcul qui donne l'efficacité de la méthode des trapèzes pour approcher une intégrale au moyen d'une somme de Riemann.

❧ Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$, alors il existe une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = f(a) \qquad \text{et} \qquad \varphi(b) = f(b).$$

L'existence (et l'unicité) de φ découle du théorème sur l'interpolation de Lagrange et l'expression de φ présente peu d'intérêt. En effet, comme φ est affine, son intégrale sur le segment $[a,b]$ est l'aire d'un trapèze et donc

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \times (b-a) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a).$$

❧ On peut alors appliquer ce qui précède à la fonction $g = f - \varphi$: il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^2$, on a fait ce qu'il fallait pour que $g(a) = g(b) = 0$ et de plus $g'' = f''$ (puisque la fonction φ est affine), si bien qu'on a en fait déjà démontré que

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Il reste à découper le segment $[a,b]$ au moyen d'une subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b \quad \text{avec} \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{b-a}{n}.$$

Chaque segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ étant contenu dans le segment $[a,b]$, on a

$$\sup_{t\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]} \left|f''(t)\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \left|f''(t)\right| = \|f''\|_\infty$$

et le duo habituel (relation de Chasles et inégalité triangulaire) nous donne

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big[f(\alpha_k)+f(\alpha_{k+1})\big] \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)^3}{12} \cdot \|f''\|_\infty \\ &\leqslant n \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \|f''\|_\infty = \frac{K}{n^2}.\end{aligned}$$

❧ L'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la méthode des trapèzes avec une subdivision en n sous-intervalles est donc $\mathcal{O}(1/n^2)$, c'est-à-dire un ordre de grandeur plus précise que la méthode des rectangles.

❧ C'est d'autant plus remarquable que les expressions simplifiées des deux méthodes sont très semblables !

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)$$

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(\alpha_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) + \frac{f(\alpha_n)}{2}\right]$$