RMS 134 [1499]

On note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\, x^n$$

et D*, l'ensemble des réels* x *pour lesquels la somme* $S(x)$ *est définie.*

1❧ *Identifier l'ensemble* D*. La somme* S *est-elle continue sur* D *?*

2❧ *Démontrer que la série entière*

$$\sum \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$.

3❧ *En déduire la limite de* $(1-x)S(x)$ *lorsque* x *tend vers* 1 *par valeurs inférieures.*

1❧ Lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, donc

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x}}\, x^n \sim \frac{x^n}{n^{1/2}}.$$

Par croissances comparées, le terme général de la série entière
- — tend vers 0 pour $|x| \leqslant 1$;
- — tend vers l'infini pour $|x| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1 et, d'après le cours,

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

Pour $x = 1$, l'équivalent calculé plus haut prouve que la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (comparaison avec une série de Riemann divergente).

Pour $x = -1$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{x}} x^n$ est alternée, la valeur absolue $\sin 1/\sqrt{n}$ du terme général tend vers 0 en décroissant, donc la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées.

✍ *On ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison avec une série semi-convergente, mais seulement avec une série absolument convergente.*

Dans le cas $x = -1$*, l'équivalent prouve seulement que la série n'est pas absolument convergente et il faut étudier le comportement du terme général (et non pas celui de l'équivalent trouvé) pour pouvoir conclure.*

En conclusion, $D = [-1, 1[$ et, d'après le Théorème d'Abel, la somme S est continue sur D.

✍ *D'après le cours, la somme d'une série entière est toujours continue sur l'intervalle ouvert de convergence.*

Le Théorème d'Abel nous dit que : si $R > 0$ *est le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$ *et si la série* $\sum a_n R^n$ *converge, alors la convergence est uniforme sur* $[0, R]$ *et la somme est donc continue sur* $[0, R]$.

Pour $x = -1$*, on peut donc appliquer le Théorème d'Abel avec*

$$a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad R = 1$$

ou vérifier directement que la série de fonctions converge uniformément sur $[-1, 0]$ *en exploitant le Critère spécial des séries alternées (domination du reste d'ordre* n*) : pour* $-1 \leqslant x \leqslant 0$*, la série* $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ *est alternée et la valeur absolue*

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\, |x|^n$$

du terme général tend vers 0 *en décroissant, donc*

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-1, 0], \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}(x)\right| \leqslant \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où le majorant est indépendant de x et tend vers 0.

✍ *Comme la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente de terme général positif, on peut démontrer que*

$$\lim_{x \to 1} S(x) = +\infty,$$

ce qui justifie qu'on cherche un ordre de grandeur de $S(x)$ au voisinage gauche de 1.

❧ *Considérons une série $\sum a_n$ de terme général positif, qu'on suppose divergente. Pour $A > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\sum_{n=1}^{N_0} a_n \geqslant A + 1.$$

Une fonction polynomiale étant continue, on en déduit que

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n > A$$

et donc qu'il existe un seuil $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall\, x \in [x_0, 1[, \qquad \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geqslant A.$$

Comme les a_n et x sont positifs, on en déduit que

$$\forall\, x \in [x_0, 1[, \quad S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geqslant A$$

et on a prouvé que

$$\lim_{x \to 1} S(x) = +\infty.$$

2❧ Comme $\sin' = \cos$, on déduit de l'Inégalité des accroissements finis que la fonction sin est lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n\right| &\leqslant \left|\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}.
\end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1, 1]$ et ce majorant est équivalent à $1/n^{3/2}$, c'est donc le terme général d'une série convergente.

On a ainsi démontré que la série entière convergeait normalement sur le segment $[-1, 1]$.

3❧ On déduit de la question précédente que la fonction T définie par

$$T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$$

est continue sur le segment $[-1, 1]$.

Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}x^{n+1} \\ &= \sin 1.x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n \\ &= \sin 1.x + T(x).\end{aligned}$$

Comme T est continue sur $[-1,1]$, elle admet en particulier une limite finie, égale à $T(1)$, au voisinage gauche de 1, ce qui prouve que

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (1-x)S(x) = \sin 1 + T(1).$$

✍ *Il se trouve qu'on peut calculer $T(1)$! En effet, il s'agit de la somme d'une série télescopique :*

$$T(1) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin 1 = -\sin 1.$$

On a donc en fait démontré que

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (1-x)S(x) = 0$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \overset{<}{\to} 1}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

On a bien calculé un ordre de grandeur de $S(x)$, mais pas un équivalent !