Intégrales fonction d'un paramètre

Exercice 1

Démonstration du théorème de continuité.

Exercice 2

1. La fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,dt$$
est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0.
3. Plus précisément,
$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$
lorsque x tend vers $+\infty$ et
$$F(x) = -\ell n\, x + \mathcal{O}(1)$$
lorsque x tend vers 0.

Exercice 3

La fonction F définie par
$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle.

Exercice 4

Démontrer que la fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$ et en déduire $F(x)$.

Exercice 5

La fonction définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En calculant sa dérivée, on montre que
$$\forall\, x \geqslant 0,\quad F(x) = \frac{\pi}{2}\,\ell n(1+x).$$

Exercice 6

1. La fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,dt$$
est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\forall\, x > 0,\quad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$
3. En déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 7

La fonction F définie par
$$\forall\, x \in [0,1],\quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1 - x\cos t}\,dt$$
est continue sur $[0,1]$.

Exercice 8

La fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 9

1. Démontrer l'existence de l'intégrale généralisée
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$
2. On pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}\,dt.$$
2. a. Démontrer que l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. b. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. c. Démontrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F.
2. d. Calculer $F(0)$ et déterminer la limite de F au voisinage de $+\infty$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 10

Soit $0 < \alpha \leqslant 1/2$.
1. La fonction F_α définie par
$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,dt}{t^\alpha(1+tx^2)}$$
est continue sur $\Omega =]0,+\infty[$.
2. Lorsque x tend vers $+\infty$,
$$F_\alpha(x) \sim \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}}.$$
3. Étudier la limite en 0 en distinguant le cas $\alpha = 1/2$.

Exercice 11 **132 – 1228**

On étudie

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Démontrer que F est positive et décroissante. Déterminer sa limite en $+\infty$.

3. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F(x)-F'(x)$ pour $x>0$ et en déduire que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Démontrer que

$$\forall\, x>0,\quad F(x)=e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

En déduire un équivalent de F au voisinage de 0.

Solution 1

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge vers x_0. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in I, \qquad f_n(t) = f(u_n, t).$$

D'après les hypothèses du Théorème de continuité,

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I ;

— pour tout $t \in I$, la suite de terme général $f_n(t)$ converge vers $f(x_0, t)$ (puisque f est continue par rapport à la première variable) ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$,

$$\big|f_n(t)\big| = \big|f(u_n, t)\big| \leqslant g(t)$$

où le majorant $g(t)$ est indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et intégrable en fonction de t sur l'intervalle I.

❧ On peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On en déduit que

$$\int_I f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x_0, t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = F(x_0).$$

Comme cela vaut pour *toute* suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge vers x_0, cela prouve que F est continue au point x_0 (caractérisation séquentielle de la continuité).

❧ Et comme cela vaut pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, cela prouve que la fonction F est continue sur $\mathcal{V}$ (définition de la continuité sur un intervalle).

Solution 2

1. On pose

$$f(x,t) = \frac{\cos t}{t + x}$$

afin d'étudier la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} f(x,t)\,dt.$$

Définition

Pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle et l'intégrale $F(x)$ est donc bien définie sur $]0, +\infty[$.

Monotonie

Soient $0 < x < y$. Comme $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, le numérateur $\cos t$ est positif, donc

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad f(y,t) = \frac{\cos t}{t+y} \leqslant \frac{\cos t}{t+x} = f(x,t).$$

En intégrant bornes croissantes, on en déduit que

$$F(y) \leqslant F(x).$$

On a ainsi démontré que la fonction F était décroissante sur $]0, +\infty[$.

✍ *Pour $0 \leqslant t < \pi/2$, le numérateur $\cos t$ est <u>strictement</u> positif, donc*

$$\forall\, 0 < x < y, \quad f(y,t) < f(x,t)$$

et par conséquent $F(y) < F(x)$. La fonction F est donc en fait strictement décroissante.

✍ *On pouvait aussi justifier la monotonie de F en appliquant le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, qui prouve que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donne*

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

Les bornes sont dans l'ordre croissant et la fonction intégrande est négative, donc l'intégrale $F'(x)$ est négative.

Plus précisément, la fonction intégrande est une fonction continue de t et n'est pas identiquement nulle, donc $F'(x) < 0$ (Théorème de l'intégrale nulle).

Continuité

On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega =]0, +\infty[$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

était intégrable sur $I =]0, \pi/2]$.

Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur Ω.

Enfin, la monotonie déjà justifiée précédemment prouve que, pour tout réel $a > 0$,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V} = [a, +\infty[\,, \quad \big|f(x,t)\big| = f(x,t) \leqslant f(a,t).$$

Ce majorant est indépendant de x et, en fonction de t, il est intégrable sur I (déjà justifié dans la partie **Définition**). La condition de domination est donc satisfaire sur $\mathcal{V}$.

- D'après le Théorème de continuité, la fonction F est continue sur $\mathcal{V}$.
- On en déduit que la fonction F est continue sur

$$]0, +\infty[\, = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[\,.$$

✍ *On ne peut pas vérifier la condition de domination sur $\mathcal{V} = \Omega$. En effet, s'il existe une fonction g telle que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \Omega, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t)$$

alors

$$\forall\, t \in I, \quad \frac{\cos t}{t} = \lim_{x \to 0} \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

(Ce passage à la limite cache en fait un passage au sup, puisque $f(x,t)$ est une fonction décroissante de x.)

Mais $\cos t/t$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 (cette expression est équivalente à $1/t$), donc la fonction g n'est pas intégrable non plus au voisinage de 0 (théorème de comparaison).

Bien que la fonction F soit continue sur Ω, on ne peut donc pas appliquer le Théorème de continuité sur Ω : il était vraiment nécessaire de bien choisir les sous-intervalles $\mathcal{V}$.

2. Limite à l'infini

✍ *Lorsque x tend vers $+\infty$, le dénominateur $x + t$ tend vers $+\infty$, donc il est légitime de **conjecturer** que*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{\pi/2} 0 \, dt = 0.$$

Il suffit d'adapter la démonstration précédente : on fait tendre x vers $+\infty$ (au lieu d'étudier la continuité au voisinage de $x = x_0 > 0$), on cherche donc principalement à établir la domination sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $+\infty$.

On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

était intégrable sur I (fonction continue sur un segment) ; il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

tend vers la fonction nulle sur I lorsque x tend vers $+\infty$; enfin, l'intervalle

$$\mathcal{V} = [2024, +\infty[$$

est un voisinage de $+\infty$ et

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \big|f(x,t)\big| \leqslant f(2024, t).$$

Ce majorant est indépendant de x et, on l'a déjà démontré, il est intégrable sur I en fonction de t.

D'après le Théorème de passage à la limite, la fonction F tend vers

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{\pi/2} \lim_{x \to +\infty} f(x,t)\,dt = 0.$$

Limite en 0

✍ *Lorsque x tend vers 0, le dénominateur $x+t$ tend vers t, donc il est légitime de **conjecturer** que*

$$F(x) \underset{x \to 0}{\approx} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

et comme on reconnaît l'intégrale généralisée d'une fonction positive et non intégrable, on devine alors que $F(x)$ tend vers $+\infty$.

❧ La fonction

$$g = \left[t \mapsto \frac{\cos t}{t}\right]$$

est continue et positive sur $J =]0, \pi/2]$. Par conséquent, la fonction

$$G = \left[x \mapsto \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt\right]$$

est définie et décroissante sur J. En particulier, elle admet une limite (finie ou infinie) au voisinage de 0.

Par définition, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_0^{\pi/2} g(t)\,dt$$

est convergente si, et seulement si, la limite de G en 0 est finie.

D'autre part, comme g est <u>positive</u>, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\pi/2} g(t)\,dt$$

est convergente si, et seulement si, la fonction g est intégrable sur J.

Or la fonction g n'est pas intégrable au voisinage de 0 car

$$g(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Par conséquent, la fonction G ne tend pas vers une limite finie au voisinage de 0 et comme G est décroissante, elle tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

$$\lim_{x \to 0} \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt = +\infty \tag{1}$$

❧ Fixons $0 < a < \pi/2$ et notons $K_a = [a, \pi/2]$.

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est intégrable sur K_a. Cette propriété est encore vraie pour $x = 0$, puisque la fonction considérée est continue sur le segment K_a.

On sait aussi que, pour tout $t \in K_a$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec la propriété de monotonie déjà exploitée, la propriété de domination est satisfaite :

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, t \in K_a, \quad \left|\frac{\cos t}{x+t}\right| \leqslant \frac{\cos t}{0+t}.$$

(On a remarqué plus haut que le majorant : $f(0,t)$ était une fonction continue sur le segment $K_a = [a, \pi/2]$, c'est donc une fonction intégrable sur K_a.)

Par conséquent, on peut appliquer le Théorème de continuité : la fonction

$$\left[x \mapsto \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,dt\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier

$$\forall\, 0 < a < \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt = \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt = G(a). \tag{2}$$

❧ Nous allons maintenant combiner les deux relations (1) et (2).
Soit $A > 0$.
D'après (1), l'expression $G(a)$ tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0, donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_0, \quad G(a) \geqslant A + 1. \tag{3}$$

D'après (2), il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_1, \quad \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt \geqslant G(a) - 1. \tag{4}$$

Posons donc $\alpha_2 = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$. Pour $0 < a \leqslant \alpha_2$, les deux relations (3) et (4) sont simultanément vraies, donc

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_2, \quad \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt \geqslant A.$$

Mais puisque l'intégrande est une fonction positive,

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_2, \quad F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt \geqslant \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

Bref : on a démontré que, pour tout $A > 0$, il existait un réel $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_2, \quad F(x) \geqslant A.$$

Autrement dit :

$$\lim_{x \to 0} F(x) = +\infty.$$

3. Équivalent à l'infini

✍ *Lorsque x tend vers $+\infty$, le dénominateur $x+t$ est peu différent de x (puisque t reste compris entre 0 et $\pi/2$). Par conséquent, il est légitime de* ***conjecturer*** *que*

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\approx} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x}\, dt = \frac{1}{x}.$$

Soit $x > 0$. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \frac{1}{x} \right| &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+t} \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{t \cos t}{x(x+t)}\, dt. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, le dénominateur est une fonction croissante de t. D'autre part, le numérateur est positif. Par conséquent,

$$\forall\, t \in [0, \pi/2],\ \forall\, x > 0, \quad \frac{t \cos t}{x(x+t)} \leqslant \frac{t \cos t}{x(x+0)}.$$

Le majorant est en fait une fonction de t continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc c'est une fonction intégrable et on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \left| F(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{K}{x^2} \quad \text{où} \quad K = \int_0^{\pi/2} t \cos t\, dt.$$

On en déduit que

$$F(x) - \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big),$$

c'est-à-dire

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

et en particulier
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Équivalent en 0

✍ *Je ne sais que dire : ce dernier calcul repose sur une astuce de vieux singe (ceux à qui on n'apprend pas à faire des grimaces).*

❧ Pour $t \in [0, \pi/2]$ et $x > 0$, on pose maintenant
$$g(x,t) = \frac{\cos t - 1}{t+x}.$$
Il est clair que, pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto g(x,t)]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale
$$G(x) = \int_0^{\pi/2} g(x,t)\,dt$$
est bien définie pour tout $x > 0$.

❧ Pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - 1}{t+x} + \frac{1}{t+x}\,dt \\ &= G(x) + \ell n\Big(\frac{\pi}{2} + x\Big) - \ell n\, x. \end{aligned}$$
On vient de décomposer $F(x)$ en somme de trois termes :
- le dernier terme est celui que l'on cherche, c'est un infiniment grand (positif) ;
- le second terme tend vers une limite finie lorsque x tend vers 0, c'est une quantité bornée, c'est-à-dire $\mathcal{O}(1)$;
- il reste à étudier de près le premier terme et nous allons montrer que $G(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers 0.

En anticipant sur ce qui suit, on a donc démontré que
$$F(x) \underset{x\to 0}{=} -\ell n\, x + \mathcal{O}(1) = -\ell n\, x + o(\ell n\, x) \tag{5}$$
et donc que
$$F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ell n\, x.$$

❧ D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on sait que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\cos t - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

✍ *Si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors*
$$\forall\, t \in [-a, a], \quad \big|\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0)\big| \leqslant \frac{t^2}{2}\|\varphi''\|_\infty$$
où $\|\varphi''\|_\infty = \max_{u\in[-a,a]}|\varphi''(u)|$.
Avec $\varphi = \cos$, *on a* $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ *et comme* $\varphi'' = -\cos$, *on a* $\|\varphi''\|_\infty \leqslant 1$, *quel que soit* $a > 0$.

❧ Pour tout $t \in I =]0, \pi/2]$,
$$\lim_{x\to 0} g(x,t) = \frac{\cos t - 1}{t} = \psi(t).$$
Il est clair que la fonction ψ est continue sur I et l'inégalité de Taylor-Lagrange nous montre que ψ tend vers 0 au voisinage de 0. Par conséquent, cette fonction ψ est intégrable sur I.

Enfin, quels que soient $x > 0$ et $t \in I$, d'après Taylor-Lagrange,
$$\big|g(x,t)\big| \leqslant \frac{t^2/2}{t+x} \leqslant \frac{t^2}{2t+0} = \frac{t}{2}.$$
Ce majorant est indépendant de x et évidemment intégrable sur $I =]0, \pi/2]$, donc la condition de domination est satisfaite.

Par conséquent,
$$G(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$$
et en particulier la fonction G est bornée au voisinage de 0. La propriété (5) est ainsi démontrée.

Solution 3

On considère ici $\Omega = \mathbb{R}$, $I =]-\infty, +\infty[$ et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \qquad f(x,t) = \exp\big[-(t+ix)^2\big].$$

❧ **Régularité.** Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (même de classe $\mathscr{C}^\infty$!) et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2i(t+ix)\exp\big[-(t+ix)^2\big].$$

❧ **Intégrabilité.** Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$[t \mapsto f(x,t)] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

sont continues sur l'intervalle I. De plus,

$$\big|f(x,t)\big| = e^{x^2}.|e^{2itx}|.e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t^2})$$

donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est bien intégrable sur I. De même,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(|t|.e^{-t^2}) \underset{t\to\pm\infty}{=} o(e^{-|t|})$$

donc $[t \mapsto \partial f/\partial x(x,t)]$ est aussi intégrable sur I.

❧ **Domination.** Pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}
&\forall\, x \in [-A,A],\ \forall\, t \in \mathbb{R},\\
&\qquad \big|f(x,t)\big| = e^{x^2}.e^{-t^2} \leqslant e^{A^2}.e^{-t^2}\\
&\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2\sqrt{t^2+x^2}\,e^{x^2}.e^{-t^2} \leqslant 2\sqrt{t^2+A^2}\,e^{A^2}.e^{-t^2}.
\end{aligned} \tag{$\star$}$$

On a trouvé des majorants indépendants de x et on a déjà démontré que ces majorants étaient, *en tant que fonction de* $t \in I$, des fonctions intégrables sur I.

D'après le Théorème de Leibniz **[23]**, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\bigcup_{A>0} [-A, A] =]-\infty, +\infty[$$

et

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -2i(t+ix)\exp\big[-(t+ix)^2\big]\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\\
&= \lim_{\substack{t_1\to+\infty\\ t_0\to-\infty}} \big[f(x,t)\big]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0 \qquad \text{(d'après } (\star))
\end{aligned}$$

► Puisque la dérivée de F est identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction F est constante et par conséquent **[35.3]**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = F(0) = \sqrt{\pi}$$

d'où finalement

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cdot e^{-2itx}\,dt = \sqrt{\pi}\cdot e^{-x^2}.$$

Solution 4

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose

$$f(x,t) = e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.$$

❧ Pour $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur $I =]0, +\infty[$; elle tend vers 1 lorsque t tend vers 0 (forme indéterminée bien connue) et est $\mathcal{O}(e^{-xt})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction

$$\big[t \mapsto e^{-xt}\big]$$

est intégrable sur I. Par conséquent, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I.

La fonction F est définie au moins sur $\Omega =]0, +\infty[$.

REMARQUE.— On *doit savoir* que la fonction $[t \mapsto f(0,t)]$ n'est pas intégrable sur I, bien que l'intégrale généralisée $F(0)$ soit convergente. Par ailleurs, on peut démontrer (mais ce n'est pas immédiat) que l'intégrale généralisée $F(x)$ est divergente pour tout $x < 0$.

❧ Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t.$$

Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}\sin t]$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{O}(e^{-xt})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction

$$\big[t \mapsto -e^{-xt}\sin t\big]$$

est donc intégrable sur I.

Enfin, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \in [a, +\infty[\,,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t (puisque $a > 0$).

Donc, pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, x > a, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

et par conséquent la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt.$$

❧ Pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \mathfrak{Im}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-(x+i)t}\,dt\Big) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{1}{x+i}\Big) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Comme Ω est un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = K - \operatorname{Arctan} x.$$

Les variations de la fonction *sinus cardinal* étant bien connues, on sait que

$$\forall\, x \geqslant 1,\ \forall\, t \in I, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant e^{-t}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t. La condition de domination étant satisfaite pour $x \in [1, +\infty[$ (qui est un voisinage de $+\infty$), on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(x,t)\,dt = 0.$$

Comme $\operatorname{Arctan} x$ tend vers $\pi/2$ lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit que $K = \pi/2$ et donc que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.$$

REMARQUE.— On déduit de ce qui précède que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et que} \quad F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Solution 5

L'intervalle d'intégration est $I =]0, +\infty[$ et l'intervalle d'étude de F est $]-\infty, +\infty[$. Par imparité de Arctan, il est clair que $F(0) = 0$ et que F est une fonction impaire. Il suffit donc d'étudier F sur le sous-intervalle $\Omega = [0, +\infty[$.

On considère donc la fonction f, définie sur $\Omega \times I$ par

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}.$$

❧ Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I. De plus, pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,

$$\lim_{t \to 0} f(x,t) = \frac{x}{1+t^2} \quad \text{et} \quad f(x,t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^3},$$

donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I et l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente.

❧ Comme Arctan est croissante sur Ω et que $xt \in \Omega$ pour tout $t \in I$ et tout $x \in \Omega$,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, 0 \leqslant x < y, \quad f(x,t) \leqslant f(y,t).$$

L'intégration conserve les inégalités, donc

$$\forall\, 0 \leqslant x < y, \qquad F(x) \leqslant F(y)$$

et la fonction F est croissante sur Ω.

❧ On démontrerait de manière analogue que F est concave sur Ω (en se fondant sur la concavité de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}_+$).

❧ D'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction Arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x, y \in \Omega, \qquad |\operatorname{Arctan}(xt) - \operatorname{Arctan}(yt)| \leqslant |xt - yt| = t|x-y|.$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad \big|F(x) - F(y)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} \big|f(x,t) - f(y,t)\big|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \times |x-y| = \frac{\pi}{2}\,|x-y|$$

et F est donc $\pi/2$-lipschitzienne sur Ω.

❧ Comme F est croissante sur Ω, elle tend vers une limite (finie ou infinie) au voisinage de $+\infty$.

✍ *Pour deviner le résultat, on peut conjecturer que*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x,t)\,dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Cette intégrale est divergente (la fonction intégrande n'est pas intégrable au voisinage de 0), donc on devine que F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

*Problème : **aucun** théorème du cours ne permet de justifier qu'une intégrale tend vers une limite infinie...*

Nous allons démontrer que F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

Pour cela, nous fixons un seuil $A > 0$ arbitrairement grand.

⋆ La fonction g définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \qquad g(t) = \frac{1}{t(t^2+1)}$$

est continue et POSITIVE sur I. Comme elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, mais comme elle n'est pas intégrable au voisinage de 0,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty.$$

Il existe donc un réel $\varepsilon_0 > 0$ assez petit pour que

$$\int_\varepsilon^{+\infty} g(t)\,dt \geqslant A + 1.$$

⋆ Considérons l'intervalle $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$. On sait que la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I, donc elle est aussi intégrable sur I_ε.

Comme $t \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $t \in I_\varepsilon$, il est clair que

$$\forall\, t \in I_\varepsilon, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x,t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot g(t)$$

et on a déjà remarqué que la fonction g était intégrable sur I_ε.

Par croissance de la fonction Arctan, on a aussi

$$\forall\, t \in I_\varepsilon,\ \forall\, x > 0, \qquad \left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot g(t).$$

Le majorant est indépendant du paramètre x et intégrable sur l'intervalle I_ε et le quantificateur $\forall\, x > 0$ nous dit que x varie ici dans un voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée (un de ses nombreux corollaires, en fait),

$$\lim_{x \to +\infty} \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_\varepsilon^{+\infty} g(t)\,dt \geqslant A + 1.$$

Comme la limite est strictement supérieure à A, on en déduit qu'il existe un réel x_0 tel que

$$\forall\, x \geqslant x_0, \qquad \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt \geqslant A.$$

$\star$ Comme la fonction $f(x,t) \geqslant 0$, il est clair que

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \geqslant \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$

En particulier,

$$\forall\, x \geqslant x_0, \qquad F(x) \geqslant \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt \geqslant A.$$

En résumé, nous avons démontré que : pour tout seuil $A > 0$, il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, on ait $F(x) \geqslant A$. Autrement dit : la fonction F tend vers $+\infty$.

✍ *Il se trouve qu'on peut calculer explicitement $F(x)$ — même si on est absolument incapable de calculer des primitives de $[t \mapsto f(x,t)]$! C'est ce que nous allons faire maintenant, en appliquant le Théorème de Leibniz (dérivation sous le signe $\int$).*

❧ On sait que, pour tout $x \in \Omega = [0, +\infty[$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $I =]0, +\infty[$.
Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Il est alors évident que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I : elle est continue sur I, elle tend vers une limite finie au voisinage de $t = 0$ et elle est $\mathcal{O}(1/t^4)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Par décroissance en fonction de $x \in \Omega$, la domination est satisfaite :

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{(1+0)(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

(Le majorant est indépendant du paramètre x et intégrable sur I.)

On en déduit que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

mais aussi dérivable à droite en $x = 0$ avec

$$F'_d(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

✍ *On a appliqué le Théorème de dérivation sur l'intervalle fermé $\Omega = [0, +\infty[$, mais la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur Ω), donc on n'a pas étudié la dérivabilité de F en 0, mais seulement la dérivabilité à droite en 0.*

❧ On sait que F est une fonction impaire et l'expression

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est clairement une fonction paire de x. Par symétrie, on a donc en fait démontré que F était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

❧ Pour $x \in \Omega \setminus \{1\}$, on peut décomposer facilement en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \cdot \Big(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \Big).$$

✍ *Pour $x = 1$, la fonction intégrande est déjà un élément simple. Voir plus bas pour le calcul des primitives dans ce cas.*

On en déduit alors que, pour $x \in \Omega \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{x^2-1} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{(\frac{1}{x})^2 + t^2} - \frac{1}{1+t^2}\, dt && \text{(définition des intégrales convergentes)}\\
&= \frac{1}{x^2-1} \lim_{A \to +\infty} \Big[x \operatorname{Arctan}(xt) - \operatorname{Arctan} t \Big]_0^A && \text{(Théorème fondamental)}\\
&= \frac{1}{x^2-1} \Big[\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 0 \Big] = \frac{\pi}{2(1+x)}.
\end{aligned}$$

On a démontré que F était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, il est clair que $\frac{\pi}{2(1+x)}$ est l'expression d'une fonction continue sur Ω. Par conséquent, l'égalité qui a été démontrée pour $x \in \Omega \setminus \{1\}$ est en fait vraie pour $x = 1$ aussi.

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}.$$

✍ *Comme F est impaire et dérivable, sa dérivée est paire et donc*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}.$$

✍ *Si on n'aime pas les raisonnements par densité, il faut aimer les intégrations par parties ! En effet, on peut calculer $F'(1)$ de la manière suivante (qui ne s'invente pas, il faut retenir la méthode).*

Comme

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{1+t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0,$$

la formule d'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= (0-0) - \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\, dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 2F'(1) && \text{(astuce taupinale)}
\end{aligned}$$

et on retrouve bien $F'(1) = \pi/4$.

La connaissance d'une expression simple pour $F'(x)$ nous confirme que F est $\pi/2$-lipschitzienne (en précisant que $\pi/2$ est la constante de Lipschitz optimale, puisque c'est le maximum de la dérivée) et nous donne une expression explicite de $F(x)$:

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F(x) = \frac{\pi}{2} \ell n(1+x)$$

(par calcul de primitive) et

$$\forall\, x \leqslant 0, \qquad F(x) = -\frac{\pi}{2} \ell n(1-x)$$

(par symétrie : $F(x) = -F(-x)$ par imparité).

✍ *Cette expression nous confirme que F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.*

Solution 6

1. On considère ici $\Omega = \mathbb{R}$, $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \qquad f(x,t) = \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2}.$$

❧ **Régularité.** Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (même de classe $\mathscr{C}^\infty$!) et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

❧ **Intégrabilité.** Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$[t \mapsto f(x,t)] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

sont continues sur l'intervalle I. De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\big|f(x,t)\big| = \frac{\ell n(t^2) + \ell n(x^2 + \frac{1}{t^2})}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\,\ell n\, t}{t^2} = o\Big(\frac{1}{t\sqrt{t}}\Big)$$

donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est bien intégrable sur I. De même,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \underset{t\to\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

donc $[t \mapsto \partial f/\partial x(x,t)]$ est aussi intégrable sur I.

D'autre part, il est clair que $[t \mapsto f(0,t)]$ et $[t \mapsto \partial f/\partial x(0,t)]$ sont intégrables sur I (identiquement nulles !).

❧ **Domination.** Pour tout $A > 0$,

$$\forall\, x \in [-A, A],\ \forall\, t \in I, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant \big|f(A,t)\big|$$

(on reconnaît une fonction croissante de x), donc la fonction F est continue sur chaque segment $[-A, A]$ et donc sur

$$\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A].$$

2. Quels que soient $0 < A < B$,

$$\forall\, x \in [A, B],\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2Bt^2}{(1+t^2)(1+A^2t^2)}$$

(comme d'habitude, on majore le numérateur et on minore le dénominateur) et il est clair que le majorant, indépendant de x, est intégrable sur I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{0<A<B} [A, B]$$

et

$$\forall\, x > 0, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt.$$

Par symétrie (puisque la fonction F est évidemment paire), la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

❧ **Calcul de** $F'(x)$**.**

Pour $x > 0$ différent de 1, on décompose en éléments simples pour calculer l'intégrale qui exprime $F'(x)$. Comme

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \Big(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2}\Big),$$

on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\Big) = \frac{\pi}{1+x}.$$

Or F' est continue sur $]0,+\infty[$, de même que $\left[x \mapsto \frac{\pi}{1+x}\right]$, et ces deux fonctions sont égales sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, donc ces deux fonctions sont égales sur $]0,+\infty[$. On a donc

$$\forall\, x > 0, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

3. ❧ **Calcul de** $F(x)$**.** Il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \pi\,\ell n(1+x) + K.$$

Or F est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$F(0) = 0 = \lim_{x\to 0} F(x) = K$$

et

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F(x) = \pi\,\ell n(1+x).$$

Par parité,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \pi\,\ell n(1+|x|).$$

En particulier, $F(x) \sim \pi|x|$ au voisinage de $x = 0$: le graphe de F présente donc deux demi-tangentes obliques à l'origine ($y = \pm\pi x$), ce qui prouve que F n'est pas dérivable en $x = 0$.

Solution 7

On pose ici $\Omega = [0,1]$ (défini par l'énoncé !) et $I =]0,\pi]$ (ouvert en 0 pour des raisons qu'on verra en temps voulu). On considère la fonction f définie par

$$f(x,t) = \frac{t\sin t}{1 - x\cos t}.$$

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert I et même sur le segment $[0,\pi]$ pour $x > 0$. Pour $x = 1$, $f(1,0)$ n'est pas défini (division par zéro !) mais lorsque t tend vers 0,

$$f(1,t) = \frac{t\sin t}{1-\cos t} \sim \frac{t^2}{t^2/2} \xrightarrow[t\to 0]{} 2.$$

Puisque la fonction $[t \mapsto f(1,t)]$ tend vers une limite finie au voisinage de 0, elle est intégrable au voisinage de 0 et donc sur I.

La fonction F est donc définie sur le segment Ω.

❧ Pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur Ω. (Comme l'intervalle I est ouvert en 0, le $\cos t$ est toujours strictement inférieur à 1 et le dénominateur ne s'annule jamais.)

❧ Pour justifier la continuité de F, il reste à établir la propriété de domination et pour majorer $\left|f(x,t)\right|$, on va étudier précisément le sens de variation en fonction de x.

▶ Pour $t \in]0,\pi/2]$, on a $\cos t \geqslant 0$, donc la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est croissante et donc

$$\forall\, 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2},\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(1,t).$$

▶ Pour $t \in]\pi/2,\pi]$, on a $\cos t \leqslant 0$, donc la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est décroissante et donc

$$\forall\, \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi,\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(0,t).$$

▶ Comme $f(x,t) \geqslant 0$ quels que soient x et t, on déduit des deux encadrements précédents que

$$\forall\, 0 < t \leqslant \pi,\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(0,t) + f(1,t).$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que somme de deux fonctions intégrables sur I : la propriété de domination est ainsi établie.

Par conséquent, la fonction F est bien continue sur le segment $\Omega = [0,1]$.

Solution 8

L'énoncé impose de prendre $\Omega =]0, +\infty[$. Les bornes de l'intégrale sont 0 et $+\infty$ et, comme nous le verrons, rien ne s'oppose à ce que nous choisissions $I = [0, +\infty[$.

On considère alors

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \quad f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

► Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$ (alias *Théorème de Leibniz*) en vérifiant les trois conditions d'application.

❧ **Régularité.** Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction

$$\left[x \mapsto f(x,t) = Ae^{-Bt}\right]$$

est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = A.(-B)^n.e^{-Bt}.$$

❧ **Intégrabilité.** Pour tout $x \in \Omega$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}\right]$$

est continue sur I.

✍ *Par convention, la dérivée partielle $\partial^0 f/\partial x^0$ est en fait la fonction f elle-même.*

De plus, lorsque t tend vers $+\infty$, comme $x > 0$,

$$\frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt} = \frac{(-t)^n e^{-xt/2}}{1+t^2} \cdot e^{-xt/2} = o(e^{-xt/2})$$

donc les fonctions

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right]$$

sont bien toutes intégrables sur I.

✍ *Il s'agit ici de prouver qu'un produit est intégrable. La première écriture ne permet pas de conclure, puisqu'elle fait apparaître le produit d'une fonction intégrable (e^{-xt}) par une fonction qui n'est pas bornée. Une astuce classique sur l'exponentielle nous permet de réécrire cette expression comme le produit d'une fonction intégrable ($e^{-xt/2}$) par une fonction bornée (car de limite nulle) : on sait qu'un tel produit est intégrable.*

❧ **Domination.** Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. Comme les expressions

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| = \frac{t^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}$$

sont visiblement des fonctions *décroissantes* de x, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\,(x,t) \in \mathcal{V} \times I, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)\right|.$$

Le majorant est visiblement indépendant de $x \in \mathcal{V}$. D'autre part, on a déjà démontré que ce majorant était intégrable sur I.

✍ *On rappelle la méthode pour établir la propriété de domination.*

- *On cherche d'abord un majorant indépendant du paramètre x. Pour cela, il est intéressant de connaître le sens de variation des expressions concernées en fonction de la variable x (s'il s'agit, comme ici, de fonctions monotones de x, alors il est facile de trouver un majorant. Ce majorant sera même le meilleur possible : ce sera la borne supérieure !*
- *On cherche ensuite à vérifier si le majorant trouvé est bien intégrable sur I. S'il arrivait que ce ne soit pas le cas, il suffirait probablement de mieux choisir le sous-intervalle $\mathcal{V}$.*

► D'après le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}\, dt.$$

Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}\, dt.$$

Solution 9

1. La fonction $\psi = [t \mapsto e^{-t}/t]$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

✍ *Par conséquent, d'après le cours, la fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.*

❧ Lorsque t tend vers 0, il est clair que $\psi(t) \sim 1/\sqrt{t}$ et (critère de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$) la fonction $[t \mapsto 1/\sqrt{t}]$ est intégrable au voisinage de 0. Donc la fonction ψ est intégrable au voisinage de 0.
❧ Lorsque t tend vers $+\infty$, il est clair que $\psi(t) = o(e^{-t})$ et la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence). Donc la fonction ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
❧ Ainsi, la fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et, en particulier, l'intégrale généralisée I est convergente.

✍ *Il s'agit d'une question de cours, puisque $I = \Gamma(1/2)$.*

2. a. Pour tout $x \in \Omega = \mathbb{R}_+$ et tout $t \in J =]0, +\infty[$, on pose

$$f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert J. De plus,

$$f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}} \qquad \text{et} \qquad f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big).$$

Or (critère de Riemann) la fonction $\big[t \mapsto 1/t^{1/2}\big]$ est intégrable au voisinage de 0 (puisque $1/2 < 1$) et la fonction $\big[t \mapsto 1/t^{3/2}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (puisque $3/2 > 1$), donc la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur J et par conséquent l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente.
2. b. Nous allons appliquer le Théorème de continuité.
❧ **Intégrabilité**
On a démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur J.
❧ **Régularité**
Il est clair que, pour tout $t \in J$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur Ω (de la forme Ae^{-Bx}).
❧ **Domination**
L'expression $f(x,t)$ est positive et décroît en tant que fonction de x. Par conséquent,

$$\forall\, t \in J,\ \forall\, x \in \Omega, \qquad \big|f(x,t)\big| \leqslant f(0,t).$$

On a ici un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et on a déjà démontré que ce majorant était intégrable sur J.
❧ Par conséquent, la fonction F est continue sur Ω.
2. c. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sur le sous-intervalle $\Omega_a = [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui permettra de conclure sur $\Omega^* =]0, +\infty[$.
❧ **Intégrabilité**
On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega^*$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ était intégrable sur J.
❧ **Régularité**
Il est clair que, pour tout $t \in J$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω^* et

$$\forall\, (x,t) \in \Omega^* \times J, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{(1+t)}.$$

❧ **Intégrabilité (bis)**
Il est clair que, pour tout $x \in \Omega^*$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{(1+t)}\right]$$

est continue sur l'intervalle <u>fermé</u> $J_0 = [0, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $x \in \Omega^*$,

$$\frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{(1+t)} = \frac{\sqrt{t}}{1+t} \cdot e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-xt})$$

et comme $x > 0$, on sait que $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, pour tout $x \in \Omega^*$, la fonction considérée est intégrable sur l'intervalle J_0 et a fortiori, la fonction $[t \mapsto \partial f/\partial x(x,t)]$ est intégrable sur le sous-intervalle J.

❧ **Domination**
Pour $a > 0$, il est clair que

$$\forall\, t \in J,\ \forall\, x \in \Omega_a, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\right|$$

(par monotonie en fonction de x). On a un majorant indépendant de $x \in \Omega_a$ et ce majorant est intégrable (déjà vérifié !).

❧ Par conséquent, on peut appliquer le Théorème de dérivation sur le sous-intervalle Ω_a pour tout $a > 0$. On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}e^{-tx}}{1+t}\,dt$$

sur l'intervalle

$$\Omega^* = \bigcup_{a>0} \Omega_a.$$

❧ Pour tout $x > 0$, on a donc

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-tx}}{t(1+t)}\,dt \quad \text{et} \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}\,e^{-tx}}{(1+t)}\,dt.$$

✍ *C'est le moment de penser "décomposition en éléments simples" !*

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

On en déduit que

$$F(x) = F'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt$$

et le changement de variable affine $u = xt$ nous donne alors

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) - F'(x) = \frac{I}{\sqrt{x}}. \tag{E}$$

2. d. On calcule $F(0)$ avec le changement de variable usuel $t = x^2$.

$$F(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

❧ On détermine la limite de F au voisinage de $+\infty$ par convergence dominée.
Avec les notations précédentes, on sait déjà que :
⋆ pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur J ;
⋆ l'expression $|f(x,t)|$ est dominée pour $x \in \Omega$ et $t \in J$, où Ω est un voisinage de $+\infty$;
et il est par ailleurs clair que
⋆ pour tout $t \in J$, l'expression $f(x,t)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Par conséquent, la fonction F tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0.$$

3. On a démontré que F était une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad y'(x) - y(x) = \frac{-I}{\sqrt{x}}.$$

On sait résoudre cette équation différentielle : il existe donc une constante K telle que

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \left(K - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\right)e^x.$$

✍ *La solution générale de l'équation homogène est de la forme Ke^x. On obtient une solution particulière de l'équation complète en faisant varier la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution de la forme $K(x)e^x$ en supposant que K est de classe $\mathscr{C}^1$. On conclut par superposition.*

❧ On a calculé $F(0)$ et démontré que la fonction F était continue sur $[0, +\infty[$, donc

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = \pi.$$

On a également démontré (dès la première question) que la fonction ψ était intégrable au voisinage de 0. Par conséquent (reste d'une intégrale convergente),

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = 0.$$

On déduit alors de l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ que

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = K = \pi.$$

❧ On a en fait démontré que la fonction ψ était intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit alors de la relation de Chasles que

$$\int_0^x \psi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt - \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt = I - \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt$$

et donc que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \left(K - I^2 + \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt\right)e^x = (K - I^2)e^x + e^x \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt.$$

❧ On sait que ψ est continue sur l'intervalle J et il est clair que $\psi(t) = o(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Or la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$, donc

$$\int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)$$

(intégration des relations de comparaison, cas intégrable).

On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0$$

et comme on sait que $F(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} (K - I^2)e^x = 0.$$

Il n'y a qu'une seule possibilité : $I^2 = K$ et donc

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{K} = \sqrt{\pi}.$$

✍ *On a démontré que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ en cours, d'une manière assez similaire.*

Solution 10

1. On commence par justifier que $F_\alpha(x)$ est bien définie sur Ω et on étudiera la continuité de F_α ensuite.

❧ On pose $I = [1, +\infty[$ et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert I.

De plus, pour tout $x \in \Omega$,

$$f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{xt^{1+\alpha}}.$$

Comme $\alpha > 0$, on a bien $1+\alpha > 1$, ce qui prouve que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison avec une fonction de Riemann). Par conséquent, $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I, quel que soit $x \in \Omega$.

La fonction F_α est bien définie sur Ω.

❧ Nous allons maintenant appliquer le Théorème de continuité.

Nous venons de vérifier que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$.

Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur Ω.

✍ *Comme $t > 0$, en tant que fonction de x, il s'agit d'une fonction rationnelle qui n'a pas de pôle réel.*

Soient $0 < a < b$ et $V_{a,b} = [a, b]$. Il est clair que

$$\forall\,x \in V_{a,b},\ \forall\,t \in I, \qquad \big|f(x,t)\big| \leqslant \frac{b}{t^\alpha(1+a^2t)}.$$

✍ *En substituant le segment $V_{a,b}$ à l'intervalle ouvert Ω, on peut très facilement majorer le numérateur et minorer le dénominateur (qui sont tous les deux des fonctions décroissantes de x).*

On obtient ainsi un majorant indépendant de $x \in V_{a,b}$ et, en tant que fonction de $t \in I$, ce majorant est intégrable sur I (pour les mêmes raisons que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I).

Comme $\Omega = \cup_{0<a<b} V_{a,b}$, chaque point $x_0 \in \Omega$ admet un voisinage de la forme $V_{a,b}$, donc la fonction F_α est continue en chaque point $x_0 \in \Omega$ et par conséquent elle est continue sur Ω.

2. ✍ *Le Théorème de convergence dominée nous permet de calculer la limite d'une intégrale lorsque le paramètre x tend vers $+\infty$.*

Pour obtenir un équivalent comme ici, il faut interpréter l'équivalent comme une limite — autrement dit, revenir à la définition de l'équivalent !

Pour étudier la limite de $xF_\alpha(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on considère la fonction g définie par

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \qquad g(x,t) = \frac{x^2}{1+tx^2} \cdot \frac{1}{t^\alpha} = xf(x,t).$$

❧ **Intégrabilité**

Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I, donc la fonction $[t \mapsto g(x,t) = xf(x,t)]$ est intégrable sur I.

❧ **Limite pour $x \to +\infty$**

Pour tout $t \in I$, il est clair que $g(x,t)$ tend vers $\varphi(t) = {}^1/_{t^{1+\alpha}}$ lorsque x tend vers $+\infty$. La fonction φ ainsi définie est évidemment intégrable sur $I = [1, +\infty[$ (puisque $1+\alpha > 1$).

❧ **Domination**

Pour tout $t \in I$ et tout $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant g(x,t) \leqslant \frac{x^2}{0+tx^2} \cdot \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{1+\alpha}} = \varphi(t).$$

✍ *Une fois de plus, on a majoré un quotient en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur.* On a ainsi obtenu un majorant indépendant de $x \in [1, +\infty[$ et intégrable sur I en fonction de t. Autrement dit, on a établi la domination sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$.

D'après l'extension du Théorème de continuité, le produit

$$xF_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} g(x,t)\,dt$$

tend vers
$$\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}.$$
Autrement dit,
$$F_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha x}.$$

3. ✍ *Autant on pouvait deviner l'équivalent précédent en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'intégrale :*
$$\forall\, t \in I, \quad \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{t^\alpha \cdot tx^2} = \frac{1}{x \cdot t^{1+\alpha}},$$
autant la situation est embrouillée lorsque x tend vers 0 : le numérateur est infiniment petit et le dénominateur évoque une fonction non intégrable et donc une intégrale infiniment grande...

❧ **Cas $\alpha = 1/2$**
Pour $\alpha = 1/2$, un changement de variable classique apparaît :
$$F_{1/2}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,dt}{\sqrt{t}(1+x^2t)} = 2\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$
Pour aller directement au résultat, on pose en fait $u = x\sqrt{t}$, ce qui nous donne
$$du = x\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}, \qquad \text{d'où} \qquad F_{1/2}(x) = 2\int_x^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\Big).$$
Par conséquent, $F_{1/2}(x)$ tend vers π lorsque x tend vers 0.

❧ **Cas $0 < \alpha < 1/2$**
On commence par changer de variable pour y voir plus clair : avec $u = xt$ et donc $du = x\,dt$, on obtient
$$F_\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{du}{(u/x)^\alpha(1+xu)} = x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+xu)}.$$

✍ *Je peux seulement justifier la suite du calcul en indiquant : j'ai tenté, ça a marché...*
❧ *J'ai conjecturé (selon l'énoncé) que $F_\alpha(x)$ tendait vers $+\infty$, ce qui demandait de minorer $F_\alpha(x)$. Rien de plus facile que de minorer l'intégrale d'une fonction positive : il suffit de réduire l'intervalle d'intégration !*
❧ *Pour minorer un quotient (de réels strictement positifs...), on minore le numérateur et on majore le dénominateur.*

Nous allons faire tendre x vers 0, donc nous pouvons supposer que $0 < x < 1$.
Comme $F_\alpha(x)$ est l'intégrale d'une fonction *positive*,
$$F_\alpha(x) \geqslant x^\alpha \int_x^{1/x} \frac{du}{u^\alpha(1+xu)}.$$
Avec $0 < x < 1$, on intègre avec $x \leqslant u \leqslant 1/x$, donc $0 < 1 + x^2 \leqslant 1 + xu \leqslant 2$ et par conséquent,
$$F_\alpha(x) \geqslant x^\alpha \int_x^{1/x} \frac{du}{2u^\alpha} = \frac{x^{2\alpha-1} - x}{2(1-\alpha)}.$$
Comme $0 < \alpha < 1/2$, le dénominateur est strictement positif et l'exposant $2\alpha - 1$ est strictement négatif. Par conséquent, on a minoré $F_\alpha(x)$ par une quantité qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. On a ainsi démontré que $F_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 pour tout $0 < \alpha < 1/2$.

Solution 11

1. Posons $I = [0, +\infty[$ et $\Omega =]0, +\infty[$, ainsi que
$$\forall\,(t,x) \in I \times \Omega, \quad \varphi(t,x) = \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

❧ Soit $x \in \Omega$ (fixé). Il est clair que la fonction
$$[t \mapsto \varphi(t,x)]$$

est continue sur l'intervalle I. Il est clair que

$$\varphi(t,x) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-xt})$$

et comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable sur I.

Par conséquent, la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur I et la fonction F est donc bien définie sur Ω.

2. Soient $0 < x < y$. Pour tout $t \in I$, il est clair que $t \geqslant 0$ et donc que

$$0 \leqslant \frac{e^{-yt}}{1+t} \leqslant \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

En intégrant bornes croissantes (pour $t \in I$), on en déduit que

$$0 \leqslant F(y) \leqslant F(x),$$

ce qui prouve que F est positive et décroissante sur Ω.

❧ En particulier, la fonction F tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$. Il reste à déterminer la valeur de cette limite (positive).

Il est clair que

$$\forall\,(t,x) \in I \times \Omega, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{1+t} \leqslant e^{-xt}$$

et comme $x > 0$, on en déduit par intégration bornes croissantes que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ ***Variante***

On sait que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur I.

Il est clair que, pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(t,x) = 0.$$

(C'est faux pour $t = 0$, mais c'est sans importance.)

Enfin, il est tout aussi clair que

$$\forall\, x \geqslant 1,\ \forall\, t \in]0,+\infty[, \quad \left|\varphi(t,x)\right| \leqslant e^{-t}$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t : la condition de domination est donc vérifiée pour $x \in [1,+\infty[$, c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \varphi(t,x)\,dt = 0.$$

3. **Régularité** — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(t,x)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) = \frac{-te^{-xt}}{1+t}.$$

Intégrabilité — On a justifié plus haut que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur I.

De même, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)\right]$$

est continue sur I et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt}.$$

Comme $x > 0$, on en déduit que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)\right]$$

est intégrable sur I.

Domination — Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a,+\infty[$. Alors

$$\forall\,(t,x) \in I \times \mathcal{V}, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t, donc la condition de domination est satisfaite.

D'après le Théorème de Leibniz sur les intégrales fonctions d'un paramètre, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ pour tout $a > 0$ (et donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω) et

$$\forall\, a > 0,\ \forall\, x > a, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t}\, dt.$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$$

et donc que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}.$$

On a démontré que la fonction F était de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

❧ HR : Supposons que F soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω. La relation précédente nous dit alors que F' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω et donc que F est en fait de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur Ω.

On a ainsi démontré par récurrence que F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω pour tout $n \geqslant 1$ et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

4. Commençons par remarquer que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)+x}}{1+t}\, dt = e^x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{1+t}\, dt.$$

Posons alors $u = x(1+t)$ (changement de variable affine avec $du = x\, dt$, licite car $x > 0$). On a donc

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dt}{1+t}$$

(si tant est qu'une telle égalité ait vraiment un sens mathématique !) et on en déduit que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

✍ *Cette nouvelle expression de $F(x)$ permet de prouver que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω en appliquant le Théorème fondamental seulement (sans avoir à justifier l'application du Théorème de dérivation comme on l'a fait plus haut).*

❧ Il est clair que

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{u}$$

et que la fonction $[u \mapsto {}^1\!/_u]$ est positive et **non** intégrable au voisinage de 0. D'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\, du \underset{x \to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{u}\, du = -\ell n\, x.$$

✍ *On aura remarqué qu'il s'agit ici d'infiniment grands.*

D'après la relation de Chasles, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\, du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du}_{\text{Cte}}$$

et d'après l'équivalent précédent,

$$F(x) = \underbrace{e^x}_{\sim 1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \underset{x \to 0}{\sim} -\ell n\, x.$$

❧ En particulier, la fonction F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.