# Endomorphisme nilpotent [rms135-505]

*Soit $f$, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = \omega$. On suppose que $F$ est un plan vectoriel stable par $f$. Démontrer que* $\operatorname{Im} f \subset F$.

Comme $f^2$ est l'endomorphisme nul, l'image de $f$ est contenue dans son noyau :

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et en particulier} \quad \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f.$$

Comme $f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Par conséquent, $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 1$.
❧ Si $\dim \operatorname{Im} f = 0$, alors $\operatorname{Im} f = \{0\} \subset F$.
❧ Supposons donc que $\dim \operatorname{Im} f = 1$. D'après le Théorème du rang, le noyau de $f$ est un plan et on considère un plan $F$ stable par $f$ :

$$\forall\, x \in F, \qquad f(x) \in F.$$

Deux cas se présentent :

- S'il existe un vecteur $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0)$ est un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} f$ et comme $f(x_0) \in F$ et que $F$ est un sous-espace,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \cdot f(x_0) \subset F.$$

- Sinon, $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$, donc $F \subset \operatorname{Ker} f$ et comme ces deux sous-espaces sont des plans, on a donc $F = \operatorname{Ker} f$ et finalement

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f = F.$$

On a démontré que, dans tous les cas, l'image de $f$ était contenue dans le plan stable $F$.