> *Dans l'anneau $A = \mathbb{Z}$ ou dans l'anneau $A = \mathbb{K}[X]$, on considère des éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux premiers entre eux.*
> *On pose $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ et*
> $$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad y_k = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} x_i$$
> *de telle sorte que*
> $$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x = x_k y_k \quad \text{et} \quad x_k \wedge y_k = 1.$$
> *Alors les éléments $y_1, \dots, y_n$ sont premiers dans leur ensemble : il existe des éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$ de A tels que*
> $$\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = 1.$$

On procède par récurrence sur n.

- **Initialisation pour $n = 2$**
  Si x_1 et x_2 sont premiers entre eux, alors $y_1 = x_2$ et $y_2 = x_1$ sont premiers entre eux.
- **Hérédité**
  On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 2$, si les éléments $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux premiers entre eux, alors les éléments $y_1, \dots, y_n$ sont premiers dans leur ensemble.

On considère alors un élément x_{n+1} tels que $x_1, x_2, \dots, x_n$ et x_{n+1} soient deux à deux premiers entre eux et on pose

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \overline{y_k} = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ i \neq k}} x_i = y_k \cdot x_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \overline{y_{n+1}} = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ i \neq n+1}} x_i = x.$$

Par hypothèse, x_{n+1} est premier à x_k pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, donc x_{n+1} est premier à leur produit :

$$x_{n+1} \wedge \overline{y_{n+1}} = 1.$$

Il existe donc deux éléments a_{n+1} et b_{n+1} de A tels que

$$b_{n+1} x_{n+1} + a_{n+1} \overline{y_{n+1}} = 1.$$

Par hypothèse de récurrence, les éléments $y_1, \dots, y_n$ sont premiers dans leur ensemble et, d'après le Théorème de Bézout, il existe deux éléments $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = 1.$$

On en déduit que

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k y_k \right) b_{n+1} x_{n+1} + a_{n+1} \overline{y_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} \overline{y_k} + a_{n+1} \overline{y_{n+1}}$$

et donc (réciproque du Théorème de Bézout) que les éléments $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}, \overline{y_{n+1}}$ sont premiers dans leur ensemble.

✍ *Ce Théorème sert d'une part à démontrer le Lemme chinois des restes (dont la mise en œuvre pratique repose, comme cette démonstration, sur la relation de Bézout) et d'autre part à démontrer le Théorème de décomposition des noyaux.*