RMS - VOLUME 130

> **1.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Caractériser et dénombrer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.*
> **2.** *Soient $x \in \mathbb{Z}$, un entier relatif impair, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux algorithmes de calcul de l'inverse de x modulo 2^n :*
> — *en utilisant la suite de terme général x^{2^k} dans $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$;*
> — *en résolvant successivement l'équation $y_k x \equiv 1 \pmod{2^k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.*

1. La classe de l'entier x est inversible modulo $N = 2^n$ si, et seulement si, x est premier à N, c'est-à-dire si x est premier à 2 (car 2 est le seul diviseur premier de 2^n), autrement dit si x est impair.

Par conséquent, $x \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ est inversible si, et seulement si, il existe un entier $0 \leqslant k < 2^{n-1}$ tel que

$$x = \mathscr{C}(2k+1)$$

et le cardinal de $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ est donc égal à 2^{n-1} (= le nombre d'entiers impairs compris entre 0 et $2^n - 1$).

✍ *On retrouve ainsi une valeur de la **fonction indicatrice d'Euler**.*

2. L'ensemble $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ est un groupe multiplicatif d'ordre 2^{n-1} et par conséquent

$$\forall\, x \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times, \quad x^{2^{n-1}} = \mathscr{C}(1)$$

(puisque l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe).

Cela signifie que l'ordre de x est un diviseur de 2^{n-1} et donc que c'est un entier de la forme 2^k.

Plus précisément, l'ordre de x est le plus petit entier $\ell \geqslant 1$ tel que $x^\ell = \mathscr{C}(1)$, donc c'est le plus petit entier de la forme 2^k tel que $x^{2^k} = \mathscr{C}(1)$.

On va donc calculer successivement les entiers 2^k et les résidus $p_k = x^{2^k} \pmod{2^n}$ jusqu'à ce qu'on trouve $p_k = 1 \pmod{2^n}$.

```python
def ordre(x, N):
    """
    Calcule l'ordre de x modulo N=2^n
    """
    p, k, o = x, 0, 1
    while (p!=1):
        p = (p*p)%N
        k += 1
        o *= 2
    return o
```

En calculant ainsi l'ordre de x, on aboutit à

$$x^{2^k-1} \otimes x = x^{2^k} = \mathscr{C}(1)$$

ce qui prouve que l'inverse de x est égal à (somme géométrique)

$$x^{2^k-1} = x^{1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}} = x^1 \otimes x^2 \otimes \cdots \otimes x^{2^{k-1}}.$$

En modifiant légèrement l'algorithme précédent, on peut ainsi calculer l'inverse de x.

```python
def inverse(x, N):
    """
    Calcule l'inverse de x modulo N=2^n
    """
    puissance, inverse = x, 1
    while (puissance!=1):
        inverse = (inverse*puissance)%N
        puissance = (puissance*puissance)%N
    return inverse
```

Variante — Pour calculer l'inverse de $x \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$, on va résoudre l'équation

$$xy_n = 1 \pmod{2^n}$$

en résolvant successivement les équations

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad xy_k = 2 \pmod{2^k}.$$

❧ On a vu que x, étant inversible modulo 2^n, est la classe d'un entier impair. Par conséquent, x est aussi inversible modulo 2^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et chacune de ces équations admet une solution (et une seule modulo 2^k).

❧ Comme l'élément étudié x est (la classe d')un entier impair, on a

$$x = 1 \pmod 2$$

et par conséquent $y_0 = 1$ convient.

Supposons avoir trouvé un entier $0 \leqslant y_k < 2^k$ tel que

$$xy_k = 1 \pmod{2^k}.$$

On cherche maintenant un entier $0 \leqslant y_{k+1} < 2^{k+1}$ tel que $xy_{k+1} = 1 \pmod{2^{k+1}}$: pour un tel entier q_{k+1}, il existe un entier q_{k+1} tel que

$$xy_{k+1} = 1 + q_{k+1}2^{k+1} = 1 + (2q_{k+1})2^k$$

donc

$$xy_{k+1} = 1 \pmod{2^k}$$

et par différence

$$x(y_{k+1} - y_k) = 0 \pmod{2^k}.$$

On a vu que x était inversible modulo 2^k, donc

$$y_{k+1} = y_k \pmod{2^k}$$

et comme $0 \leqslant y_k < 2^k$ et $0 \leqslant y_{k+1} < 2^{k+1}$, on en déduit qu'il n'y a que deux possibilités : ou bien $y_{k+1} = y_k$, ou bien $y_{k+1} = y_k + 2^k$. Il ne reste qu'à savoir choisir entre ces deux possibilités.

À chaque itération, on calcule $m_k = 2^{k+1}$ et $p_k = 2^k$. Si $x.y_k \neq 1 \pmod{m_k}$, alors on sait que $x.(y_k + p_k) = 1 \pmod{m_k}$ et on pose alors $y_{k+1} = y_k + p_k$.

L'itération cesse lorsque $m_k = N$, c'est-à-dire pour $k+1 = n$, et la valeur retournée est bien égale à y_n, soit l'inverse de x modulo $2^n = N$.

```
def inverse(x, N):
    """
    Calcule l'inverse de x modulo N=2^n
    """
    y, puissance = 1, 2
    while (puissance<N):
        module = 2*puissance
        if ((x*y)%module != 1):
            y += puissance
        puissance = module
        print(y)
    return y
```

✍ *Cet algorithme revient à décomposer l'inverse de x en base 2 (puisqu'on le décompose en une somme de puissances de 2).*

rms130-468

> **1.** *Soit φ, un isomorphisme du groupe G sur le groupe H. Démontrer que x est un générateur de G si, et seulement si, $\varphi(x)$ est un générateur de H.*
> **2.** *Démontrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est lui-même monogène.*

1. Si x est un générateur de G, alors

$$G = \{x^k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme φ est un morphisme, alors

$$\varphi_*(G) = \{\varphi(x^k),\ k \in \mathbb{Z}\} = \{[\varphi(x)]^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et comme φ est surjectif, alors

$$H = \varphi_*(G) = \{[\varphi(x)]^k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Donc H est engendré par $\varphi(x)$.
❧ Réciproquement, si H est engendré par $\varphi(x)$, alors

$$H = \{[\varphi(x)]^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \underset{\text{morph.}}{=} \{\varphi(x^k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit $g \in G$. Alors $h = \varphi(g) \in H$ et la description précédente de H nous assure qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\varphi(g) = \varphi(x^k).$$

Comme $\varphi : G \to H$ est injectif, alors

$$g = x^k$$

ce qui prouve que

$$G \subset \{x^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et donc que x engendre G (*l'inclusion réciproque est évidente* puisque G est un groupe multiplicatif qui contient x).

2.

✍ *C'est du cours !*

On considère un groupe monogène :

$$G = \langle a \rangle = \{a^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et un sous-groupe $H \subset G$.
L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(k) = a^k$$

est un morphisme de groupes. L'image réciproque du sous-groupe H par φ :

$$I = \{k \in \mathbb{Z} : \varphi(k) \in H\} = \{k \in \mathbb{Z} : a^k \in H\}$$

est donc un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. On sait donc qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$I = n_0\mathbb{Z}.$$

Comme $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ est surjectif, alors

$$\forall\, h \in H,\ \exists\, k \in I, \quad \varphi(k) = a^k = h.$$

► Si $n_0 = 0$, alors $I = \{0\}$ et $H = \{1_G\}$: dans ce cas (inintéressant au possible...), il est clair que H est monogène, engendré par 1_G.
► Si $n_0 \geqslant 1$, alors

$$H = \{a^{pn_0},\ p \in \mathbb{Z}\} = \{(a^{n_0})^p,\ p \in \mathbb{Z}\} = \langle a^{n_0} \rangle$$

et H est monogène.

✍ *J'ai pris le parti d'une démonstration abstraite (on n'a pas souvent l'occasion d'utiliser le théorème sur l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme) en supposant connue la structure générale des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.*

On aurait pu démontrer le théorème de manière plus terre à terre en imitant l'étude des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ — et donc sans supposer connue leur structure générale. L'étude des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ mérite d'être connue.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, un cycle. Écrire γ comme un produit de transpositions.

✍ *Une chose est de savoir comment le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré (par les transpositions, par les cycles...), autre chose est de savoir expliciter une factorisation d'une permutation σ !*

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

❧ Si $\sigma(n) = n$, alors on pose $\sigma_1 = \sigma$. Sinon, on considère la transposition

$$\tau_n = \begin{pmatrix} n & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

et on pose

$$\sigma_1 = \tau_n \circ \sigma.$$

Dans les deux cas, on observe que

$$\sigma_1(n) = n.$$

❧ Il ne reste plus qu'à continuer le processus, en augmentant à chaque étape le nombre de points fixés par la permutation.

❧ (HR) En supposant connue une permutation σ_k telle que

$$\forall\, n-k+1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sigma_k(i) = i,$$

— ou bien $\sigma_k(n-k) = n-k$, c'est-à-dire que σ_k fixe $k+1$ points (tous les entiers compris entre n et $(n-k)$ inclus) et on pose directement $\sigma_{k+1} = \sigma_k$;
— ou bien $\sigma_k(n-k) \neq n-k$, donc $\sigma_k(n-k) < n-k$ (HR et injectivité de σ_k) et on pose alors $\sigma_{k+1} = \tau_{n-k} \circ \sigma_k$ où τ_{n-k} est la transposition définie par :

$$\tau_{n-k} = \begin{pmatrix} n-k & \sigma_k(n-k) \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, on dispose d'une permutation σ_{k+1} qui fixe $(k+1)$ points :

$$\forall\, n-(k+1)+1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sigma_{k+1}(i) = i.$$

❧ Le processus s'arrête avec la permutation σ_{n-1} qui fixe $(n-1)$ points : les entiers $2, \dots, n$ et qui fixe par conséquent aussi 1 (puisque $1 \leqslant \sigma_{n-1}(1) < 2$).

En notant $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_r}$, les transpositions introduites dans ce processus (avec $0 \leqslant r < n$), on a donc

$$\sigma_{n-1} = \mathrm{Id} = (\tau_{i_r} \circ \cdots \circ \tau_{i_1}) \circ \sigma$$

c'est-à-dire

$$\sigma^{-1} = \tau_{i_r} \circ \cdots \circ \tau_{i_1}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ \tau_{i_r}^{-1} \\ &= \tau_{i_1} \circ \cdots \circ \tau_{i_r} \end{aligned}$$

puisqu'une transposition est son propre inverse (élément d'ordre deux).

✍ *L'exercice **[130–470]** montre que toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées. En particulier, pour quels que soient les entiers $i \neq j$, les transpositions*

$$\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}$$

*sont conjuguées. En suivant au plus près les explications du **[130–470]**, on constate que*

$$\forall\, i \neq j, \quad \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que le groupe symétrique est aussi engendré par les transpositions de la forme $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$.

✍ *On rappelle la méthode pour factoriser en produit de cycles de supports deux à deux disjoints.*

Les supports des différents cycles sont les orbites de la permutation σ : chaque entier $1 \leqslant k \leqslant n$ appartient à une, et à une seule, orbite sous l'action de σ et la restriction de σ à chacune de ces orbites est un cycle.

On commence par identifier l'orbite de 1, ce qui définit un premier cycle. On continue en identifier l'orbite du plus petit entier qui n'appartient pas à l'orbite de 1, ce qui définit un second cycle. Etc.

‖ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

✍ *On connaît un morphisme trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$: l'identité ! Et aussi un morphisme beaucoup moins trivial : la signature. Nous allons démontrer qu'il n'en existe pas d'autre.*

On considère un morphisme de groupes

$$\varphi \,:\, (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\mathbb{C}^*, \times).$$

❧ Soit τ, une transposition (ou 2-cycle). Comme $\tau^2 = \mathrm{Id}$ et que φ est un morphisme de groupes, on a donc

$$\big[\varphi(\tau)\big]^2 = \varphi(\mathrm{Id}) = 1$$

et donc $\varphi(\tau) = \pm 1$.

❧ Nous allons maintenant vérifier que la valeur de $\varphi(\tau)$ est la même pour toutes les transpositions.

Considérons quatre entiers $i \neq j$ et $k \neq \ell$ compris entre 1 et n et les transpositions

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}.$$

Comme $i \neq j$ et $k \neq \ell$, il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\sigma(k) = i \quad \text{et} \quad \sigma(\ell) = j$$

et nous allons vérifier que

$$\tau_2 = \sigma^{-1} \circ \tau_1 \circ \sigma.$$

✍ *La transformation*

$$\tau \mapsto \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$$

est la conjugaison par σ et est l'analogue exact de la relation de similitude sur les matrices carrées

$$M \mapsto P^{-1}MP.$$

Il est en particulier intéressant de comparer les points fixes par τ et les points fixes par $\sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$ — de même qu'il est intéressant de relier les vecteurs propres de M aux vecteurs propres de $P^{-1}MP$.

Tout d'abord,

$$\begin{array}{ccccccc} k & \overset{\sigma}{\mapsto} & i & \overset{\tau_1}{\mapsto} & j & \overset{\sigma^{-1}}{\mapsto} & \ell \\ \ell & \overset{\sigma}{\mapsto} & j & \overset{\tau_1}{\mapsto} & i & \overset{\sigma^{-1}}{\mapsto} & k \end{array}$$

et d'autre part, pour tout $x \notin \{k, \ell\}$, comme σ est injective,

$$x \mapsto \sigma(x) \notin \{i, j\}$$

puis

$$\tau_1 \circ \sigma(x) = \sigma(x)$$

car $\sigma(x) \notin \{i, j\}$ et donc finalement

$$\sigma^{-1} \circ \tau_1 \circ \sigma(x) = \sigma^{-1} \circ \sigma(x) = x.$$

Tout cela montre bien que $\tau_2 = \sigma^{-1} \circ \tau_1 \circ \sigma$.

❧ Revenons au morphisme φ : puisque c'est un morphisme,

$$\varphi(\tau_2) = \big[\varphi(\sigma)\big]^{-1} \times \varphi(\tau_1) \times \big[\varphi(\sigma)\big] = \varphi(\tau_1).$$

Ainsi, il n'y a que deux possibilités :

— ou bien $\varphi(\tau) = 1$ pour *toute* transposition τ ;

— ou bien $\varphi(\tau) = -1$ pour *toute* transposition τ.

❧ Or le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe un certain nombre p de transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p$ telles que

$$\sigma = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1.$$

Comme φ est un morphisme, on en déduit que

$$\varphi(\sigma) = \prod_{k=1}^{p} \varphi(\tau_k).$$

Par conséquent,

— si $\varphi(\tau) = 1$ pour toute transposition τ, alors $\varphi = \mathrm{Id}$;

— si $\varphi(\tau) = -1$ pour toute transposition τ, alors φ est la signature.

rms130-471

‖ *Soit* G*, un sous-groupe fini de* $GL_2(\mathbb{C})$ *tel que* $G \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$*. Démontrer que* G *est cyclique.*

L'application $\det : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes (multiplicatifs) et son noyau est, par définition, le sous-groupe $SL_2(\mathbb{C})$:

$$SL_2(\mathbb{C}) = \big\{M \in GL_2(\mathbb{C}) \;:\; \det M = 1\big\}.$$

❧ Par conséquent, l'image par det du sous-groupe fini G :

$$D = \big\{\det g,\ g \in G\big\}$$

est un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Comme $G \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$, la restriction du morphisme det à G est injective :

$$\begin{cases} \det g = 1 \\ g \in G \end{cases} \iff g \in G \cap SL_2(\mathbb{C})$$

donc $\#(D) = \#(G)$.

❧ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ordre de G (et donc celui de D). Comme l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe,

$$\forall\, g \in G, \quad (\det g)^n = 1$$

ce qui prouve que $\det g$ est une racine n-ième de l'unité.

On a donc

$$D \subset \mathbb{U}_n \qquad \text{et} \qquad \#(D) = \#(\mathbb{U}_n) = n$$

ce qui prouve que $D = \mathbb{U}_n$.

❧ En particulier, il existe $g_0 \in G$ tel que

$$\det g_0 = \zeta_n = e^{2i\pi/n}$$

et par conséquent

$$\mathbb{U}_n = \big\{\det(g_0^k),\ 0 \leqslant k < n\big\}.$$

On a justifié que le morphisme $\det : G \to D = \mathbb{U}_n$ était injectif et comme il est surjectif par construction, on en déduit que

$$G = \{g_0^k, 0 \leqslant k < n\} = \langle g_0 \rangle.$$

✍ *On aurait pu conclure plus vite : ayant établi que* det *était un isomorphisme de groupes de* $(G, \times)$ *sur* $(\mathbb{U}_n, \times)$*, on savait que* G *était cyclique (tout groupe isomorphe à un groupe cyclique est lui-même cyclique).*

On aurait également pu invoquer le premier résultat du ***[468]*** *: comme* det *est un isomorphisme de* G *sur* $\mathbb{U}_n$*, alors* g_0 *est un générateur de* G *si, et seulement si,* $\det g_0$ *est un générateur de* $\mathbb{U}_n$*.*

rms130-473

Calcul de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

> *Soit E, un espace vectoriel réel de dimension finie. On considère deux endomorphismes f et g de E, en supposant que f est inversible et que le rang de g est égal à 1. Démontrer que $f+g$ est inversible si, et seulement si,* $\mathrm{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Comme f est inversible,

$$f+g = f \circ (I + g \circ f^{-1})$$

et comme $GL(E)$ est un groupe pour $\circ$, on en déduit que $(f+g)$ est inversible si, et seulement si, $(I + g \circ f^{-1})$ est inversible.

❧ Or

$$(I + g \circ f^{-1}) = (g \circ f^{-1}) - (-1) \cdot I$$

donc $(f+g)$ est inversible si, et seulement si, (-1) n'est pas une valeur propre de $(g \circ f^{-1})$.

❧ Comme le rang de g est égal à 1 et que f^{-1} est inversible, le rang de $g \circ f^{-1}$ est aussi égal à 1. Par conséquent, $g \circ f^{-1}$ admet 0 comme valeur propre de multiplicité au moins égale à $(n-1)$ (Théorème du rang) et la valeur propre restante est donc égale à $\mathrm{tr}(g \circ f^{-1})$ (= la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité).

Ainsi $(f+g)$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$, un corps. On considère une application non constante

$$f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

telle que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad f(AB) = f(A).f(B).$$

Démontrer que $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(M) \neq 0$.

✍ *L'application f vérifie une propriété de type* morphisme de groupes *mais ce n'est pas un morphisme de groupes ! L'ensemble de départ : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe additif, certes ! mais ce n'est pas un groupe multiplicatif...*

L'idée générale pour résoudre un tel exercice consiste à choisir les matrices A et B de manière variée pour exploiter au mieux les propriétés de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

❧ Avec $A = I_n$, on a

$$\forall\, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(B) = f(I_n)f(B).$$

Comme f n'est pas constante, il existe au moins une matrice B telle que $f(B) \neq 0$, donc

$$f(I_n) = 1.$$

❧ Si la matrice M est inversible, alors

$$f(M)f(M^{-1}) = f(MM^{-1}) = f(I_n) = 1,$$

ce qui prouve d'une part que $f(M) \neq 0$ et d'autre part que

$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{K}), \quad f(M^{-1}) = \big[f(M)\big]^{-1}.$$

❧ Avec $A = 0_n$, on a

$$\forall\, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(0_n)f(B) = f(0_n).$$

Comme la fonction f n'est pas constante, il existe au moins une matrice B telle que $f(B) \neq 1 = f(I_n)$, donc

$$f(0_n) = 0.$$

❧ Considérons la matrice de rang r de référence :

$$J_r = \mathrm{Diag}(I_r, 0_{n-r}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

Il s'agit d'un projecteur : $J_r^2 = J_r$ donc

$$[f(J_r)]^2 = f(J_r)$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant r \leqslant n, \quad f(J_r) = 0 \quad \text{ou} \quad f(J_r) = 1.$$

❧ Toute matrice M_r de rang r est équivalente à cette matrice J_r : il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$J_r = Q^{-1}M_rP$$

et par conséquent ($f(P) \neq 0$ et $f(Q) \neq 0$ car P et Q sont inversibles)

$$f(J_r) = \frac{f(P)}{f(Q)} \cdot f(M_r).$$

Cela prouve que $f(J_r) = 0$ si, et seulement si, $f(M_r) = 0$ pour *toute* matrice M_r de rang r.

❧ On sait donc que $f(J_n) = f(I_n) = 1$ et que

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad f(J_r) \in \{0;\ 1\}.$$

Considérons donc

$$\rho = \min\big\{1 \leqslant r \leqslant n \ :\ f(J_r) = 1\big\}$$

(Il s'agit d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ — elle contient au moins $r = n$ — donc l'existence du minimum est donc assurée.)

Par définition, $f(J_\rho) = 1$ et, comme la matrice

$$J'_\rho = \mathrm{Diag}(0_{n-\rho}, I_\rho)$$

est aussi une matrice de rang ρ, alors $f(J'_\rho) \neq 0$. On en déduit que

$$f(J_\rho J'_\rho) = f(J_\rho)f(J'_\rho) \neq 0.$$

Or le rang de la matrice

$$J_\rho J'_\rho = \mathrm{Diag}(0_{n-\rho}, I_{2\rho-n}, 0_{n-\rho})$$

est égal à $2\rho - n$ et si $\rho < n$, alors

$$2\rho - n = \rho - (n-\rho) < \rho.$$

Par définition de ρ, on a $f(M_r) = 0$ pour toute matrice M_r de rang $r < \rho$ et donc en particulier

$$f(J_\rho J'_\rho) = 0.$$

Il faut donc que $\rho = n$, ce qui signifie que

$$\forall\, 1 \leqslant r < n, \qquad f(J_r) = 0$$

et par conséquent que

$$f(M) = 0$$

pour toute matrice non inversible M.

‖ *Quelles sont les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont égales à leur comatrice ?*

Je note $\mathrm{Com}(A)$, la comatrice de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

► On sait que, quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Com}(A)^\top.A = (\det A).I_n.$$

Par conséquent, si $\mathrm{Com}(A) = A$, alors

$$A^\top.A = \mathrm{Com}(A)^\top.A = (\det A).I_n. \tag{1}$$

✍ *Pour bien comprendre la suite, il vaut mieux remarquer que $A^\top.A$ est une matrice symétrique réelle, qu'elle est positive au sens où*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.A^\top.AX \geqslant 0$$

puisque $X^\top.A^\top.AX = \|AX\|^2$.

De plus, $\mathrm{Ker}\, A^\top.A = \mathrm{Ker}\, A$:

— *si $AX = 0$, alors $A^\top.AX = A^\top.0 = 0$;*

— *réciproquement, si $A^\top.AX = 0$, alors*

$$\|AX\|^2 = X^\top.A^\top.AX = 0$$

et donc $AX = 0$ (puisqu'une norme sépare les points).

▷ Si la matrice A n'est pas inversible, alors (1) devient :

$$A^\top.A = 0_n.$$

Par conséquent, pour toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top.(AX) = X^\top.A^\top.AX = 0$$

donc

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0$$

et A est donc la matrice nulle.

❧ Réciproquement : si $A = 0_n$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0_n = A$.

▷ Si la matrice A est inversible, alors

$$A^\top.A = (\det A).I_n. \tag{2}$$

Pour tout vecteur colonne X *non nul*, la colonne AX est aussi différente de la colonne nulle (puisque A est inversible), donc

$$0 < \|AX\|^2 = X^\top.(A^\top.A)X = (\det A).\|X\|^2$$

donc

$$\det A > 0. \tag{3}$$

En posant

$$\alpha = \sqrt{\det A} > 0,$$

on obtient alors

$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^\top\left(\frac{1}{\alpha}A\right) = I_n$$

et donc que

$$\frac{1}{\sqrt{\det A}}A \in O_n(\mathbb{R}). \tag{4}$$

En particulier, il faut donc que

$$\frac{\det A}{(\det A)^{n/2}} = \pm 1. \tag{5}$$

✍ *Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.*

Pour $n = 2$, la propriété (5) n'apporte aucune contrainte particulière, mais pour $n \geqslant 3$, il faut que $\det A = 1$ et on déduit alors de (2) que $A \in SO_n(\mathbb{R})$.

❧ Réciproquement :

— si $n = 2$, alors toute matrice de la forme

$$A = \alpha.R$$

où $\alpha > 0$ et $R \in SO_2(\mathbb{R})$ vérifie bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot R^\top \quad \text{et} \quad \det A = \alpha^2 \det R = \alpha^2$$

(puisque $\det R = 1$) et par conséquent

$$\mathrm{Com}(A) = [\det A.A^{-1}]^\top = \alpha^2.\left(\frac{1}{\alpha}R^\top\right)^\top = \alpha.R = A.$$

— Si $n \geqslant 3$, alors toute matrice $A \in SO_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\mathrm{Com}(A) = [\det A.A^{-1}]^\top = 1.(A^\top)^\top = A.$$

Conclusion générale.

Les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice sont

— la matrice nulle ;

— les matrices de rotation

— et aussi, mais seulement pour $n = 2$, les matrices de la forme

$$\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$ et $-\pi < \theta \leqslant \pi$.

rms130-494

‖ *Soient* A *et* B*, deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $(AB)^n = 0_n$*. Démontrer que* $(BA)^n = 0_n$*.*

Si $(AB)^n = 0$, alors
$$(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = 0$$
donc BA est nilpotente.

Or l'indice de nilpotence d'une matrice $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur à n, donc $(BA)^n = 0$.

✍ *La majoration de l'indice de nilpotence doit être connue !*
On peut en donner diverses justifications plus ou moins savantes.

❧ *En considérant une matrice nilpotente* $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *comme une matrice complexe, on sait qu'une telle matrice est trigonalisable et que son unique valeur propre est nulle.*

La matrice N *est donc semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.*

Par conséquent, la matrice N^k *est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients* $t_{i,j}$ *sont nuls pour* $j < i + k$ *(dessiner la matrice !) et en particulier* N^n *est la matrice nulle.*

❧ *Variante : Le polynôme minimal est de la forme* X^d *et il divise le polynôme caractéristique (Théorème de Cayley-Hamilton). Or le degré du polynôme caractéristique est égal à* n*, donc* $d \leqslant n$ *et par conséquent* $N^n = 0$*.*

❧ *Autre variante : cf exercice 130-1194.*

rms130-498

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et f, un endomorphisme de E tel que f^2 soit un projecteur.

1. *Démontrer que f est trigonalisable.*

2. *Démontrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.*

1. Par hypothèse, $f^4 = f^2$, donc

$$X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$$

est un polynôme annulateur de f.

Comme l'endomorphisme f admet un polynôme annulateur scindé, il est trigonalisable.

2. On sait que $X^2(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur, produit de trois facteurs deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}). \tag{6}$$

► Pour tout endomorphisme f, on sait que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

Si $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$, alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$ (Théorème du rang) et par conséquent $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ (inclusion et égalité des dimensions).

On en déduit que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$$

et donc que f est diagonalisable.

► Supposons que f soit diagonalisable. Le polynôme minimal de f est alors scindé à racines simples et il divise $X^2(X-1)(X+1)$, donc il divise aussi $X(X-1)(X+1)$.

Par conséquent, $X(X-1)(X+1)$ est annulateur. Comme ce polynôme est le produit de trois facteurs deux à deux premiers entre eux, on peut appliquer le théorème de décomposition des noyaux et en déduire que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}). \tag{7}$$

Comme E est de dimension finie, on en déduit de (6) et de (7) que

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \\ &= \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \end{aligned}$$

et donc que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2.$$

✍ *L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé* à racines simples.

Comme $X^2(X-1)(X+1)$ est annulateur, on en déduit que f est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme

$$X(X-1)(X+1)$$

est annulateur de f.

> **1.** *Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par A.*
> **2.** *Déterminer les matrices $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.*

1. Bien entendu, les deux sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont stables par A (quelle que soit la matrice A). Mais encore ?

La matrice A est diagonale par blocs :

$$A = \mathrm{Diag}(B, 1) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

donc il y a une droite et un plan stable évidents :

$$\mathbb{R} \cdot (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad [z = 0].$$

Mais encore ?

❧ Une droite $D = \mathbb{R} \cdot u$ dirigée par le vecteur $u \neq 0$ est stable par A si, et seulement si, le vecteur u est un vecteur propre de A.

Le polynôme caractéristique de B est égal à X^2+X+1, donc le polynôme caractéristique de A est égal à $(X-1)(X^2+X+1)$. Comme A admet 1 pour seule valeur propre réelle, la seule droite propre est la droite $\mathbb{R} \cdot (0, 0, 1)$. Il n'y a donc pas d'autre droite stable par A que la droite déjà trouvée.

❧ Dans $\mathbb{R}^3$, un plan est en fait un hyperplan, donc représenté par une équation :

$$P = [C^\top.X = 0].$$

Ce plan est stable par la matrice A si, et seulement si,

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad C^\top.X = 0 \implies C^\top.(AX) = 0.$$

Cela signifie que le noyau de la forme linéaire (non nulle, puisque $\dim P = 2$)

$$\big[X \mapsto C^\top.X\big]$$

est contenu dans le noyau de la forme linéaire (peut-être nulle)

$$\big[X \mapsto C^\top.A.X\big]$$

et donc qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad C^\top.A.X = \alpha \cdot C^\top.X.$$

✍ *Si les deux formes linéaires sont non nulles, alors leurs noyaux sont de même dimension (des hyperplans de $\mathbb{R}^3$) et donc égaux. Dans ce cas, le scalaire α est non nul.*

Si la forme linéaire $\big[X \mapsto C^\top.A.X\big]$ est nulle, le scalaire α est nul.

Le vecteur X étant quelconque, on en déduit que

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad C^\top.A = \alpha \cdot C^\top$$

c'est-à-dire que C est un vecteur propre de $A^\top$.

❧ La matrice $A^\top$ admet 1 pour seule valeur propre réelle et le sous-espace propre associé est dirigé par $(0, 0, 1)$, donc la matrice A admet un, et un seul, plan stable : il s'agit du plan d'équation

$$[0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0] = [z = 0].$$

En conclusion, il existe exactement quatre sous-espaces stables par A.

2. Comme les matrices A et M commutent, on sait que tout sous-espace propre de A est stable par M. Par conséquent, le vecteur $(0, 0, 1)$ est un vecteur propre de M donc la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ e & f & \star \end{pmatrix}.$$

En comparant

$$AM = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ e & f & \star \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ e-3f & e-2f & \star \end{pmatrix},$$

on obtient $e = f = 0$, donc la matrice M est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

avec bien entendu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{B_0} \times B = B \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

✍ *Je ne vois pas comment démontrer que M est diagonale par blocs comme A sans poser quelques calculs...*

Pour trouver les valeurs possibles des réels a, b, c et d, on peut continuer le calcul matriciel, c'est simple et assez rapide.

Mais on peut aussi réduire les calculs au strict minimum en remarquant que l'endomorphisme de P induit par restriction de A est un ***endomorphisme cyclique*** *(dans une base bien choisie, il est représenté par une matrice compagnon et, de ce fait, les matrices qui commutent à cet endomorphisme sont les polynômes en cet endomorphisme).*

❧ Prenons un vecteur quelconque dans le plan $P = [z = 0]$ qui est stable par A, par exemple

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et calculons son image par A :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, appartiennent tous deux au plan P (le premier par choix, le second par stabilité de P) et forment donc une base du plan P.

Comme le plan P est stable par M, le vecteur MX appartient à P et il existe donc deux réels α et β tels que

$$MX = \alpha \cdot X + \beta \cdot AX.$$

Comme M et A commutent, on en déduit que

$$M(AX) = A(MX) = \alpha \cdot AX + \beta \cdot A(AX) = (\alpha \cdot I_3 + \beta \cdot A)(AX).$$

Ainsi, les endomorphismes M et $(\alpha \cdot I_3 + \beta \cdot A)$ coïncident sur une base du plan $P = \mathrm{Vect}(X, AX)$ et donc sur le plan P.

✍ *Cela revient à conclure que les matrices qui commutent à B sont exactement les polynômes en B (pour une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la dimension de la sous-algèbre $\mathbb{R}[B]$ est inférieure à 2 et les polynômes en B sont en fait les fonctions affines de B).*

❧ Bref : les matrices M qui commutent à A sont les matrices de la forme

$$\mathrm{Diag}(\alpha I_2 + \beta B, \gamma)$$

et forment donc un espace vectoriel de dimension 3 (les trois réels α, β et γ pouvant être arbitrairement choisis).

Soient E, un espace vectoriel complexe de dimension finie (non nulle) et u, v, deux endomorphismes de E. Démontrer que u et v admettent un vecteur propre commun dans chacun des trois cas suivants.

1. $u \circ v = 0$

2. $u \circ v \in \mathbb{C} \cdot u$

3. $u \circ v \in \mathrm{Vect}(u, v)$

✍ *On considère ici un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Sur un tel espace, un endomorphisme admet toujours un polynôme annulateur scindé (polynôme minimal ou caractéristique par exemple) et par conséquent, il admet nécessairement au moins un vecteur propre.*

Cette remarque est fondamentale, elle sert de nombreuses fois dans cet exercice.

1. Considérons un vecteur propre $x_0 \in E$ pour l'endomorphisme v : il existe un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$v(x_0) = \mu \cdot x_0.$$

On sait alors que

$$u\big(v(x_0)\big) = 0.$$

❧ Si $\mu \neq 0$, le problème est réglé ! En effet, dans ce cas, le vecteur $v(x_0)$ n'est pas nul (ni le scalaire μ, ni le vecteur x_0 ne sont nuls), donc $v(x_0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda = 0$ et, par linéarité de v,

$$v\big(v(x_0)\big) = v(\mu \cdot x_0) = \mu \cdot v(x_0)$$

donc $v(x_0)$ est aussi un vecteur propre de v associé à la valeur propre μ.

❧ Fort bien, mais si $\mu = 0$? Dans ce cas, $v(x_0) = 0$ n'est pas un vecteur propre !

▶ Si v est l'endomorphisme nul, alors on considère un vecteur propre x_1 de u et comme

$$v(x_1) = 0 = 0 \cdot x_1$$

ce vecteur x_1 est bien un vecteur propre de v aussi.

▶ Supposons que v ne soit pas l'endomorphisme nul. Dans ce cas, $\mathrm{Im}\, v$ est un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui est stable par v.

Il existe donc un vecteur propre $y_0 = v(z_0) \in \mathrm{Im}\, v$ pour l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\, v$ induit par restriction de v. C'est bien entendu un vecteur propre pour v !

Et comme $u(y_0) = (u \circ v)(z_0) = 0$, on en déduit que y_0 est un vecteur non nul du noyau de u, c'est donc un vecteur propre de u (associé à la valeur propre 0).

Le vecteur y_0 est donc un vecteur propre commun à u et à v.

2. On suppose ici qu'il existe un scalaire $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$u \circ v = a \cdot u.$$

Autrement dit, par linéarité de u,

$$u \circ (v - a \cdot \mathrm{Id}) = 0.$$

D'après la question précédente, les endomorphismes u et $v - a\,\mathrm{Id}$ admettent un vecteur propre commun. Comme les vecteurs propres de $v - a\,\mathrm{Id}$ sont aussi des vecteurs propres de v :

$$(v - a\,\mathrm{Id})(x_0) = \lambda \cdot x_0 \iff v(x_0) = (\lambda + a) \cdot x_0$$

on en déduit que u et v admettent un vecteur propre commun.

3. On suppose enfin qu'il existe deux scalaires a et b dans $\mathbb{C}$ tels que

$$u \circ v = a \cdot u + b \cdot v.$$

Par linéarité de u et de v, on en déduit que

$$\underbrace{(u - b\,\mathrm{Id})}_{u_b} \circ \underbrace{(v - a\,\mathrm{Id})}_{v_a} = ab\,\mathrm{Id}\,.$$

On distingue alors trois cas.

► Si $ab \neq 0$, alors les endomorphismes u_b et v_a sont inversibles et, à un facteur près, réciproques l'un de l'autre. En particulier, ces deux endomorphismes commutent et il en va donc de même pour u et v.

Les valeurs propres de u_b (et donc aussi celles de v_a) sont différentes de 0. Si x_0 est un vecteur propre de u_b associé à λ, alors x_0 est un vecteur propre de v_a associé à ab/λ :

$$\begin{aligned} u_b(x_0) = \lambda \cdot x_0 &\implies (ab) \cdot x_0 = v_a(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot v(x_0) \\ &\implies v_a(x_0) = \frac{ab}{\lambda} \cdot x_0. \end{aligned}$$

Cela prouve (par symétrie) qu'un vecteur x_0 est un vecteur propre de u_b si, et seulement si, c'est un vecteur propre de v_a.

On en déduit comme plus haut que x_0 est un vecteur propre de u si, et seulement si, x_0 est un vecteur propre de v.

Et comme E est un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle, u et v admettent au moins un vecteur propre en commun.

► Si $ab = 0$, on doit distinguer deux sous-cas :

▷ Si $b = 0$, alors $u \circ v = a \cdot u$ et on est ramené au cas précédent.

▷ Si $a = 0$, alors $u_b \circ v = 0$ et on est cette fois ramené au premier cas : il existe au moins un vecteur propre commun à u_b et à v et comme u et u_b ont les mêmes vecteurs propres, on en déduit qu'il existe au moins un vecteur propre commun à u et à v.

1. *Soit* f*, un endomorphisme non identiquement nul de* $\mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^3(x) + f(x) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* f *est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Que dire d'un endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $f^3 + f = 0$ *?*

1. Le polynôme $X^3 + X = X(X+1)$ est un polynôme annulateur. Les facteurs X et X^2+1 sont premiers entre eux, on peut donc appliquer le Théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + I)$$

et on sait que les deux sous-espaces sont stables par f (en tant que noyaux de polynômes en f).

❧ On notera f_0 et f_2, les endomorphismes de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2+I)$ respectivement induits par restriction de f à ces deux sous-espaces vectoriels.

Par définition, f_0 est l'endomorphisme nul et f_2 admet X^2+1 pour polynôme annulateur.

❧ Si $\operatorname{Ker}(f^2+I) = \{0\}$, alors $f = \omega_E$: c'est impossible par hypothèse.

Si $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) = 1$, alors $\operatorname{Ker}(f^2+I)$ serait une droite stable par f et elle serait donc dirigée par un vecteur propre de f et donc de f_2.

Comme le polynôme X^2+1, annulateur de f_2, n'a pas de racine réelle, l'endomorphisme f_2 n'a pas de valeur propre et il n'existe donc pas de vecteur propre de f_2 dans le sous-espace $\operatorname{Ker}(f^2+I)$: contradiction !

Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) \geqslant 2$ et donc

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f^2+I) \leqslant 1.$$

❧ Comme $\dim E = 3$ est impaire, le degré du polynôme caractéristique de f est impair (égal à 3) et comme il s'agit d'un polynôme à coefficients réels, on en déduit qu'il admet au moins une racine réelle (Théorème des valeurs intermédiaires).

L'endomorphisme f admet donc au moins une valeur propre. On sait que toutes les valeurs propres de f sont des racines du polynôme annulateur $X(X^2+1)$, donc la seule valeur propre possible est 0.

Par conséquent, $\operatorname{Sp}(f) = \{0\}$ et $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$.

❧ En conclusion, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) = 2$.

► Choisissons un vecteur non nul $e_1 \in \ker f$. Un tel choix est possible puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et ce vecteur est un vecteur directeur du sous-espace $\operatorname{Ker} f$.

Choisissons ensuite un vecteur non nul $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2+I)$. Un tel choix est possible puisque $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) = 2$. On a déjà démontré que ce vecteur e_2 n'était pas un vecteur propre de f, donc le vecteur $f(e_2)$ n'est pas colinéaire à e_2. Mais comme $\operatorname{Ker}(f^2+I)$ est stable par f, le vecteur $e_3 = f(e_2)$ appartient encore à $\operatorname{Ker}(f^2+I)$.

La famille (e_2, e_3) est donc une famille libre de deux vecteurs dans le plan $\operatorname{Ker}(f^2+I)$: c'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f^2+I)$.

Par concaténation de bases, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

De plus, $f(e_1) = 0$ (car $e_1 \in \operatorname{Ker} f$), $f(e_2) = e_3$ (par construction de e_3) et

$$f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$$

car $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2+I)$ et, en restriction à ce sous-espace, l'application linéaire f^2+I est identiquement nulle.

La matrice de f relative à une telle base est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En dimension n, on a encore

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + I).$$

Nous allons démontrer par récurrence (sur la dimension) qu'il existe des plans vectoriels

$$P_1, P_2, \dots, P_r$$

tous stables par f et tels que

$$\operatorname{Ker}(f^2 + I) = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j.$$

❧ Comme $f \neq \omega_E$, le sous-espace $F = \operatorname{Ker}(f^2 + I)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Le raisonnement fait au

3. a montre que F contient alors un plan

$$P_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

❧ On suppose connue une famille de plans

$$P_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2), \dots, P_k = \operatorname{Vect}(e_{2k-1}, e_{2k})$$

stables par f et tels que

$$F_k \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{j=1}^{k} P_j \subset F.$$

Si $F_k = F$, alors la propriété est établie pour $r = k$ et $\dim F = 2k$.
Sinon, on peut choisir un vecteur

$$e_{2k+1} \in F \setminus F_k$$

et ce vecteur est nécessairement différent de 0_E.
❧ Comme F est stable par f, le vecteur

$$e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$$

appartient encore à F. On a vu plus haut que le sous-espace F ne contenait aucun vecteur propre de f. Par conséquent, les vecteurs e_{2k+1} et $e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$ ne sont pas colinéaires et le sous-espace

$$P_{k+1} = \operatorname{Vect}(e_{2k+1}, e_{2k+2})$$

est un plan contenu dans F.
❧ Ce plan P_{k+1} est stable par f : tout d'abord $f(e_{2k+1}) = e_{2k+2} \in P_{k+1}$ par construction et

$$f(e_{2k+2}) = f^2(e_{2k+1}) = -e_{2k+1} \in P_{k+1}$$

puisque $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de f restreint à F.
❧ Considérons un vecteur $x \in P_{k+1} \cap F_k$. Alors $f(x) \in P_{k+1} \cap F_k$ (une intersection de sous-espaces vectoriels stables par f est encore stable par f) et comme il n'y a pas de vecteurs propres dans F (et donc dans F_k), alors
— ou bien $x = 0_E$,
— ou bien $\big(x, f(x)\big)$ est une famille libre de deux vecteurs dans le plan P_{k+1}.
Dans le second cas, on aurait une base de P_{k+1} constituée de vecteurs de F_k et par conséquent P_{k+1} serait contenu dans F_k, ce qui est faux par hypothèse.
Par conséquent, $x = 0_E$ et on a démontré que P_{k+1} et F_k étaient en somme directe.
❧ Comme F est un sous-espace de dimension finie, il est impossible de trouver une suite infinie de plans P_k tels que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \bigoplus_{j=1}^{k} P_j \subset F.$$

Il existe donc un entier $r \geqslant 1$ (car $f \neq \omega$) tel que

$$F = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$$

et en particulier $\dim F = 2r$ est paire.

❧ Si $\dim E$ est paire, il est donc possible que $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. C'est le cas en particulier pour les matrices diagonales par blocs de la forme

$$\operatorname{Diag}(B, B, \dots, B) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ Si $\dim E$ est impaire, en complétant la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{2r-1}, e_{2r})$ avec des vecteurs de $\operatorname{Ker} f$ pour obtenir une base de E, on a démontré que f pouvait être représenté par la matrice diagonale par blocs.

$$\operatorname{Diag}(0_{n-2r}, B, \dots, B).$$

> *Soient E, un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u, un endomorphisme de E. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par u sont $\{0_E\}$ et E. Démontrer que $n = 2$.*

Supposons que u admette une valeur propre (réelle). Dans ce cas, il existerait aussi un vecteur propre x (non nul...) et la droite $\mathbb{R} \cdot x$ serait stable par u.

D'après l'énoncé, seuls $\{0\}$ et E sont stables par u avec $\dim E \geqslant 2$.

Par conséquent, le spectre (réel) de u est vide et u n'admet aucun vecteur propre.

❧ Considérons le polynôme minimal de u et factorisons-le en produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$P = \prod_{k=1}^{r} P_k^{m_k}.$$

Les facteurs P_k étant des polynômes irréductibles deux à deux distincts, les facteurs $P_k^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k^{m_k}(u).$$

Pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant r$, le sous-espace $\operatorname{Ker} P_k(u)$ est stable par u, distinct de $\{0\}$ (puisque P_k est un diviseur du polynôme minimal) et

$$\operatorname{Ker} P_k(u) \subset \operatorname{Ker} P_k^{m_k}(u)$$

puisque $m_k \geqslant 1$.

❧ D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \operatorname{Ker} P_k(u) = E.$$

Mais comme les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P_k^{m_k}(u)$ sont en somme directe, on doit en conclure que $r = 1$ et que $\operatorname{Ker} P_1(u) = E$.

Le polynôme minimal de u est donc irréductible : $P = P_1$.

❧ Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont d'une part les polynômes de degré 1 et d'autre part les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Les racines (réelles) du polynôme minimal sont les valeurs propres de u et on a constaté pour commencer que u n'avait pas de valeurs propres. Par conséquent, son polynôme minimal est un irréductible de degré 2.

❧ Notons $X^2 + aX + b$, le polynôme minimal de u et considérons un vecteur $x_0 \neq 0_E$.

Si les vecteurs x_0 et $u(x_0)$ étaient colinéaires, alors x_0 serait un vecteur propre de u : il n'en existe pas, on l'a déjà vu ! Par conséquent, la famille $\big(x_0, u(x_0)\big)$ est libre et le sous-espace

$$F = \operatorname{Vect}(x_0, u(x_0))$$

est un plan.

Comme $u^2 + au + b\,I = \omega_E$, alors

$$u\big(u(x_0)\big) = -b \cdot x_0 - a \cdot u(x_0) \in F$$

et par suite, le plan F est stable par u.

Or on a supposé que E était le seul sous-espace distinct de $\{0\}$ qui soit stable par u. Donc $E = F$ est bien un plan vectoriel.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $M = -M^\top$ si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \qquad X^\top.M.X = 0.$$

✍ *On rappelle la suprême astuce des espaces euclidiens : quelle que soit la matrice carrée M, quelles que soient les matrices colonnes X et Y, le produit $X^\top.M.Y$ est une matrice symétrique (une seule ligne, une seule colonne !) et par conséquent*

$$X^\top.M.Y = ({}^\top X^\top.M.Y) = Y^\top.M^\top.X.$$

❧ Si la matrice M est antisymétrique, alors

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.M.X \underset{\star}{=} X^\top.M^\top.X = X^\top.(-M)^\top.X = -X^\top.M.X$$

($\star$ = astuce suprême) et par conséquent

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.M.X = 0.$$

❧ Réciproquement, si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.M.X = 0$$

alors

$$\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (X+Y)^\top.M.(X+Y) = 0$$

et donc, en développant ce double produit matriciel,

$$\begin{aligned} 0 = X^\top.M.X + Y^\top.M.X + X^\top.M.Y + Y^\top.M.Y &= Y^\top.M.X + X^\top.M.Y \\ &\underset{\star}{=} X^\top(M + M^\top)Y \end{aligned}$$

($\star$ = nouvelle application de l'astuce suprême).

Comme la colonne X est quelconque, on en déduit que

$$\forall Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (M + M^\top)Y = 0$$

et comme la colonne Y est quelconque elle aussi, on en déduit que

$$M + M^\top = 0_n.$$

‖ *Démontrer que le rang d'une matrice antisymétrique est pair.*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on va traiter la matrice M comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: quitte à identifier le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à la colonne X qui le représente dans la base canonique (orthonormée !) de $\mathbb{R}^n$, on identifie la colonne MX au vecteur Mx, image de x par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

✍ *(Toutes ces précautions pour légitimer les abus de notation qui vont suivre et qui, en fait, n'abusent personne.)*

❧ Soient $x \in \operatorname{Ker} M$ et $y \in \operatorname{Im} M$: il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Mx_0$ et comme M est antisymétrique,

$$\langle\, y \,|\, x \,\rangle = \langle\, Mx_0 \,|\, x \,\rangle = (Mx_0)^\top . x = x_0^\top .(-Mx) = -\langle\, x \,|\, 0 \,\rangle = 0.$$

On en déduit que les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$ sont orthogonaux. D'après le théorème du rang,

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} M \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} M.$$

Cette décomposition en somme directe orthogonale est d'autant plus intéressante que les deux sous-espaces sont stables par M.

❧ En concaténant une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de $\operatorname{Ker} M$ et une base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Im} M$, on obtient donc une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et en notant Q, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, on obtient donc une matrice orthogonale (changement de base orthonormée) telle que

$$M' = Q^{-1}MQ = Q^\top .M.Q = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & M_1 \end{pmatrix}$$

(formule du changement de base et décomposition en somme directe de sous-espaces stables).

❧ La matrice M_1 représente, dans la base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Im} M$, l'endomorphisme v induit par restriction de M au sous-espace stable $\operatorname{Im} M$.

Du fait que M est antisymétrique, on déduit que le produit $Q^\top .M.Q$ est aussi antisymétrique et par conséquent la matrice $M_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ est elle aussi une matrice antisymétrique.

Si $v(x) = 0$, alors x appartient à la fois à $\operatorname{Im} M$ (= espace sur lequel v est défini) et à $\operatorname{Ker} M$ (un vecteur du noyau de v est, par définition, un vecteur du noyau de M). Or $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$ sont en somme directe, donc $x = 0$ et par conséquent v est inversible (Théorème du rang, appliqué à un endomorphisme de $\operatorname{Im} M$, espace de dimension finie). La matrice M_1 est donc inversible.

Comme $M_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ est antisymétrique et inversible, on a donc

$$0 \neq \det M_1 = \det(M_1^\top) = \det(-M_1) = (-1)^r \det M_1,$$

ce qui prouve que l'entier r est pair. Or, par construction, $r = \dim \operatorname{Im} M$, donc $r = \operatorname{rg} M$.

> *Soient $A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que*
> $$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p, \quad A_i \in \mathbb{R}[A].$$

Quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la sous-algèbre $\mathbb{K}[A]$ est commutative.

Par conséquent, s'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p, \qquad A_i \in \mathbb{K}[A],$$

alors les matrices A_i commutent deux à deux :

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant p, \qquad A_i A_j = A_j A_i.$$

❧ Réciproquement, chaque A_i est une matrice symétrique réelle, donc (Théorème spectral) chaque matrice A_i est diagonalisable :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p,\ \exists\, P_i \in O_n(\mathbb{R}), \quad P_i^{-1} A_i P_i = D_i \in D_n(\mathbb{R}).$$

(On note ici $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices diagonales réelles.)

Si, de plus, les matrices A_i commutent deux à deux, alors les matrices A_i sont co-diagonalisables :

$$\exists\, P \in O_n(\mathbb{R}), \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant p, \quad P^{-1} A_i P = \Delta_i \in D_n(\mathbb{R}).$$

✍ *Autrement dit, la même matrice de passage P convient pour toutes les matrices A_i !*

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence sur le nombre de matrices et, pour des raisons de commodité, nous allons raisonner sur des endomorphismes symétriques plutôt que sur des matrices symétriques réelles.

Le point clé de la démonstration qui suit est le suivant : si deux endomorphismes f et g commutent, alors tout sous-espace propre de f est stable par g.

Initialisation.— Comme f_1 est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de E telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f_1)$ soit diagonale (Théorème spectral).

Hypothèse de récurrence.— On suppose que, pour un certain entier $p \geqslant 1$, pour tout espace euclidien E, pour toute famille $(f_1, \dots, f_p)$ d'endomorphismes symétriques de E qui commutent deux à deux, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_p(E)$ de E telle que la matrice

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_p(E)}(f_k)$$

soit diagonale pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.

Ce n'est pas une hypothèse de récurrence qui s'improvise...

Hérédité.— On considère une famille de $(p+1)$ endomorphismes symétriques

$$(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})$$

d'un espace euclidien E et on suppose que ces endomorphismes commutent deux à deux.

❧ D'après le Théorème spectral, l'endomorphisme f_{p+1} est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f_{p+1})}} E_{p+1}^{\lambda}.$$

Comme f_{p+1} commute à chaque endomorphisme f_k, chaque sous-espace propre E_{p+1}^{λ} est stable par f_k et l'endomorphisme de E_{p+1}^{λ} induit par restriction de f_k est un endomorphisme symétrique :

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(f_{p+1}),\ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad f_k^{\lambda} \in \mathcal{S}(E_{p+1}^{\lambda}).$$

✍ *Comme E_{p+1}^{λ} est le sous-espace propre de f_{p+1} associé à λ, il est aussi stable par f_{p+1} et l'endomorphisme de E_{p+1}^{λ} induit par restriction de f_{p+1} est un endomorphisme symétrique particulièrement simple : c'est une homothétie !*

$$f_{p+1}^{\lambda} = [x \mapsto \lambda x]$$

Quels que soient $1 \leqslant j, k \leqslant p$, comme f_j et f_k commutent, alors

$$\forall\, x \in E, \quad (f_j \circ f_k)(x) = (f_k \circ f_j)(x)$$

et comme E^λ_{p+1} est stable par f_j et par f_k, alors

$$\forall\, x \in E^\lambda_{p+1}, \quad (f^\lambda_j \circ f^\lambda_k)(x) = (f^\lambda_k \circ f^\lambda_j)(x).$$

❧ On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à l'espace euclidien E^λ_{p+1} et aux endomorphismes $f^\lambda_1, \dots, f^\lambda_p$. Il existe donc une base orthonormée $\mathscr{B}^\lambda_{p+1}$ de E^λ_{p+1} telle que la matrice

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}^\lambda_{p+1}}(f^\lambda_k)$$

soit diagonale pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.

Comme f^λ_{p+1} est l'homothétie de rapport λ, on en déduit que la matrice

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}^\lambda_{p+1}}(f^\lambda_{p+1}) = \lambda I$$

est aussi une matrice diagonale.

❧ Comme les sous-espaces propres E^λ_{p+1} sont deux à deux orthogonaux et que leur somme est égale à E, en concaténant les familles orthonormées $\mathscr{B}^\lambda_{p+1}$ on obtient une base orthonormée $\mathscr{B}_{p+1}$ de E.

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p+1$, la matrice de f_k relative à la base $\mathscr{B}_{p+1}$ est alors diagonale par blocs :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_{p+1}}(f_k) = \operatorname{Diag}\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}^\lambda_{p+1}}(f^\lambda_k),\ \lambda \in \operatorname{Sp}(f_{p+1})\big)$$

puisque chaque sous-espace E^λ_{p+1} est stable par f_k.

Et comme chaque bloc diagonal est lui-même une matrice diagonale, on en déduit que chaque matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_{p+1}}(f_k)$ est diagonale.

CQFD !

❧ D'après ce qui précède, il existe donc une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, P^{-1}A_kP = \operatorname{Diag}(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n}).$$

On pose alors

$$A = P\operatorname{Diag}(1, 2, \dots, n)P^{-1}$$

de telle sorte que

$$P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(1, 2, \dots, n).$$

Comme les réels $1, 2, \dots, n$ sont deux à deux distincts, on déduit de la théorie de Lagrange que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, il existe un polynôme interpolateur L_k tel que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad L_k(i) = \lambda_{k,i}.$$

On a alors

$$P^{-1}A_kP = L_k(P^{-1}AP) = P^{-1}L_k(A)P$$

et par conséquent

$$A_k = L_k(A) \in \mathbb{R}[A].$$

► En conclusion : si $A_1, \dots, A_p$ sont des matrices symétriques réelles, alors il existe une matrice symétrique réelle A telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad A_k \in \mathbb{R}[A]$$

si, et seulement si, les matrices A_k commutent deux à deux.

✍ ***Complément culturel***

Si E est un espace de dimension finie, on peut généraliser le résultat précédent.

On considère une famille quelconque $(f_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes qui commutent deux à deux :

$$\forall\, i, j \in I, \quad f_i \circ f_j = f_j \circ f_i.$$

Comme E est un espace de dimension finie, alors $L(E)$ est un espace de dimension finie et

$$V = \operatorname{Vect}(f_i,\ i \in I)$$

est aussi un espace de dimension finie (en tant que sous-espace de $L(E)$*).*

D'après le Théorème de la base incomplète (version base extraite*), il existe une famille finie*

$$(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$$

d'endomorphismes qui soit une base de V.

On peut alors appliquer le résultat précédent à cette famille finie d'endomorphismes : il existe une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

de E *qui est constituée de vecteurs propres communs aux endomorphismes* f_{i_1}*, ...,* f_{i_r} *:*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n,\ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad f_{i_k}(e_j) = \lambda_{i_k,j} \cdot e_j$$

Or tout endomorphisme f_i *est une combinaison linéaire des endomorphismes* f_{i_1}*, ...,* f_{i_r} *:*

$$f_i = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_{i_k}$$

et les vecteurs de $\mathscr{B}$ *sont donc des vecteurs propres de* f_i *:*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad f_i(e_j) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_{i_k}(e_j) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \lambda_{i_k,j}\right) \cdot e_j.$$

Il existe donc une base de vecteurs propres commune à tous les endomorphismes f_i.

Soit E*, l'espace des fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

1. *On pose*

$$\forall\, f \in E, \qquad N(f) = \left|f(0)\right| + \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que N *est une norme sur* E *et comparer cette norme à* $\|\cdot\|_\infty$*.*

2. *Même question pour l'application* N' *définie par*

$$\forall\, f \in E, \qquad N'(f) = \left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt.$$

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée sur ce segment. Par conséquent, N est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

▷ Il est clair que N est positivement homogène :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, f \in E, \qquad N(\lambda.f) = |\lambda|.N(f).$$

▷ Comme $|\cdot|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes, l'application N vérifie bien l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, f, g \in E, \qquad N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

▷ Il reste à vérifier que N sépare les points. On considère donc une fonction $f \in E$ telle que $N(f) = 0$. Dans ce cas, on a $\left|f(0)\right| = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$ et donc

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [0,1], \quad f'(t) = 0$$

(puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme). La fonction f est donc constante sur l'*intervalle* $[0,1]$ et donc identiquement nulle.

❧ Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \left|f(x)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^x \left|f'(t)\right| dt \leqslant \left|f(0)\right| + (1-0)\cdot\|f'\|_\infty = N(f).$$

Le majorant trouvé est indépendant de x, on peut donc passer au sup et en déduire que

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant N(f).$$

La norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est donc dominée par la norme N.

▷ Réciproquement, considérons les fonctions

$$f_n = [t \mapsto \sin \pi n t]\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que $\|f_n\|_\infty = 1$ et que $N(f_n) = n\pi$. Par conséquent, la norme N n'est pas dominée par la norme uniforme et ces deux normes ne sont pas équivalentes.

2. La fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc N' est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

Cette fois encore, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidemment vérifiées.

Si enfin $N'(f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et f' est identiquement nulle (puisque $|f'|$ est une fonction *continue* et positive dont l'intégrale est nulle), donc f est bien la fonction nulle (même raisonnement que plus haut).

Donc N' est aussi une norme sur E.

❧ Les calculs précédents ont montré que, pour tout $f \in E$,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \left|f(x)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^x \left|f'(t)\right| dt \leqslant N'(f)$$

et donc que
$$\|f\|_\infty \leqslant N'(f).$$

❧ Avec les mêmes fonctions f_n,
$$\begin{aligned} N'(f_n) &= \int_0^1 n\pi|\sin n\pi t|\,dt \\ &= \int_0^{n\pi} |\sin u|\,du && (u = n\pi t) \\ &= n\int_0^{\pi} \sin u\,du = 2n. && (\pi\text{-périodicité}) \end{aligned}$$

Même conséquence : les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N' ne sont pas équivalentes.

Soit C, une partie convexe d'un espace vectoriel normé.

1. *Démontrer que l'adhérence de C est un fermé.*

2. *Démontrer que l'intérieur de C est convexe.*

1. Soient a et b, deux points adhérents à C : il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telles que

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad b = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$(1-t)a + tb = \lim_{n\to+\infty} (1-t)x_n + ty_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $(1-t)x_n + ty_n$ appartient à C (puisque C est convexe) et par conséquent le point $(1-t)a + tb$ appartient à l'adhérence de C pour tout $t \in [0,1]$ (en tant que limite d'une suite de points de C).

On a ainsi démontré que l'adhérence $\overline{C}$ de C était convexe.

2. Contrairement à la question précédente, il faut impérativement traiter cet exerice en s'appuyant sur une **figure**.

❧ Soient a et b, deux points de l'intérieur de C : il existe donc un réel $r > 0$ tel que

$$B(a,r) \subset C \quad \text{et} \quad B(b,r) \subset C.$$

✍ *A priori, on a un rayon $r_1 > 0$ pour a et un rayon $r_2 > 0$ pour b. Nous avons choisi $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ en remarquant que*

$$B(a,r) \subset B(a,r_1) \quad \textit{et} \quad B(b,r) \subset B(b,r_2).$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose

$$z_t = (1-t)a + tb \in C$$

et on considère un point $\omega \in E$ tel que

$$\|\omega - z_t\| \leqslant r.$$

Nous allons montrer que $\omega \in C$ et donc que $B(z_t, r) \subset C$, ce qui prouvera que C est aussi un voisinage de z_t et donc que z_t appartient bien à l'intérieur de C.

On pose $u = \omega - z_t$ de telle sorte que $\omega = z_t + u$. On a

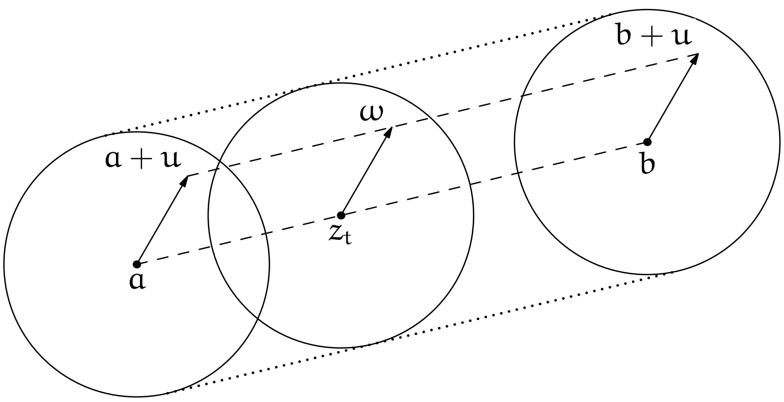
$$\big\|(a+u) - a\big\| = \|u\| \leqslant r \quad \text{et} \quad \big\|(b+u) - b\big\| = \|u\| \leqslant r$$

donc $(a+u) \in B(a,r) \subset C$ et $(b+u) \in B(b,r) \subset C$. Mais

$$\begin{aligned} \omega = (z_t + u) &= [(1-t)a + tb] + [(1-t)u + tu] \\ &= (1-t)(a+u) + t(b+u) \in C \end{aligned}$$

(en tant que combinaison convexe de deux points de C).

On a ainsi démontré que $B(z_t, r) \subset C$, ce qui signifie que C est un voisinage de z_t. Autrement dit, on a démontré que z_t appartenait à l'intérieur de C pour tout $t \in [0,1]$, ce qui prouve que l'intérieur de C est convexe.



> **1.** *Démontrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*
> **2.** *Déterminer les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$.*

1.

✍ *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie*

$$\mathbb{K}^d, \quad \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathbb{K}_d[X]...$$

les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Pour démontrer qu'une partie K est compacte,

- *Dans un premier temps, on vérifie qu'elle est fermée (le plus souvent en tant qu'image réciproque d'une partie fermée bien connue par une application continue) ;*
- *Dans un second temps, on vérifie qu'elle est bornée. Pour cela, il suffit de vérifier que les coordonnées des éléments de K relatives à une base quelconque sont majorées en valeur absolue par une constante.*

✍ *Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$ est une base de E, alors il existe d formes linéaires*

$$e_1^*, \dots, e_d^*$$

sur E, appelées formes linéaires coordonnées, qui donnent la décomposition de tous les vecteurs de E dans la base $\mathscr{B}$:

$$\forall\, x \in E, \qquad x = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(x) \cdot e_k.$$

(Les $e_k^*(x)$ ne sont qu'une écriture savante des coordonnées x_k du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.) On doit savoir que

$$\|x\|_{\mathscr{B}} = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \left|e_k^*(x)\right|$$

est une norme sur E.

Utiliser cette norme sur E, c'est en fait raisonner coordonnée par coordonnée dans la base $\mathscr{B}$.

Comme E est un espace de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes entre elles et en particulier, elles sont toutes équivalentes à $\|\cdot\|_{\mathscr{B}}$.

Ainsi, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur ℓ pour cette norme si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la k-ième coordonnée du vecteur x_n converge vers la k-ième coordoonée du vecteur ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, définie par

$$O_n(\mathbb{R}) = [M^\top.M = I_n].$$

C'est donc l'image réciproque du fermé $\{I_n\} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (fermé car singleton) par l'application continue

$$\left[M \mapsto M^\top.M\right],$$

donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✍ *Les applications $[M \mapsto M] = \mathrm{Id}$ et $\left[M \mapsto M^\top\right]$ sont continues (en tant qu'applications linéaires sur un espace de dimension finie), donc leur produit est continu.*

❧ D'autre part, les colonnes de $M \in O_n(\mathbb{R})$ sont des vecteurs unitaires (et deux à deux orthogonaux, mais cette remarque est hors sujet), donc

$$\forall\, M = (m_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R}),\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad |m_{i,j}| \leqslant 1.$$

✍ *Les $m_{i,j}$ sont ici les coordonnées de M relatives à la base canonique*

$$(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans la boule unité fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{can}$.

❧ En tant que partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, le groupe orthogonal est un compact.

$\boxed{2.}$ L'application $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (en tant qu'application polynomiale) et l'image de $O_n(\mathbb{R})$ est $\{-1, +1\}$.

Si $O_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, alors l'image de $O_n(\mathbb{R})$ par une application continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ serait un intervalle (Théorème des valeurs intermédiaires). Comme $\{-1, +1\}$ n'est pas un intervalle, le groupe $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs et possède donc au moins deux composantes connexes.

❧ Soient A et B, deux matrices orthosemblables : il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^\top.A.Q = B$.

Si A est dans la même composante connexe de $O_n(\mathbb{R})$ qu'une matrice C, alors il existe une application continue

$$f : [0,1] \to O_n(\mathbb{R})$$

telle que $f(0) = A$ et $f(1) = C$.

Comme l'application $[M \mapsto Q^\top.M.Q]$ est linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, elle est continue et, par composition de fonctions continues, l'application

$$g : [0,1] \to O_n(\mathbb{R})$$

définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad g(t) = Q^\top.f(t).Q$$

est continue. Comme $g(0) = Q^\top.A.Q = B$ et $g(1) = Q^\top.C.Q$, on en déduit que les matrices B et $Q^\top.C.Q$ sont dans la même composante connexe de $O_n(\mathbb{R})$.

✍ *Pour que g soit bien une application à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$ (et pas dans $GL_n(\mathbb{R})$), il faut que la matrice de passage Q soit orthogonale et pas seulement inversible.*

En effet, si Q est orthogonale, alors $Q^\top.f(t).Q = Q^{-1}f(t)Q$ est bien une matrice orthogonale (en tant que produit de matrices orthogonales).

Mais si Q est inversible sans être orthogonale, alors rien ne prouve que la matrice $Q^{-1}f(t)Q$ soit orthogonale :

$$[Q^{-1}f(t)Q]^\top.[Q^{-1}f(t)Q] = Q^\top.[f(t)]^\top \underbrace{(Q^{-1})^\top.Q^{-1}}_{=I_n\,?}.f(t).Q.$$

D'un point de vue géométrique, il s'agit d'assurer ici un changement de base orthonormée et pas un simple changement de base.

❧ Soit A, une matrice de rotation, c'est-à-dire une matrice orthogonale dont le déterminant est égal à 1.

▷ On doit connaître la forme réduite d'une rotation : il existe une matrice orthogonale Q, deux entiers p et q et q réels

$$0 < \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q \leqslant \pi$$

tels que

$$Q^\top.A.Q = \operatorname{Diag}\big(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, R(\theta_1), \dots, R(\theta_q)\big)$$

avec

$$\forall\, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

❧ Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$g(t) = \operatorname{Diag}\big(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, R\big[(1-t)\theta_1\big], \dots, R\big[(1-t)\theta_q\big]\big) \in SO_n(\mathbb{R}).$$

On a clairement $g(0) = Q^\top.A.Q$ et $g(1) = I_n$. De plus la fonction g est continue (puisque les n^2 coefficients de la matrice sont des fonctions continues de t).

Par conséquent, l'application $f = \big[t \mapsto Q.g(t).Q^\top\big]$ est une application continue (composée d'applications continues) de $[0,1]$ dans $SO_n(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = A$ et $f(1) = I_n$.

Cela montre que le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des rotations est connexe par arcs.

▷ Notons $O_n^-(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant est égal à -1. En particulier, la matrice
$$A_0 = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, -1)$$
appartient à $O_n^-(\mathbb{R})$.

✍ *Attention à ne pas se laisser emporter par son élan : $O_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas stable par produit, donc ce n'est pas un sous-groupe !*

▷ Si $A \in O_n^-(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale Q, deux entiers p et q, et q réels
$$0 < \theta_1, \dots, \theta_q \leqslant \pi$$
tels que
$$Q^\top.A.Q = \mathrm{Diag}\big(1, \dots, 1, R(\theta_1), \dots, R(\theta_q), -1\big).$$
Pour les raisons avancées précédemment, l'application
$$f = \Big[t \mapsto Q\,\mathrm{Diag}\big(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, R\big[(1-t)\theta_1\big], \dots, R\big[(1-t)\theta_q\big], -1\big)\Big]$$
est une application continue de $[0, 1]$ dans $O_n^-(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = A$ et
$$f(1) = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2q}, -1) = A_0.$$
Par conséquent, toutes les matrices $A \in O_n^-(\mathbb{R})$ sont dans la même composante connexe que la matrice A_0, ce qui prouve que $O_n^-(\mathbb{R})$ est aussi connexe par arcs.

❧ En conclusion, le groupe orthogonal compte exactement deux composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

> *On considère deux suites $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers les matrices A et B.*
> **1.** *On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices A_k et B_k sont semblables. Les matrices A et B sont-elles semblables ?*
> **2.** *Même question en supposant cette fois que les matrices A et B sont orthosemblables ?*

1. Par hypothèse, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice inversible P_k telle que

$$A_k P_k = P_k B_k.$$

✍ *Cette manière, peu habituelle, d'écrire la propriété de similitude va nous affranchir des questions relatives à la continuité de la fonction $[P \mapsto P^{-1}]$.*

On sait que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers A et B. Si la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers une matrice P et que cette matrice P est encore inversible, alors on a $AP = PB$ (par continuité de la multiplication matricielle, opération bilinéaire sur un espace de dimension finie), donc les matrices A et B sont bien semblables.

✍ *Mais le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert, pas un fermé, donc il se pourrait que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeât vers une matrice P non inversible. Et il se pourrait aussi que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne fût même pas convergente...*

❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ces deux matrices sont semblables : la matrice A_k est triangulaire, elle admet $n = 2$ valeurs propres distinctes, donc elle est semblable à la matrice diagonale B_k.

Les deux suites $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (et donc pour toutes les normes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$), respectivement vers

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = 0_2.$$

La matrice A est nilpotente d'indice 2 et la matrice B est diagonale, donc A et B ne sont pas semblables.

✍ *Une matrice de passage qui mène de A_k à B_k est, par exemple, la matrice*

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}.$$

La suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge mais sa limite n'est pas inversible...

Une autre matrice de passage possible est

$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette fois, la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente (car pas bornée).

2. On suppose ici que toutes les matrices de passage appartiennent au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Comme le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe une suite extraite $(P_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$.

En tant que suites extraites de suites convergentes, les deux suites $(A_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(B_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent vers A et B respectivement.

Comme la multiplication matricielle est une opération continue et que

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad A_{\varphi(j)} P_{\varphi(j)} = P_{\varphi(j)} B_{\varphi(j)},$$

on en déduit par passage à la limite que

$$AP = PB$$

et comme P est une matrice orthogonale, on en déduit que les limites A et B sont encore orthogonalement semblables.

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé réel. On considère un compact K (non vide) de E et une application $f : K \to K$ telle que

$$\forall\, x \neq y, \qquad \big\|f(x) - f(y)\big\| < \|x - y\|.$$

1. *Démontrer que l'application f admet un unique point fixe, qu'on notera ω.*

2. *On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ω.

1.

✍ *Le vecteur $\omega \in K$ est un point fixe de f si, et seulement si, $f(\omega) = \omega$, c'est-à-dire $\|f(\omega) - \omega\| = 0$. Comme*

$$\forall\, x \in K, \qquad \big\|f(x) - x\big\| \geqslant 0,$$

on peut voir les points fixes de f comme les points de K où $\big\|f(x) - x\big\|$ atteint la plus petite valeur possible.
Vous avez dit minimum *?*

❧ Pour tout $x \in K$, on pose

$$g(x) = f(x) - x.$$

En tant que différence de deux fonctions lipschitziennes, la fonction g est lipschitzienne.
En tant que fonction continue sur le compact $K \neq \varnothing$, elle atteint un minimum : il existe $z_0 \in K$ tel que

$$\forall\, x \in K, \quad \big\|f(x) - x\big\| \geqslant \big\|f(z_0) - z_0\big\|.$$

❧ Comme $f : K \to K$, alors $z_1 = f(z_0) \in K$ et $\boxed{\text{si}}$ $z_1 \neq z_0$, alors

$$\big\|f(z_1) - f(z_0)\big\| < \|z_1 - z_0\|$$

c'est-à-dire

$$\big\|f(z_1) - z_1\big\| < \big\|f(z_0) - z_0\big\| = \min_{x\in K} \big\|f(x) - x\big\|.$$

Comme $z_1 \in K$, c'est une contradiction manifeste et par suite $z_1 = z_0$: le point z_0 est donc un point fixe.
❧ Si z_0 et y_0 étaient deux points fixes *distincts*, alors

$$\begin{aligned} \big\|z_0 - y_0\big\| &= \big\|f(z_0) - f(y_0)\big\| && \text{(points fixes)} \\ &< \big\|z_0 - y_0\big\| && \text{(car } z_0 \neq y_0\text{)} \end{aligned}$$

ce qui est à nouveau contradictoire.
L'application f admet donc un unique point fixe dans K.

✍ *L'hypothèse de compacité est nécessaire. La fonction* $\sin : \,]0,1[\, \to \,]0,1[$ *vérifie les hypothèses de l'énoncé mais n'a pas de point fixe dans l'intervalle considéré.*

2. Comme $f : K \to K$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de points de K.

✍ *Bien que K soit compact, une suite d'éléments de K n'a aucune raison de converger...*
En revanche, une suite qui prend ses valeurs dans un compact et n'a qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.

❧ Si l'un des x_n est égal au point fixe ω, alors la suite est stationnaire : à partir d'un certain rang, *tous* les termes sont égaux à ω.
❧ On suppose donc que les x_n sont tous distincts de ω. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|x_{n+1} - \omega\| = \big\|f(x_n) - f(\omega)\big\| < \|x_n - \omega\|.$$

Une suite décroissante et positive converge vers une limite $\theta \geqslant 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \omega\| = \theta.$$

❧ Comme les x_n appartiennent tous au compact K, on peut en extraire une suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$. On en déduit que

$$\|\ell - \omega\| = \lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - \omega\| = \theta$$

mais aussi que

$$\left\|f(\ell) - f(\omega)\right\| = \lim_{k\to+\infty} \left\|f(x_{n_k}) - f(\omega)\right\|$$

(par continuité de f) et donc que

$$\left\|f(\ell) - \omega\right\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_{n_k+1} - \omega\| = \theta.$$

Ainsi,

$$\|\ell - \omega\| = \left\|f(\ell) - f(\omega)\right\|$$

ce qui prouve que $\ell = \omega$ (puisque l'inégalité n'est pas stricte).

❧ On vient ainsi de démontrer que ω était la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or une suite à valeurs *dans une partie compacte* qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence est convergente, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

> *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, une fonction continue telle que* $f(0) = 0$*. Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose*
>
> $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$
>
> **1.** *Démontrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0*.*
>
> **2.** *On suppose que* f *est dérivable en* 0*. Que dire de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

1. On sait que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0, \alpha], \quad \left|f(t)\right| = \left|f(t) - 0\right| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons un entier n assez grand pour que $0 < 1/n \leqslant \alpha$. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$0 < k^2/n \leqslant 1/n \leqslant \alpha$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon = \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \varepsilon.$$

Comme $n(n+1)/(2n^2)$ tend vers $1/2$, cette quantité est inférieure à 1 pour tout entier n assez grand.

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n| = |u_n - 0| \leqslant \varepsilon.$$

✍ *Je précise : on doit choisir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *assez grand pour que*

$$\frac{1}{n} \leqslant \alpha \qquad \textit{et que} \qquad \frac{n+1}{2n} \leqslant 1.$$

2. Si la fonction f est dérivable en 0, alors

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} f(0) + tf'(0) + o(t) = tf'(0) + t \cdot \theta(t)$$

où θ est une fonction de limite nulle en $t = 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme plus haut, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < t \leqslant \alpha, \quad \left|\theta(t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit encore n assez grand pour que $0 < 1/n \leqslant \alpha$, de telle sorte que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 < \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \alpha.$$

On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant \frac{k}{n^2} \cdot \varepsilon.$$

D'après l'Inégalité triangulaire,

$$\left|u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}.$$

Or on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$$

donc, pour tout entier n assez grand,

$$\left| nu_n - \frac{f'(0)}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right| \leqslant \varepsilon$$

(une suite qui tend vers $1/3$ est inférieure à 1 à partir d'un certain rang).

On vient ainsi de démontrer que

$$nu_n = \frac{f'(0)}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + o(1) = \frac{f'(0)}{3} + o(1)$$

et donc que

$$u_n = \frac{f'(0)}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Deux manières de résumer, selon la fonction f :

— Si $f'(0) \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f'(0)}{3n}$$

— mais si $f'(0) = 0$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n).$$

1. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, une application dérivable. On suppose que*

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad \big(f(x), f'(x)\big) \neq (0,0).$$

Démontrer que l'ensemble des zéros de f *est fini.*

2. *Soit* $q : [0,1] \to \mathbb{R}$*, une fonction continue. On considère une fonction* $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$*, non identiquement nulle, qui vérifie l'équation différentielle*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Démontrer que f *n'a qu'un nombre fini de zéros.*

1. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une infinité $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros *distincts* dans $[0,1]$ pour la fonction f.

D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in [0,1]$ et qui vérifie aussi

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x_{\varphi(k)}) = 0.$$

✍ *On peut aussi se permettre un peu de pédanterie et présenter* $[0,1]$ *comme une partie compacte de* $\mathbb{R}$.

❧ Comme les $x_{\varphi(k)}$ sont deux à deux distincts, seul l'un d'entre eux peut être égal à la limite ℓ et, à partir d'un certain rang, tous les $x_{\varphi(k)}$ sont distincts de ℓ.

❧ Par continuité de f,

$$f(\ell) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{\varphi(k)}) = 0.$$

Par dérivabilité de f (nouvelle application du Théorème de composition des limites) :

$$f'(\ell) = \lim_{x\to\ell} \frac{f(x)-f(\ell)}{x-\ell} = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(x_{\varphi(k)})-f(\ell)}{x_{\varphi(k)}-\ell} = 0.$$

On a donc $f(\ell) = f'(\ell) = 0$. Mais par hypothèse, l'équation

$$\big(f(x), f'(x)\big) = (0,0)$$

n'a pas de solution. Donc la fonction f n'admet qu'un nombre FINI de zéros sur $[0,1]$.

2. La fonction $F = (f, f') : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène canonique

$$\forall\, x \in [0,1], \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \qquad \text{avec} \qquad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $A : [0,1] \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est continue et le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour toute condition initiale $\big(x_0, (y_0, v_0)\big) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$, l'équation canonique admet une, et une seule solution Y telle que $Y(x_0) = (y_0, v_0)$.

En particulier, s'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $Y(x_0) = (0,0)$, alors Y est l'unique solution associée à la condition initiale $\big(x_0, (0,0)\big)$. Comme la fonction identiquement nulle est une solution évidente associée à cette condition initiale, on en déduit que $Y(x) = (0,0)$ pour tout $x \in [0,1]$.

Comme f n'est pas identiquement nulle, la fonction F n'est pas identiquement nulle et, par contraposée,

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad F(x) = \big(f(x), f'(x)\big) \neq (0,0).$$

D'après la question précédente, la fonction f n'a qu'un nombre fini de zéros sur le segment $[0,1]$.

rms130-574

> *Soient a et b, deux réels strictement positifs. Existence et calcul de l'intégrale*
> $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt.$$

Avec $0 < a < b$, la fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad f(t) = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$$

est continue sur $I =]0, +\infty[$.

Elle tend vers $(b-a)$ au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) \sim \frac{e^{-at}}{t} = o(e^{-at})$$

et comme $a > 0$, on en déduit que f est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

✍ *Le piège arrive immédiatement : aucune des deux fonctions*

$$\left[t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}\right] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}\right]$$

n'est intégrable au voisinage de 0 et il est donc impossible d'invoquer la linéarité de l'intégrale ! L'expression

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\,dt$$

est une forme indéterminée en $\infty - \infty$...

❧ Considérons $\varepsilon > 0$. Les fonctions considérées ici sont intégrables sur le sous-intervalle $[\varepsilon, +\infty[$ donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)\,dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\,dt.$$

On effectue alors les changements de variable affine $u = at$ (première intégrale) et $u = bt$ (deuxième intégrale)

$$\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

La relation de Chasles nous donne alors

$$\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Par convexité de la fonction exp, on sait que

$$\forall\, u > 0, \qquad \frac{1-u}{u} \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{1}{u}.$$

En intégrant cet encadrement, on obtient que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \ell n\, \frac{b}{a} + (b-a)\varepsilon \leqslant \int_\varepsilon^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \ell n\, \frac{b}{a}$$

et par conséquent

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} f(t)\,dt = \ell n\, \frac{b}{a}.$$

✍ *On pourrait être tenté de conclure en appliquant le théorème d'intégration des relations de comparaison mais je ne vois pas comment m'en sortir : pour résoudre les formes indéterminées qui apparaissent, il faudrait démontrer une variante du théorème, ce qui serait infiniment plus long que les calculs précédents.*

> *On pose*
> $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\,dt \qquad \textit{et} \qquad S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
> *Justifier l'existence de* I *et de* S*, puis exprimer* I *en fonction de* S*.*

La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{\ell n(1+t)}{t\sqrt{1+t}}$$

est évidemment continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Elle tend vers 1 au voisinage de 0 (équivalent bien connu) et

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ell n\, t}{t^{3/2}} = o\Big(\frac{1}{t^{5/4}}\Big)$$

donc f est bien intégrable sur I.

- La série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ est évidemment convergente !
- L'application φ définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur $]0, 1[$. Cette bijection est <u>décroissante.</u>

Il est clair que

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{1+t}(1+t)} = \frac{-\varphi^2(t)}{2\sqrt{1+t}}$$

et que

$$t = \frac{1-\varphi^2(t)}{\varphi^2(t)}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\ell n(1+t)}{t\sqrt{1+t}} &= \frac{-2\,\ell n\,\varphi(t)}{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi^2(t) \cdot \frac{-2\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}\\ &= 4 \cdot \frac{\ell n\,\varphi(t)}{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi'(t) = g\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

où on a posé

$$\forall\, 0 < u < 1, \quad g(u) = 4 \cdot \frac{\ell n\, u}{1-u^2}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur $]0, 1[$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^0 g(u)\,du.$$

Attention à l'ordre des bornes, notre changement de variable est décroissant !

Donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 4\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} -u^{2k}\,\ell n\, u\,du.$$

Les fonctions $h_k(u) = -u^{2k}\,\ell n\, u$ sont continues et positives sur $]0, 1[$; elles sont évidemment intégrables et en intégrant par parties, on trouve que

$$\int_0^1 -u^{2k}\,\ell n\, u\,du = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

La série de fonctions $\sum h_k$ est donc une série de fonctions intégrables qui converge simplement sur $]0, 1[$ vers une fonction intégrable sur $]0, 1[$ et comme la série de terme général positif

$$\sum \int_0^1 |h_k(u)|\,du$$

est convergente, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

✍ *Ceux qui connaissant $\zeta(2)$ et les astuces associées en déduiront que l'intégrale est égale à $\pi/2$.*

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Donner le domaine de définition de la somme*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

et étudier la continuité de la fonction S.

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Déterminer les limites de* S *au voisinage de* 0 *et au voisinage de* $+\infty$*. Donner, si possible, un équivalent de* $S(x)$*.*

$\boxed{\textbf{1.}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}.$$

❧ Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall\, \alpha > 0, \quad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

puisque $n^\alpha u_n(x) = \exp(-\sqrt{n}x + \alpha \ln n)$. Par comparaison avec les séries de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ est donc absolument convergente.

Pour tout $x \leqslant 0$, la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente.

La somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$$

est donc définie si, et seulement si, $x > 0$.

✍ *Il est important de bien comprendre le sens des croissances comparées ici : on peut facilement comparer* $\sum u_n(x)$ *à une série de Riemann (avec un exposant* α *arbitrairement grand) mais il est impossible de conclure en comparant cette série à une série géométrique : comme*

$$\forall\, 0 < q < 1, \quad \frac{u_n(x)}{q^n} = \exp(\underbrace{-n \ln q - \sqrt{n}x}_{\to+\infty})$$

on a seulement $q^n = o(u_n(x))$*...*

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est décroissante et positive :

$$\forall\, 0 < x < y, \qquad 0 < u_n(y) < u_n(x). \tag{$\star$}$$

Par conséquent,

$$\forall\, a > 0,\ \forall\, x \in [a, +\infty[,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a).$$

Comme le majorant est indépendant de x et que la série $\sum u_n(a)$ est convergente (puisque $a > 0$), on vient de prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $]0, +\infty[$ on en déduit que la somme S est continue sur $]0, +\infty[$.

✍ *Ici, il n'est pas nécessaire de recourir au théorème de convergence normale pour justifier que la somme* S *est continue.*

❧ *En effet, pour tout* $n \geqslant 1$*, la fonction* u_n *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$\forall\, 0 < a \leqslant x, \qquad \left|u_n'(x)\right| = \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}x} \leqslant \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}.$$

On peut alors déduire de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall\, 0 < a \leqslant x, y, \quad \left|u_n(x) - u_n(y)\right| \leqslant \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}\,|x - y|.$$

On vérifie sans peine (comparaison avec une série de Riemann) que la série

$$\sum \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}$$

est convergente. En sommant les encadrements précédents, on montre que

$$\forall\, x, y \in [a, +\infty[, \quad \left|S(x) - S(y)\right| \leqslant \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}\right] \cdot |x - y|$$

ce qui signifie que S est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

❧ *On peut remarquer que la constante de Lipschitz trouvée*

$$K_a = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}$$

est une fonction croissante *de a et que $K_0 = +\infty$ (osons cet abus de notation !), ce qui nous indique que S n'est sans doute pas lipschitzienne sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ (soit à cause d'une asymptote verticale, soit à cause d'une tangente verticale en $x = 0$, il est trop tôt pour décider).*

2. En sommant les encadrements $(\star)$, on obtient

$$\forall\, 0 < x < y, \qquad 0 < S(y) < S(x).$$

La somme S est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

✍ *Il serait aussi possible d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour démontrer que S est dérivable et constater que sa dérivée est négative sur $]0, +\infty[$. Mais ce serait bien plus long à justifier !*

La somme S tend donc vers une limite *finie* au voisinage de $+\infty$ et vers une limite, *finie ou infinie*, au voisinage droit de 0.

❧ La série de fonctions converge normalement sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$. On peut donc passer à la limite terme à terme, ce qui montre que $S(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. (On calculera un équivalent plus bas.)

En revanche, il est impossible de passer à la limite terme à terme au voisinage de 0 puisque la série des limites $\sum u_n(0^+)$ est divergente.

✍ *Jusqu'ici, on a exploité la monotonie des fonctions*

$$[x \mapsto u_n(x)]\,.$$

Nous allons maintenant exploiter la monotonie des suites

$$[n \mapsto u_n(x)]$$

pour comparer la somme $S(x)$ à des intégrales.

❧ Fixons $x > 0$ et considérons la fonction

$$f = \left[t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}\right]$$

qui est évidemment continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. Cette fonction f est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$ (puisque $f(t) = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$).

❧ L'application

$$\varphi = \left[t \mapsto x\sqrt{t}\right]$$

est évidemment une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I =]0, +\infty[$ sur I. On remarque alors (en factorisant par $\varphi'(t)$) que

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \frac{2}{x^2}.x\sqrt{t}.e^{-x\sqrt{t}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{t}} = g\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$$

où

$$\forall\, u \in I, \quad g(u) = \frac{2}{x^2}.u.e^{-u}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I (ce qu'on savait déjà !) et

$$\forall\, a \geqslant 0, \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\sqrt{a}\,x}^{+\infty} g(u)\,du$$
$$= \frac{2}{x^2} \cdot (1 + \sqrt{a}\,x) \cdot \exp(-\sqrt{a}\,x). \qquad \text{(IPP)}$$

❧ On fait une figure pour constater que

$$-1+\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

c'est-à-dire (avec $a = 0$)

$$\forall\, x > 0,\quad \frac{2}{x^2} - 1 \leqslant S(x) \leqslant \frac{2}{x^2}.$$

Cet encadrement nous dit que

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

et en particulier que $S(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

❧ Comme on sait que la somme S est positive sur $[0, +\infty[$, cet encadrement nous dit aussi que

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

et confirme en particulier que $S(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *Une étude plus fine doit être menée au voisinage de $+\infty$. Ce qui suit est assez représentatif de la situation générale : dans une somme d'exponentielles, c'est le plus gros terme qui donne l'équivalent.*

❧ Pour tout $x > 0$, on a

$$S(x) = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

et comme précédemment (avec $a = 1$ cette fois)

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{2(x+1)}{x^2}\cdot e^{-x}.$$

Cet encadrement nous donne

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}\cdot e^{-x} = o(e^{-x})$$

et finalement

$$S(x) = e^{-x} + o(e^{-x}) \sim e^{-x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

rms130-600

Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *une fonction continue et intégrable sur* $\mathbb{R}_+$. *On considère une solution* f *de l'équation différentielle*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + \big(1+u(x)\big)y(x) = 0$$

et on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,dt.$$

1. *Former une équation différentielle linéaire vérifiée par* g.

2. *Démontrer qu'il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \big|f(x)\big| \leqslant x + \int_0^x \big|u(t)f(t)\big|\,dt.$$

3. *Démontrer que la fonction* f *est bornée.*

1. On commence par un peu de trigonométrie pour y voir plus clair :

$$g(x) = f(x) + \sin x \int_0^x \cos t u(t)f(t)\,dt - \cos x \int_0^x \sin t u(t)f(t)\,dt.$$

Comme les fonctions

$$[t \mapsto \cos t u(t)f(t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto \sin t u(t)f(t)]$$

sont continues, on peut appliquer le Théorème fondamental et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$g'(x) = f'(x) + \cos x \int_0^x \cos t u(t)f(t)\,dt + \sin x \int_0^x \sin t u(t)f(t)\,dt$$

(en dérivant les deux produits, il apparaît deux termes qui se compensent exactement). Le Théorème fondamental, toujours lui, nous dit alors que g est en fait de classe $\mathscr{C}^2$ avec

$$\begin{aligned} g''(x) = f''(x) - \sin x \int_0^x \cos t u(t)f(t)\,dt + \cos x \int_0^x \sin t u(t)f(t)\,dt \\ + (\cos^2 x + \sin^2 x)u(x)f(x). \end{aligned}$$

Or, par hypothèse,

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f''(x) = -f(x) - u(x)f(x)$$

donc

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g''(x) = -g(x).$$

2. Comme g est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (équation du pendule harmonique), on en déduit que g est bornée : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \big|g(x)\big| \leqslant c.$$

Par définition de g et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \forall\, x \geqslant 0, \quad \big|f(x)\big| &= \left|g(x) - \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \big|g(x)\big| + \int_0^x \big|\sin(x-t)u(t)f(t)\big|\,dt \\ &\leqslant c + \int_0^x \big|u(t)f(t)\big|\,dt. \end{aligned}$$

3. Nous allons maintenant démontrer l'**inégalité de GRÖNWALL**.

❧ Pour tout $x \geqslant 0$, on pose

$$\Phi(x) = \left[c + \int_0^x |u(t)|\,|f(t)|\,dt\right] \cdot \exp\left(-\int_0^x |u(t)|\,dt\right).$$

D'après le Théorème fondamental, la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\Phi'(x) = |u(x)| \cdot \left[|f(x)| - c - \int_0^x |u(t)|\,|f(t)|\,dt\right] \cdot \exp\left(-\int_0^x |u(t)|\,dt\right).$$

Le premier et le dernier facteur sont évidemment positifs ; le second facteur est négatif (d'après ce qui précède) ; par conséquent, la fonction Φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Phi(x) \leqslant \Phi(0) = c.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \big|f(x)\big| \leqslant c \cdot \exp\left(\int_0^x |u(t)|\,dt\right).$$

Or la fonction u est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction croissante

$$\left[x \mapsto \int_0^x |u(t)|\,dt\right]$$

est bornée et comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est bien bornée.

✍ *Cette démonstration est très astucieuse : comment peut-on penser à étudier cette fonction auxiliaire Φ si on ne connaît pas la démonstration ?*

❧ Reprenons l'encadrement établi à la question précédente et multiplions par $|u(x)|$ pour obtenir une inéquation différentielle :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad |u(x)||f(x)| \leqslant c|u(x)| + |u(x)| \int_0^x |u(t)||f(t)|\,dt.$$

Cette relation nous suggère d'étudier la fonction

$$\Psi = \left[x \mapsto \int_0^x |u(t)||f(t)|\,dt\right],$$

qui est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi'(x) = |u(x)||f(x)|.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi'(x) - |u(x)| \cdot \Psi(x) = m(x)$$

où m est une fonction telle que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad m(x) \leqslant c \cdot |u(x)|.$$

✍ *C'est assez astucieux, j'en conviens ! Une inéquation différentielle est en fait une équation différentielle pour laquelle le second membre n'est pas vraiment connu : on connaît seulement un majorant du second membre...*

On sait résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre : il existe une fonction dérivable K telle que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi(x) = K(x) \cdot \exp V(x)$$

où V est une primitive de $|u|$, par exemple :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad V(x) = \int_0^x |u(t)|\,dt.$$

Comme $\Psi(0) = 0$, on a $K(0) = 0$ et la méthode de variation de la constante nous dit que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad K'(x) = m(x) \cdot \exp\big[-V(x)\big].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi(x) &= \exp V(x) \cdot \int_0^x \exp\big[-V(t)\big] \cdot m(t)\,dt \\ &\leqslant \exp V(x) \cdot \int_0^x \exp\big[-V(t)\big] \cdot c \cdot |u(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Comme la fonction u est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la primitive V est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et le produit $\exp[-V(t)] \cdot |u(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable).

On en déduit que Ψ est majorée et d'après la deuxième question,

$$\forall x \geqslant 0, \quad |f(x)| \leqslant c + \Psi(x)$$

donc la fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{E}$$

1. *On suppose que f est une solution bornée de (E). Démontrer que sa dérivée f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.*

2. *Démontrer que (E) admet des solutions non bornées.*

1. Si f est une solution bornée de (E), alors $f'' = -qf$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (produit d'une fonction intégrable q par une fonction continue et bornée f). Or, comme f' est de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$$

et par conséquent, la dérivée f' tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Si f' tend vers une limite $\ell \neq 0$, alors on déduit du Théorème fondamental

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (si $\ell > 0$) ou vers $-\infty$ (si $\ell < 0$) lorsque x tend vers $+\infty$.

✍ *En revanche, si f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est une forme indéterminée lorsque x tend vers $+\infty$ (cf les fonctions $[t \mapsto t^\alpha]$).*

Comme f est supposée bornée, on en déduit que la dérivée f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Une fonction $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $Y = (y, y') \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ est solution de l'équation réduite

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \text{avec} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{R}$$

Comme $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue, alors $A : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est continue, donc l'équation réduite est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus et on peut appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz.

❧ L'ensemble des solutions de (R) est donc un plan vectoriel et on peut donc considérer une base (F, G) de ce plan. D'après la réduction de (E), il existe deux solutions f et g de (E) telles que $F = (f, f')$ et $G = (g, g')$.

Si toutes les solutions de (E) étaient bornées, alors f et g seraient bornées et, d'après la première question, leurs dérivées f' et g' tendraient vers 0 au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, le wronskien

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

tendrait vers 0 au voisinage de $+\infty$ alors que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad W(x) \neq 0$$

puisque (F, G) est une base de l'espace des solutions de (R).

D'après le cours, tous les wronskiens de (R) vérifient l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) = \big[\operatorname{tr} A(x)\big]y(x)$$

et comme, ici, $\operatorname{tr} A(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que les wronskiens sont constants.

Une fonction constante non nulle ne peut tendre vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc il est impossible que toutes les solutions de (E) soient bornées.

Il existe donc au moins une solution de (E) qui n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

✍ *Il est intéressant de comparer ce résultat à l'équation du pendule harmonique : si la fonction q est strictement positive et constante, alors toutes les solutions de (E) sont bornées mais la fonction q n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.*

Soient X et Y, deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

Soit $E \subset \mathbb{R}$, le **support** de la loi de X, c'est-à-dire l'ensemble (fini ou dénombrable, puisque E est une variable aléatoire discrète) des réels x pour lesquels

$$\mathbf{P}(X = x) > 0.$$

✍ *Le support de la loi de X est l'ensemble des* valeurs qui sont vraiment prises *par la variable X. On peut considérer une variable de loi géométrique comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ mais son support est $\mathbb{N}^*$. De même, on peut considérer une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ mais son support est $[\![0, n]\!]$.*

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$Y(\omega) = f\big(X(\omega)\big)$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in E, \quad X(\omega) = x \implies Y(\omega) = f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall\, x \in E, \quad [X = x] \subset [Y = f(x)]$$

et donc

$$\forall\, x \in E, \quad [X = x] \cap [Y = f(x)] = [X = x].$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}\big(X = x, Y = f(x)\big) = \mathbf{P}(X = x)$$

et par hypothèse d'indépendance

$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}(X = x)\,\mathbf{P}\big(Y = f(x)\big) = \mathbf{P}(X = x).$$

Or $\mathbf{P}(X = x) > 0$ pour tout $x \in E$ (par définition même du support), donc

$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}\big(Y = f(x)\big) = 1.$$

✍ *Si x n'est pas dans le support de la loi de X, alors on ne peut pas simplifier par $\mathbf{P}(X = x)$ (division par zéro).*

❧ Cette propriété signifie deux choses :
— la variable aléatoire Y n'est ni variable, ni aléatoire : elle est presque sûrement constante (loi de Dirac) ;
— la fonction f prend la même valeur (= la valeur de Y) en chaque point du support de la loi de X.

✍ *Cette conclusion n'est pas extraordinaire car l'hypothèse de départ était paradoxale : il est tout de même étonnant de supposer que X et Y soient* indépendantes *alors que $Y = f(X)$ est* déterminée *par X.*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suivent toutes la même loi. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $R_n(\omega)$, le cardinal de l'ensemble aléatoire

$$\{X_k(\omega),\ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

1. *Démontrer que*

$$\forall\, a \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(R_n) \leqslant a + n\,\mathbf{P}(X_1 \geqslant a).$$

2. *En déduire que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

3. *On suppose que les X_n sont des variables d'espérance finie. Démontrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

1.

✍ *On cherche ici à estimer le nombre de valeurs distinctes d'un échantillon. La démarche qui suit est "classique" en calcul des probabilités, mais elle me semble assez ardue à justifier dans le cadre du programme.*

On notera qu'on ne fait aucune hypothèse sur la loi de l'échantillon — il n'est par exemple pas utile de supposer que les X_k sont indépendantes.

Comme $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires, alors, Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad Y_k(\omega) = \mathbb{1}_{[k \in \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}]}.$$

Les Y_k sont des applications de Ω dans $\{0, 1\}$ et

$$[Y_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k] \in \mathcal{A},$$

donc les Y_k sont bien des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

✍ *Que les variables aléatoires X_k soient, ou non, indépendantes, les variables Y_k n'ont à peu près aucune chance d'être indépendantes.*

❧ La variable aléatoire Y_k prend la valeur 1 si, et seulement si, l'entier k est une valeur prise par l'une (au moins) des variables aléatoires de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

Le nombre R_n de valeurs distinctes prises par l'échantillon est donc la somme de ces variables aléatoires de Bernoulli.

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad R_n(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} Y_k(\omega).$$

✍ *Comme l'échantillon compte n variables, il y a au plus n valeurs prises pour chaque ω et il est donc clair que cette série de variables aléatoires converge simplement sur Ω.*

❧ On peut en déduire que R_n est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note E_r, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le cardinal est égal à r. Puisqu'il existe une surjection canonique de $\mathbb{N}^r$ sur E_r et que $\mathbb{N}^r$ est dénombrable, l'ensemble E_r est dénombrable et comme les Y_k sont des variables aléatoires, alors

$$[R = r] = \bigsqcup_{\{k_1, \dots, k_r\} \in E_r} \left[\left(\bigcap_{i=1}^{r} [Y_{k_i} = 1] \right) \cap \left(\bigcap_{k \notin \{k_1, \dots, k_r\}} [Y_k = 0] \right) \right] \in \mathcal{A},$$

✍ *Si on pense en termes de* ***fonction de répartition****, il y a une manière plus simple de vérifier que R_n est une variable aléatoire. En effet,*

$$\forall\, r \in \mathbb{N}^*, \quad [R \leqslant r] = \bigcup_{F \in E_r} \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [X_k \in F] \in \mathcal{A}.$$

Comme $[R = 1] = [R \leqslant 1]$ et que $[R = r] = [R \leqslant r] \cap [R \leqslant r-1]^c$ pour tout $r \geqslant 2$, on en déduit que $[R = r] \in \mathcal{A}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{E}(Y_k) = \mathbf{P}\big(k \in \{X_1, \dots, X_n\}\big)$$
(espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli) et comme
$$[k \in \{X_1, \dots, X_n\}] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k],$$
alors
$$\mathbf{E}(Y_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = k) = n\,\mathbf{P}(X_1 = k)$$
puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ont toutes même loi.

La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, donc la série $\sum \mathbf{P}(X_1 = k)$ converge (propriété de σ-additivité). Par comparaison de série de terme général positif, la série $\sum \mathbf{E}(Y_k)$ est donc convergente.

❧ On sait que $1 \leqslant R_n(\omega) \leqslant n$ pour tout $\omega \in \Omega$. En tant que variable aléatoire bornée, R_n est une variable aléatoire d'espérance finie. On admet que
$$\mathbf{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big(k \in \{X_1, \dots, X_n\}\big).$$

✍ *Le Théorème de convergence croissante nous assure que : si une série de variables aléatoires positives converge presque sûrement sur Ω, alors l'espérance de la somme est égale à la somme des espérances (que cette espérance soit, ou non, finie).*

D'après la relation de Chasles, pour tout $a \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{a-1} \mathbf{E}(Y_k) + \sum_{k=a}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_k) \qquad \leqslant \sum_{k=0}^{a-1} 1 + \sum_{k=a}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X_1 = k) = a + n\,\mathbf{P}(X_1 \geqslant a).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme
$$\lim_{a\to+\infty} \mathbf{P}(X_1 \geqslant a) = 0$$
par continuité décroissante, il existe $a_0 > 0$ tel que
$$0 \leqslant \mathbf{P}(X_1 \geqslant a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Comme a_0/n tend vers 0, il existe aussi un rang n_0 tel que
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{a_0}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
D'après la première question,
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{\mathbf{E}(R_n)}{n} \leqslant \varepsilon$$
ce qui prouve que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *Cette démonstration est dans le cours : c'est ainsi qu'on démontre que le théorème de sommation des relations de comparaison avec o.*

3. Si X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la série $\sum n\,\mathbf{P}(X = n)$ est convergente. En particulier, pour tout $N \geqslant 1$,
$$\sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \geqslant N \sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = N\,\mathbf{P}(X \geqslant N) \geqslant 0$$
et comme le reste d'une série convergente tend vers 0, on en déduit que
$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant N) = o\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

❧ Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, a > 0, \quad 0 \leqslant \mathbf{E}(R_n) \leqslant a + \frac{n\varepsilon}{a}.$$

En étudiant les variations de

$$\left[a \mapsto a + \frac{n\varepsilon}{a}\right]$$

sur $]0, +\infty[$, on constate que le minimum est atteint pour $a = \sqrt{n\varepsilon}$ et que ce minimum est égal à $2\sqrt{n\varepsilon}$. On en déduit donc que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \mathbf{E}(R_n) \leqslant 2\sqrt{n\varepsilon}$$

et donc que $\mathsf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *Cette démonstration est classique : elle permet de déduire l'inégalité de Tchernov de l'inégalité de Markov.*

> *Soient E, un espace vectoriel normé et A, une partie ouverte de E. Démontrer que*
>
> $$U = \bigcup_{a \in A} B_f(a, 1)$$
>
> *est un ouvert.*
> *NB : $B_f(a, r)$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r.*

Soit $x_0 \in U$. Il existe donc un point $a_0 \in A$ tel que

$$\|x_0 - a_0\| \leqslant 1.$$

✍ *Il faut faire une figure ! Deux cas doivent être distingués : ou bien $\|x_0 - a_0\| < 1$; ou bien $\|x_0 - a_0\| = 1$.*

❧ Si $\|x_0 - a_0\| = r < 1$, alors

$$\Big[\|x - x_0\| \leqslant \frac{1-r}{2}\Big] \subset \big[\|x - a_0\| \leqslant 1\big] \subset U,$$

car

$$\|x - a_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - a_0\| \leqslant \frac{1-r}{2} + r = \frac{1+r}{2} < 1.$$

Cela prouve en particulier que U est un voisinage de x_0.
❧ Supposons maintenant que

$$\|x_0 - a_0\| = 1. \tag{8}$$

Comme A est un ouvert et que $a_0 \in A$, alors A est un voisinage de a_0 et il existe donc un réel $\rho > 0$ tel que la boule ouverte

$$\big[\|x - a_0\| < \rho\big] \tag{9}$$

soit contenue dans A. On considère alors le point b_0 défini par

$$b_0 = a_0 + \frac{\rho}{2} \cdot (x_0 - a_0). \tag{10}$$

Comme

$$\|b_0 - a_0\| = \frac{\rho}{2} < \rho, \tag{11}$$

on déduit de (9) que $b_0 \in A$. Par conséquent, la boule fermée

$$\|x - b_0\| \leqslant 1 \tag{12}$$

est contenue dans U. En outre, par (10),

$$\|b_0 - x_0\| = \Big\|\Big(1 - \frac{\rho}{2}\Big) \cdot (a_0 - x_0)\Big\| = 1 - \frac{\rho}{2}. \tag{13}$$

Considérons alors la boule fermée définie par

$$B_0 = \Big[\|x - x_0\| \leqslant \frac{\rho}{4}\Big]. \tag{14}$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $x \in B_0$,

$$\|x - b_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - b_0\| \leqslant 1 - \frac{\rho}{4} < 1.$$

On a démontré qu'il existait $b_0 \in A$ tel que

$$\big[\|x - x_0\| \leqslant \rho/4\big] \subset \big[\|x - b_0\| \leqslant 1\big] \subset U.$$

Dans ce second cas, U est aussi un voisinage de x_0.
❧ En conclusion, U est un ouvert de E en tant que voisinage de chacun de ses points.

✍ ***Variante** — Quelle que soit la nature de la partie A, la partie*

$$V = \bigcup_{a \in A} \big[\|x - a\| < 1\big]$$

est une partie ouverte de E, en tant qu'union (infinie) de parties ouvertes : on doit savoir que chaque boule ouverte est une partie ouverte.

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. *On considère une application* φ *continue et positive sur* $[0,1]$ *et telle que*

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 1$$

et on pose

$$\forall\, f \in E, \qquad N(f) = \big|f(0)\big| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt,$$
$$N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt.$$

Démontrer que N *et* N_φ *sont des normes équivalentes sur* E.

Comme f et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $|f'|$ et $f\cdot\varphi$ sont continues sur le segment $[0,1]$. Les deux intégrales sont donc bien définies, donc N et N_φ sont deux applications de E dans $\mathbb{R}_+$.

Il est clair que ces deux applications sont positivement homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire.

❧ Si $N(f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et

$$\int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = 0.$$

Comme $|f'|$ est une fonction continue et positive dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle, cette fonction est identiquement nulle. Par conséquent, la fonction f est constante sur l'intervalle $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, la fonction f est identiquement nulle.

❧ Si $N_\varphi(f) = 0$, alors f est constante sur $[0,1]$ (selon le raisonnement précédent) et

$$0 = \int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt = f(0)\cdot \underbrace{\int_0^1 \varphi(t)\,dt}_{\neq 0}$$

donc $f(0) = 0$ et la fonction constante f est donc identiquement nulle.

Bref : N et N_φ sont bien deux normes sur E.

❧ D'après le Théorème fondamental (puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$),

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|f(0)\big| + \int_0^x \underbrace{\big|f'(t)\big|}_{\geqslant 0}\,dt \leqslant \big|f(0)\big| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = N(f).$$

Par passage au sup,

$$\|f\|_\infty \leqslant N(f).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \big|f(t)\big|\cdot\big|\varphi(t)\big|\,dt$$

et comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big|\cdot\big|\varphi(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty\cdot\big|\varphi(t)\big|,$$

on déduit de la positivité de l'intégrale que

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \big|\varphi(t)\big|\,dt\cdot\|f\|_\infty$$

puis que

$$\forall\, f \in E, \qquad N_\varphi(f) \leqslant \int_0^1 \left|\varphi(t)\right| dt \cdot \|f\|_\infty + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 \left|\varphi(t)\right| dt + 1\right) \cdot N(f).$$

La norme N_φ est donc dominée par la norme N.

✍ *C'est seulement dans la réciproque qui suit qu'on va vraiment utiliser les propriétés des* ***densités de probabilité*** *: jusqu'ici, on a seulement utilisé que φ était continue par morceaux sur $[0,1]$.*

❧ Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle atteint un minimum $f(m)$ et un maximum $f(M)$ et donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(m) \leqslant f(t) \leqslant f(M).$$

Comme φ est positive, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(m)\varphi(t) \leqslant f(t)\varphi(t) \leqslant f(M)\varphi(t)$$

et en intégrant cet encadrement sur $[0,1]$:

$$f(m) \leqslant \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt \leqslant f(M).$$

On a donc prouvé que

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt = [f(m), f(M)].$$

Or l'image de l'intervalle $[0,1]$ par l'application continue f est un intervalle et l'image d'un compact (ici, le segment $[0,1]$) est un compact, donc

$$f_*([0,1]) = [f(m), f(M)].$$

Par conséquent, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt = f(x_0).$$

❧ Un coup d'astuce taupinale, un coup d'inégalité triangulaire :

$$\left|f(0)\right| \leqslant \left|f(0) - f(x_0)\right| + \left|f(x_0)\right|.$$

D'après le Théorème fondamental et l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left|f(0) - f(x_0)\right| = \left|\int_0^{x_0} f'(t)\, dt\right| \leqslant \int_0^{x_0} \left|f'(t)\right| dt \leqslant \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt.$$

On en déduit enfin que

$$\left|f(0)\right| \leqslant \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt + \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt\right| = N_\varphi(f).$$

Par conséquent,

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) \leqslant 2N_\varphi(f)$$

et les deux normes sont équivalentes.

rms130-687

Soient $(E, \|\cdot\|)$*, un espace vectoriel normé ;* A*, une partie non vide de* E *et* k*, un réel strictement positif. On considère une application* $f : A \to \mathbb{R}$ *qu'on suppose* k*-lipschitzienne et on pose*

$$\forall\, x \in E, \quad g(x) = \inf_{y\in A} \big\{k\|x-y\| + f(y)\big\}.$$

$\boxed{\mathbf{1.}}$ *Démontrer que* g *est bien définie et qu'on peut prolonger* f *par* g *sur* E.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ *Démontrer que* g *est* k*-lipschitzienne.*

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Considérons $x \notin A$ et fixons $x_0 \in A$ (arbitrairement). Comme f est k-lipschitzienne,

$$\big|f(x_0) - f(y)\big| \leqslant k\|x_0 - y\|$$

et donc, pour tout $y \in A$,

$$\begin{aligned} k\|x-y\| + f(y) &\geqslant k\|x-y\| + \big[f(x_0) - k\|x_0 - y\|\big] \\ &\geqslant k\big(\|x-y\| - \|x_0-y\|\big) + f(x_0) \\ &\geqslant k\|x - x_0\| + f(x_0). && \text{(inég. triang.)} \end{aligned}$$

Comme le minorant est indépendant de $y \in A$, on en déduit que l'ensemble

$$\big\{k\|x-y\| + f(y),\ y \in A\big\}$$

est non vide (puisque $A \neq \varnothing$) et minoré. Cet ensemble possède donc une borne inférieure et l'application g est donc bien définie sur A^c.

❧ Considérons maintenant $x \in A$. En reprenant le calcul précédent avec $x_0 = x$ (possible car $x \in A$ et $x_0 \in A$ avait été choisi arbitrairement), on obtient

$$\forall\, y \in E, \quad k\|x-y\| + f(y) \geqslant k\|x-x\| + f(x) = f(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in A, \quad g(x) = \min_{y\in A}\big\{k\|x-y\| + f(y),\ y \in A\big\} = f(x)$$

ce qui signifie que g est bien un prolongement de f à E tout entier.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Soient x_1, x_2 dans E.

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, y \in A, \quad k\|x_1 - y\| + f(y) \leqslant k\|x_1 - x_2\| + k\|x_2 - y\| + f(y).$$

La borne inférieure étant un minorant, on en déduit que

$$\forall\, y \in A, \quad g(x_1) \leqslant k\|x_1 - x_2\| + k\|x_2 - y\| + f(y)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, y \in A, \quad g(x_1) - k\|x_1 - x_2\| \leqslant k\|x_2 - y\| + f(y).$$

Le minorant est indépendant de $y \in A$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$g(x_1) - k\|x_1 - x_2\| \leqslant \inf_{y\in A}\big\{k\|x_2 - y\| + f(y)\big\} = g(x_2).$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, x_1, x_2 \in E, \quad g(x_1) - g(x_2) \leqslant k\|x_1 - x_2\|.$$

Par symétrie, on en déduit que

$$\forall\, x_1, x_2 \in E, \quad g(x_2) - g(x_1) \leqslant k\|x_2 - x_1\| = \|x_1 - x_2\|$$

et donc que g est k-lipschitzienne :

$$\forall\, x_1, x_2 \in E, \quad \big|g(x_2) - g(x_1)\big| \leqslant k\|x_1 - x_2\|.$$

✍ *En cours, cette démonstration a servi à prouver que l'application* $[x \mapsto d(x, A)]$ *est* 1*-lipschitzienne pour toute partie non vide de* E.

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$*, on pose*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 f(xt)\,\ell n\, t\,dt.$$

1. *On suppose que* $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *est muni de la norme uniforme :*

$$\forall\, g \in E, \qquad \|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \big|g(x)\big|.$$

Démontrer que T *est un endomorphisme continu de* E*.*

2. *On suppose que* $F = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *est muni de la norme :*

$$N(f) = \big|f(0)\big| + \|f'\|_\infty.$$

2. a. *Démontrer que la restriction* $T : (F, N) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$ *est continue.*

2. b. *Démontrer que* $T(f) \in F$ *pour tout* $f \in F$ *et calculer* $[T(f)]'(0)$*.*

1. Pour tout $t \in I =]0,1]$ et tout $x \in \Omega = [0,1]$, on pose

$$\varphi(x,t) = f(xt)\,\ell n\, t.$$

Régularité – Pour tout $t \in I$, il est clair que

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xt & \longmapsto & f(xt)\,\ell n\, t \end{array}$$

est une fonction continue sur Ω.
Intégrabilité – Pour tout $x \in \Omega$, il est clair que la fonction $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur l'intervalle I.

La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée sur cet intervalle. On en déduit que

$$\varphi(x,t) \underset{t\to 0}{=} \mathcal{O}(\ell n\, t)$$

et donc que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est intégrable sur $I = [0,1[$.
Domination – Pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in I$, il est clair que

$$\big|\varphi(x,t)\big| = \big|f(xt)\,\ell n\, t\big| \leqslant \|f\|_\infty \cdot |\ell n\, t|.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$ et intégrable sur $I =]0,1]$ de façon claire.

D'après le Théorème de continuité, la fonction $T(f)$ est bien continue sur $\Omega = [0,1]$.

- La linéarité de T est claire, donc T est un endomorphisme de E.
- En intégrant l'inégalité de domination,

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \big|T(f)(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \int_0^1 |\ell n\, t|\,dt = \|f\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$, donc on peut passer à la borne supérieure :

$$\forall\, f \in E, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

Cela prouve bien que

$$T : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$$

est continue.

✍ *Si* f *est constante, alors* $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$*, donc* 1 *est la constante de Lipschitz optimale pour* T *(alias la norme d'application linéaire continue).*

2. a. On *admet* ici que N est effectivement une norme sur F (exercice classique).

D'après le Théorème fondamental,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \left|f(x)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^x \underbrace{\|f'\|_\infty}_{\geqslant 0} \, dt \leqslant N(f).$$

Par passage au sup, on en déduit que

$$\forall\, f \in F, \quad \|f\|_\infty \leqslant N(f)$$

et d'après la première question

$$\forall\, f \in F, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \leqslant N(f)$$

ce qui prouve que T est aussi une application linéaire continue de (F, N) dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

2. b. **Régularité –** Pour tout $t \in I$, il est clair que $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f'(xt).t\,\ell n\, t.$$

Intégrabilité – Pour tout $x \in \Omega$, on a déjà démontré que la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x,t)]$$

était intégrable sur I.

Il est clair que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est continue sur I. La fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée sur cet intervalle et

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \|f'\|_\infty \cdot |t\,\ell n\, t|.$$

Comme la fonction $[t \mapsto t\,\ell n\, t]$ est intégrable sur $]0,1]$ (continue avec une limite finie au voisinage de 0), on en déduit que, pour tout $x \in \Omega$,

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I.

Domination – La domination a déjà été prouvée : on a explicité un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et intégrable sur $I =]0,1]$!

D'après le Théorème de dérivation, la fonction $T(f)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad [T(f)]'(x) = \int_0^1 f'(xt)\, t\,\ell n\, t\, dt.$$

❧ En particulier,

$$[T(f)]'(0) = f'(0) \int_0^1 t\,\ell n\, t\, dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 t\,\ell n\, t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\,\ell n\, t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 t\, dt = \frac{-1}{4}$$

donc $[T(f)]'(0) = {}^{-f'(0)}/_{4}$.

✍ *La fonction ℓn est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$, mais pas sur $[0,1]$. Pour bien faire, il faudrait intégrer par parties sur $[\alpha,1]$ et faire ensuite (seulement ensuite !) tendre α vers 0 en justifiant clairement la convergence de chaque terme.*

> *Soit* $M : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, une application dérivable.*
> **1.** *Démontrer que l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = M(x)^\top.M(x)$$
>
> *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et donner l'expression de* $f'(x)$*.*
> **2.** *Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$*, une application continue à valeurs dans l'espace des matrices antisymétriques et* $M : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, une application de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle que*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad M'(x) = A(x)M(x).$$
>
> *On suppose que* $M(0) \in SO_n(\mathbb{R})$*. Démontrer que*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad M(x) \in SO_n(\mathbb{R}).$$

1. Dire que l'application $M : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad M(x) = \big(m_{i,j}(x)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est dérivable signifie que, quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$, l'application

$$m_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est dérivable. Dans ce cas,

$$M'(x) = \big(m'_{i,j}(x)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

✍ *Quel que soit l'espace vectoriel* E *de dimension finie, si on connaît une base* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$ *de* E*, une application* f *à* *<u>valeurs</u>* *dans* E *est définie par ses composantes relatives à la base* $\mathscr{B}$ *:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{d} f_k(x) \cdot e_k$$

qui sont des fonctions à valeurs scalaires et la fonction f *est continue (resp. dérivable, resp. de classe* $\mathscr{C}^k$*) si, et seulement si, ses* d *composantes* $f_1, \dots, f_d$ *sont continues (resp. dérivables, resp. de classe* $\mathscr{C}^k$*).*

❧ L'application f est alors définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}(x)m_{k,j}(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Comme chacune de ses n^2 composantes est dérivable, l'application f est dérivable et sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = M'(x)^\top.M(x) + M(x)^\top.M'(x).$$

✍ *On aurait pu aussi remarquer que l'application*

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$
$$(P, Q) \longmapsto P^\top.Q$$

était bilinéaire et par conséquent de classe $\mathscr{C}^\infty$ *(puisque* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel de dimension finie). D'après le cours de calcul différentiel,*

$$\forall\, (P_0, Q_0, H, K) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^4, \quad d\Phi(P_0, Q_0)(H, K) = H^\top.Q_0 + P_0^\top.K$$

et on conclut avec le Théorème de composition des applications différentiables en remarquant que l'application

$$[x \mapsto (M(x), M(x))]$$

est dérivable, de dérivée

$$\left[x \mapsto \big(M'(x), M'(x)\big)\right].$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Comme $M'(x) = A(x).M(x)$, alors

$$M'(x)^\top = M(x)^\top.A(x)^\top = -M(x)^\top.A(x)$$

puisque la matrice $A(x)$ est antisymétrique.

❧ On déduit alors de la question précédente que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -M(x)^\top.A(x).M(x) + M(x)^\top.A(x).M(x) = 0.$$

Par conséquent, l'application f est constante sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle), égale à

$$f(0) = M(0)^\top.M(0) = I_n.$$

On a ainsi démontré que $M(x)$ était orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}$.

❧ Comme $M : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (et même de classe $\mathscr{C}^1$) et que $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (en tant que fonction polynomiale des coefficients), l'application

$$\det M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est continue.

Comme $M(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \det M(x) = \pm 1.$$

Or $\mathbb{R}$ est un intervalle et l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (Théorème des valeurs intermédiaires), donc la fonction $\det M$ est constante.

Comme $M(0)$ est une matrice de rotation, $\det M(0) = 1$ et par conséquent, $\det M(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad M(x) \in SO_n(\mathbb{R}).$$

> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Résoudre dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *l'équation*
> $$X^\top + X = \mathrm{tr}(X).A.$$

Le membre de gauche est une matrice symétrique, la matrice du membre de droite est quelconque : nous allons certainement nous simplifier la tâche en nous souvenant que

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Quelle que soit la matrice $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (S, T) tel que

$$X = S + T, \quad S^\top = S, \quad T^\top = -T.$$

On a alors

$$X^\top + X = 2S \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\, X = \mathrm{tr}\, S$$

et l'équation devient

$$2S = \mathrm{tr}\, S \cdot A.$$

On en déduit en particulier que

$$2\,\mathrm{tr}\, S = \mathrm{tr}\, S \cdot \mathrm{tr}\, A.$$

❧ Premier cas : si $\mathrm{tr}\, S = 0$, l'équation devient $2S = 0$, c'est-à-dire $S = 0$ et donc $X = T$, la matrice antisymétrique T étant quelconque et la matrice A n'apparaissant plus dans l'équation !

❧ Deuxième cas : si $\mathrm{tr}\, S \neq 0$, alors il faut que $\mathrm{tr}\, A = 2$.
Si $\mathrm{tr}\, A \neq 2$, l'équation n'a pas de solution.
Si $\mathrm{tr}\, A = 2$, l'équation devient

$$\mathrm{tr}\, A \cdot S = \underbrace{\mathrm{tr}\, S}_{\neq 0} \cdot A,$$

donc il faut aussi que A soit symétrique.

Réciproquement, si $\mathrm{tr}\, A = 2$ et si A est symétrique, alors on pose

$$X = \alpha A + T$$

où α est réel et T antisymétrique. On en déduit que

$$\mathrm{tr}\, X = \alpha\, \mathrm{tr}\, A + 0 = 2\alpha$$

et que

$$X^\top + X = 2\alpha A = \mathrm{tr}\, X.A,$$

donc X est bien solution.

► En conclusion, les solutions de l'équation sont
- d'une part les matrices antisymétriques ;
- d'autre part, mais seulement si A est symétrique et si $\mathrm{tr}\, A = 2$, les matrices de la forme

$$X = \alpha A + T$$

où α est un réel quelconque et T, une matrice antisymétrique.

rms130-768

Soient E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f, un endomorphisme de E.

1. *Pour tout endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.*

2. *Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que p et f commutent si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.*

1. On suppose que f et g commutent.

❧ Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f,$$

donc $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

❧ Soit $x \in \operatorname{Ker} f$: on a donc $f(x) = 0$ et par linéarité de g, on a $g\big(f(x)\big) = 0$. Comme f et g commutent, on a aussi $f\big(g(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

✍ *C'est du cours !*

2. Si f et p commutent, alors $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f (d'après la question précédente).

❧ Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ soient stables par f.

On sait que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que

$$\forall\, x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker} p}. \qquad (\star)$$

En appliquant $(\star)$ à $f(x)$ au lieu de x, on obtient que

$$f(x) = (p \circ f)(x) + \big[f(x) - (p \circ f)(x)\big].$$

Par linéarité de f et du fait que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f, on en déduit que

$$f(x) = \underbrace{(f \circ p)(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big[f(x) - (f \circ p)(x)\big]}_{\in \operatorname{Ker} p}.$$

Or $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, donc la décomposition du vecteur $f(x)$ est unique : par identification, on a donc

$$\forall\, x \in E, \quad (p \circ f)(x) = (f \circ p)(x)$$

donc p et f commutent.

✍ *Il ne suffit pas de savoir que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E, il faut aussi connaître et utiliser la décomposition $(\star)$.*

Soit $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente.

1. *Démontrer que la matrice*

$$I_n + N + \cdots + N^{n-1}$$

est inversible et calculer son inverse.

2. *Démontrer que la matrice*

$$I_n + 2N + 3N^2 + \cdots + nN^{n-1}$$

est inversible et calculer son inverse.

1. Toute matrice nilpotente est trigonalisable (son polynôme minimal, de la forme X^d, est scindé) et donc semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Par conséquent, les deux matrices

$$A_n = I_n + N + \cdots + N^{n-1}$$

et

$$B_n = I_n + 2N + \cdots + nN^{n-1}$$

sont semblables aux matrices triangulaires

$$I_n + T + \cdots + T^{n-1} \quad \text{et} \quad I_n + 2T + 3T^2 + \cdots + nT^{n-1}$$

dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et donc tous différents de 0 : ces deux matrices sont donc inversibles.

✍ *Pour calculer leurs inverses, inspirons-nous des séries entières : pour $|x| < 1$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

et l'inverse de cette somme est égal à $(1-x)$; de même,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et l'inverse de cette somme est égal à $(1-x)^2$.

❧ Comme $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors $N^n = 0_n$ (penser à Cayley-Hamilton !) et

$$(I_n - N)(I_n + N + \cdots + N^{n-1}) = I_n - N^n = I_n$$

(somme télescopique), ce qui prouve que A_n est bien inversible et que son inverse est égal à $(I_n - N)$.

2. De plus,

$$N \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)N^k\right) = \sum_{k=1}^{n} kN^k = N + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k$$
$$N^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)N^k\right) = \sum_{k=2}^{n+1} kN^k = \sum_{k=2}^{n-1} kN^k$$

donc

$$\begin{aligned}(I_n - N)^2 B_n &= (I_n - 2N + N^2)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)N^k\right) \\ &= \left(I_n + 2N + \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)N^k\right) \\ &\qquad - 2\left(N + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k\right) + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k \\ &= I_n\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'inverse de B_n est égal à $(I_n - N)^2$.

Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$, *l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Donner une base de l'image et une base du noyau de* f.
2. *Démontrer que l'image de* f *est stable par* f.
3. *On note* g, *l'endomorphisme de* $\operatorname{Im} f$ *induit par* f. *Donner la matrice de* g *dans une base de* $\operatorname{Im} f$.
4. *Déterminer les éléments propres de* g.
5. *En déduire les éléments propres de* f.

1. L'image de f est engendrée par les colonnes de A, donc $\operatorname{rg} f = 2$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,1,1,1),(1,0,0,1)\big).$$

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et comme deux relations de liaison entre les colonnes sautent aux yeux, on en déduit que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\big).$$

2. Quel que soit l'endomorphisme f, l'image de f est TOUJOURS stable par f ! (Et le calcul pour le prouver est immédiat !)

3. Prenons pour base de $\operatorname{Im} f$ les deux vecteurs donnés ci-dessus :

$$\mathscr{B} = \big((1,1,1,1),(1,0,0,1)\big).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (4,2,2,4) = 2\cdot(1,1,1,1) + 2\cdot(1,0,0,1) \\ f(1,0,0,1) &= (2,2,2,2) = 2\cdot(1,1,1,1) + 0\cdot(1,0,0,1) \end{aligned}$$

et on en déduit que la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *A priori, la matrice trouvée dépend de la base choisie ! Mais c'est sans importance pour la suite.*

4. Le polynôme caractéristique de M est égal à $X^2 - 2X - 4$.
Les valeurs propres de la matrice M sont donc

$$1 \pm \sqrt{5}$$

et, quelle que soit la valeur propre λ de M, il est clair que les vecteurs du noyau de

$$(M - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

sont proportionnels au vecteur (non nul !)

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

. De plus,

$$(M - \lambda I_2)\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda - 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'après le polynôme caractéristique de M.

✍ *Les vecteurs propres de la matrice M nous donnent des vecteurs propres de g (et donc de f) par leurs coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$ que nous avons choisie plus haut.*

Plus précisément, un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda = 1 \pm \sqrt{5}$ est donné par

$$\lambda \cdot (1,1,1,1) + 2 \cdot (1,0,0,1) = (\lambda+2, \lambda, \lambda, \lambda+2).$$

5. En conclusion, l'endomorphisme f est diagonalisable (sa matrice est symétrique réelle...) ;

— le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\operatorname{Ker} f$, dont on a donné une base plus haut ;

— le sous-espace propre associé à la valeur propre $1+\sqrt{5}$ est la droite dirigée par le vecteur

$$(1+\sqrt{5}) \cdot (1,1,1,1) + 2 \cdot (1,0,0,1)$$

— et le sous-espace propre associé à la valeur propre $1-\sqrt{5}$ est la droite dirigée par le vecteur

$$(1-\sqrt{5}) \cdot (1,1,1,1) + 2 \cdot (1,0,0,1).$$

‖ *Deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ayant $(X-1)(X-2)^2$ sont-elles semblables ?*

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, une matrice dont le polynôme caractéristique est égal à

$$(X-1)(X-2)^2.$$

Comme ce polynôme est scindé, la matrice A est trigonalisable et semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toutes ces matrices ont même rang (3), même déterminant (4), même spectre ($\{1_1, 2_2\}$), même trace (5)... Sont-elles pour autant semblables ?

❧ Le polynôme minimal de A (qui est aussi celui de T) est un diviseur unitaire du polynôme caractéristique, qui possède les mêmes racines que celui-ci. Par conséquent, il n'y a que deux possibilités :

— si $\mu = (X-1)(X-2)$, alors le polynôme minimal est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable ;

— si $\mu = (X-1)(X-2)^2$, alors le polynôme minimal est scindé mais avec une racine double, donc A n'est pas diagonalisable.

En discutant sur les paramètres a, b et c, nous allons voir que ces deux cas sont compatibles avec le polynôme caractéristique donné — et donc que toutes les matrices A considérées ne sont pas semblables.

❧ Tout d'abord, quels que soient les coefficients a, b et c, le rang de la matrice

$$T - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) = 1.$$

Au contraire, le rang de la matrice

$$T - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1 pour $a = 0$ et égal à 2 pour $a \neq 0$.

Par conséquent,

— ou bien $a = 0$ et dans ce cas

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) + \dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

et la matrice A est diagonalisable ;

— ou bien $a \neq 0$ et dans ce cas

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) + \dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$$

et la matrice A n'est pas diagonalisable.

Conclusion : Les matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables (puisque A_0 est diagonalisable alors que A_1 n'est pas diagonalisable). Elles ont même polynôme caractéristique :

$$(X-1)(X-2)^2$$

mais pas le même polynôme minimal.

> *L'endomorphisme* $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par*
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = M + M^\top$$
> *est-il diagonalisable ?*

✍ *Attention à ne pas mélanger* φ*, l'endomorphisme de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *étudié ici, avec les matrices* $\varphi(M)$ *qui sont toutes diagonalisables (puisqu'elles sont toutes symétriques et réelles).*

❧ On doit savoir que la transposition
$$\tau = \left[M \mapsto M^\top\right]$$
est une symétrie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc diagonalisable et
$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
où l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est le sous-espace propre associé à $+1$ et l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques, le sous-espace propre associé à -1.

Cela étant rappelé, on constate que
$$\varphi = \mathrm{Id} + \tau,$$
donc φ est diagonalisable, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace propre associé à 2 et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace propre associé à 0 (alias le noyau de φ).

✍ *Bien entendu, il est possible de traiter cet exercice par le calcul... Mais si cela ne pose pas de réelle difficulté, il faut bien veiller à ne pas diviser par zéro !*

Concrètement : Si $M + M^\top = \lambda M$*, alors*

— *ou bien* $\lambda \neq 0$ *et dans ce cas*
$$M = \frac{1}{\lambda}(M + M^\top) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$
et donc
$$\varphi(M) = 2M$$
d'où $\lambda = 2$ *;*

— *ou bien* $\lambda = 0$ *et dans ce cas*
$$M + M^\top = 0$$
donc M *est antisymétrique.*

Il ne reste plus qu'à compter les dimensions pour conclure.

> *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par*
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = \operatorname{tr}(M)\cdot I_n + M.$$

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. Cette matrice M est non nulle et vérifie
$$\operatorname{tr}(M)I_n + M = \lambda M$$
soit
$$(\lambda - 1)M = \operatorname{tr}(M).I_n.$$

❧ Deux cas se présentent :
- ou bien $\lambda = 1$ et dans ce cas, il faut que $\operatorname{tr}(M) = 0$;
- ou bien $\lambda \neq 1$ et dans ce cas
$$M = \frac{\operatorname{tr}(M)}{\lambda - 1}\cdot I_n \tag{$\star$}$$
donc $M \in \mathbb{C}\cdot I_n$.

✍ *C'est le passage un peu surprenant de l'exercice : négliger le calcul de λ pour lire la relation $(\star)$ sous la forme $M = (\ldots)\cdot I_n$.*

❧ **Sous-espace propre associé à $\lambda = 1$**

L'ensemble $H = [\operatorname{tr}(M) = 0]$ est un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (en tant que noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle) et
$$\forall\, M \in H, \quad \Phi(M) = M.$$
Donc 1 est valeur propre de Φ et
$$\operatorname{Ker}(\Phi - I) = [\operatorname{tr}(M) = 0].$$

❧ **L'autre sous-espace propre**

Il est clair que
$$\Phi(I_n) = (n+1)I_n$$
donc $(n+1)$ est valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est la droite vectorielle $\mathbb{C}\cdot I_n$.

✍ *La première partie de l'étude (analyse) nous a montré que les sous-espaces propres de Φ étaient contenus dans des sous-espaces vectoriels clairement identifiés. Il ne nous restait donc plus qu'à étudier les inclusions réciproques pour pouvoir conclure.*

❧ **Conclusion**

Comme $n \geqslant 1$ (!!!), l'endomorphisme Φ possède exactement deux valeurs propres distinctes : 1, associée à l'hyperplan H et $(n+1)$, associée à la droite $\mathbb{C}\cdot I_n$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace :
$$\dim H + \dim \mathbb{C}\cdot I_n = [\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) - 1] + 1 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$
(et peu nous importe que cette dimension soit égale à n^2...), l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

✍ *On peut donc calculer facilement la trace et le déterminant de Φ :*
$$\operatorname{tr}\Phi = (n^2 - 1)\times 1 + (n+1) = n(n+1)$$
$$\det \Phi = 1^{n^2-1}\times (n+1)^1 = (n+1).$$

rms130-787

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. *Diagonaliser A. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites réelles telles que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} u_{n+1} &= -4u_n + 6v_n, \\ v_{n+1} &= 3un + 5v_n, \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}^\top.$$

2. a. *Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_0.*

2. b. *En déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.*

1.

✍ *La forme particulière de la matrice A se prête à des calculs bourrins : la troisième colonne nous montre que 5 est valeur propre et nous pousse à calculer le polynôme caractéristique en développant par la dernière colonne.*

Dans ces conditions, le cofacteur de $(X-5)$ est le polynôme caractéristique de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dont il suffit de calculer la trace et le déterminant.

Le polynôme caractéristique de A est égal à

$$(X-5)(X^2-X-2) = (X-5)(X-2)(X+1).$$

✍ *La factorisation du polynôme caractéristique peut se finir de tête : la somme des racines du facteur de degré 2 est égale à 1 et leur produit à -2, donc ces racines sont 2 et -1...*

❧ Il est clair que le sous-espace propre associé à 5 est la droite vectorielle dirigée par

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle dirigée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

le sous-espace propre associé à -1 est la droite vectorielle dirigée par

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient donc une matrice inversible (puisque les trois droites propres sont en somme directe) telle que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(5, 2, -1)$$

(d'après la Formule du changement de base).

❧ On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = Q\operatorname{Diag}(5^n, 2^n, (-1)^n)Q^{-1}.$$

Comme la matrice Q est assez sympathique, on se lance dans le calcul de l'inverse :

$$\begin{pmatrix} Q \\ I_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 \\ Q^{-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après quelques calculs un peu lassants, on trouve finalement

$$A^n = 5^n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P_5} + 2^n \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{P_2} + (-1)^n \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{-1}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *La connaissance très précise du Théorème de décomposition des noyaux et de la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange nous permet d'éviter les calculs fastidieux !*

Les facteurs $(X-5)$, $(X-2)$ *et* $(X+1)$ *sont deux à deux premiers entre eux, donc les polynômes* $(X-2)(X+1)$, $(X-5)(X+1)$ *et* $(X-5)(X-2)$ *sont globalement premiers entre eux (Théorème de décomposition des noyaux) et il existe donc trois polynômes* U_5, U_2 *et* U_{-1} *tels que*

$$U_5.(X-2)(X+1) + U_2.(X-5)(X+1) + U_{-1}.(X-5)(X-2) = 1$$

(oui, c'est Bézout !).

Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires 5, 2 *et* -1 *sont, comme on sait :*

$$\frac{(X-2)(X+1)}{(5-2)(5+1)}, \quad \frac{(X-5)(X+1)}{(2-5)(2+1)}, \quad \frac{(X-5)(X-2)}{(-1-5)(-1-2)}.$$

La somme de ces trois polynômes prend la valeur 1 *lorsqu'on substitue* 5, 2 *et* -1 *à* X *(à chaque fois, un terme est égal à* 1 *et les deux autres sont nuls). Comme cette somme est un polynôme de degré inférieur à 2, on en déduit que*

$$\frac{(X-2)(X+1)}{18} - \frac{(X-5)(X+1)}{9} - \frac{(X-5)(X-2)}{18} = 1.$$

(C'était notre programme La résolution de l'équation de Bézout sans larmes.*)*

En revenant à la démonstration du Théorème de décomposition des noyaux, on en déduit que les matrices obtenues en substituant A à X :

$$P_5 = \frac{1}{18}\cdot(A-2I_3)(A+I_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{A-2I_3}{3}\cdot\frac{A+I_3}{3}, \tag{15}$$
$$P_2 = \frac{-1}{9}\cdot(A-5I_3)(A+I_3) = \frac{5I_3-A}{3}\cdot\frac{A+I_3}{3}, \tag{16}$$
$$P_{-1} = \frac{-1}{18}\cdot(A-5I_3)(A-2I_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5I_3-A}{3}\cdot\frac{A-2I_3}{3} \tag{17}$$

sont les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres de A et par conséquent

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad A^n = 5^n\cdot P_5 + 2^n\cdot P_2 + (-1)^n\cdot P_{-1}.$$

Attention à ne surtout pas développer les expressions des projecteurs spectraux en fonction de A : c'est seulement sous la forme ci-dessus qu'ils sont simples à calculer puisque

$$\frac{5I_3-A}{3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix},$$
$$\frac{A-2I_3}{3} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$
$$\frac{A+I_3}{3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

***En résumé,** on a remplacé les six produits matriciels*

$$Q\,\mathrm{Diag}(1,0,0)Q^{-1},\quad Q\,\mathrm{Diag}(0,1,0)Q^{-1},\quad Q\,\mathrm{Diag}(0,0,1)Q^{-1}$$

et le calcul préalable de Q^{-1} par les trois produits matriciels

$$(A-2I_3)(A+I_3),\quad (A-5I_3)(A+I_3),\quad (A-5I_3)(A-2I_2).$$

Ça vaut vraiment le coup d'étudier les détails de la théorie !

2. a. Il est clair que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad X_{n+1} = AX_n$$

et donc que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad X_n = A^n X_0.$$

2. b. On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n &= -2^n(u_0+2v_0) + 2.(-1)^n(u_0+v_0),\\ v_n &= 2^n(u_0+2v_0) - (-1)^n(u_0+v_0),\\ w_n &= 5^n(u_0+2v_0+w_0) - 2^n(u_0+2v_0).\end{aligned}$$

rms130-832

Soient A *et* B*, deux parties non vides de* $\mathbb{R}^2$*. On pose*

$$A+B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ *On suppose que* A *est une partie ouverte. Démontrer que* $A+B$ *est une partie ouverte.*
$\boxed{\textbf{2.}}$ *On suppose que* A *et* B *sont des parties fermées. L'ensemble* $A+B$ *est-il nécessairement une partie fermée ?*

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme la partie A est ouverte, c'est un voisinage de chacun de ses points et donc, pour tout $a \in A$, il existe un rayon $r(a) > 0$ tel que la boule ouverte V_a de centre a et de rayon $r(a)$ soit contenue dans A.

Par conséquent, pour tout $(a,b) \in A \times B$,

$$(a,b) \in V_a + b = \{x+b,\ x \in V_a\} \subset A+B.$$

On en déduit que

$$A+B = \bigcup_{(a,b)\in A\times B} (V_a + b).$$

Or $V_a + b$ est l'image de la boule ouverte V_a par la translation $[x \mapsto x+b]$, c'est-à-dire l'image réciproque de l'ouvert V_a par la translation réciproque $[x \mapsto x-b]$, donc V_a+b est un ouvert.

On a ainsi démontré que $A+B$ était un ouvert (en tant qu'union de parties ouvertes).

$\boxed{\textbf{2.}}$ Considérons une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$, de limite ℓ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telles que $u_n = a_n + b_n$.

En tant que suite convergente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En revanche, rien ne nous assure que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bornées !

✍ *Il faut toujours penser aux formes indéterminées !*

Supposons néanmoins que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée. Dans ce cas, la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée elle aussi (différence de deux suites bornées) et comme* $\mathbb{R}^2$ *est un espace de dimension finie, le Théorème de Bolzano-Weierstrass nous assure qu'il existe une suite extraite* $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* ℓ_a *et, comme* A *est fermée,* $\ell_a \in A$.

La suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *(suite extraite d'une suite convergente).*

En tant que différence de deux suites convergentes, la suite $(b_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* $\ell_b = \ell - \ell_a$ *et, comme* B *est fermée,* $\ell_b \in B$*. On a donc* $\ell = \ell_a + \ell_b \in A+B$.

Mais voilà : rien ne nous prouve que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée !*

Considérons les ensembles

$$A = [x \geqslant 0] \cap [xy \geqslant 1] \quad \text{et} \quad B = [x \geqslant 0] \cap [xy \leqslant -1].$$

L'ensemble A est l'image réciproque du fermé $[0,+\infty[\, \times [1,+\infty[$ par l'application continue $\Phi = [(x,y) \mapsto (x,xy)]$. De même, l'ensemble B est l'image réciproque du fermé $[0,+\infty[\, \times\,]-\infty,-1]$ par Φ.

✍ *Un intervalle fermé est une partie fermée pour la topologie de* $\mathbb{R}$ *et un produit cartésien de parties fermées de* $\mathbb{R}$ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, les deux composantes de Φ *sont des applications polynomiales de* $\mathbb{R}^2$ *(espace de dimension finie) dans* $\mathbb{R}$*, donc* Φ *est bien continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, considérons $a_n = (1/n, n) \in A$ et $b_n = (1/n, -n) \in B$. On a alors $u_n = a_n + b_n = (2/n, 0)$ et la limite des u_n est clairement l'origine $(0,0)$. S'il existait deux points $a = (x_a, y_a) \in A$ et $b = (x_b, y_b) \in B$ tels que $(0,0) = a+b$, alors on aurait $x_a + x_b = 0$ avec $x_a \geqslant 0$ et $x_b \geqslant 0$, donc $x_a = x_b = 0$. Mais $(0,y)$ n'appartient ni à A, ni à B (quelle que soit la valeur de $y \in \mathbb{R}$) !

On a ainsi démontré qu'il existait deux fermés A et B de $\mathbb{R}^2$ tels que la somme $A+B$ ne soit pas fermée.

✍ *On peut démontrer que* $A+B$ *est le demi-plan ouvert* $[x > 0]$.

1. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice telle que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \operatorname{tr} M^k = 0.$$

Démontrer que M est nilpotente.

2. *Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A soit semblable à $A + tB$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. Démontrer que B est nilpotente.*

3. *Soit $(M_k)_{k\geqslant 1}$, une suite de matrices semblables entre elles. On suppose que M_k converge vers la matrice nulle 0_n lorsque k tend vers $+\infty$. Démontrer que M_0 est nilpotente.*

4. *Réciproquement, soit M_0, une matrice nilpotente. Démontrer qu'il existe une suite $(M_k)_{k\geqslant 1}$ de matrices semblables entre elles qui converge vers la matrice nulle.*

1.

✍ *La première question est un archi-classique, qui constitue un exo dans l'exo. J'en donne une démonstration élémentaire à défaut d'être brève.*

Une autre démonstration (par récurrence et avec le concours du Théorème de Cayley-Hamilton) figure dans le cours.

Comme M est une matrice à coefficients *complexes*, elle est semblable à une matrice triangulaire. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres (distinctes) de M et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives, on a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(M^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i.\lambda_i^k = 0. \tag{1}$$

✍ *Évidemment, la relation précédente est fausse pour $k = 0$ puisque*

$$\operatorname{tr}(M^0) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

✍ *Si M était une matrice à coefficients* réels, *il ne faudrait pas hésiter à faire* comme si *c'était une matrice à coefficients complexes, puisque ni les hypothèses (nullité de la trace des itérées), ni le résultat final ($M^n = 0_n$) ne dépendent de la nature réelle ou complexe des coefficients.*

D'après la relation (1),

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Comme les multiplicités m_i sont des entiers non nuls, la matrice carrée n'est pas inversible et son déterminant, nul, est quasiment un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r \times V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r). \tag{3}$$

Ce déterminant de Vandermonde est différent de 0 puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Par conséquent, l'une des valeurs propres λ_i est nulle (et toutes les autres sont différentes de 0) : quitte à changer les indices, on peut supposer que $\lambda_r = 0$. La relation (1) devient alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(M^k) = \sum_{i=1}^{r-1} m_i.\lambda_i^k = 0 \tag{4}$$

et on peut cette fois en déduire que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Cette matrice carrée est alors inversible (son déterminant n'est pas nul) et admet un vecteur non nul dans son noyau ! C'est impossible... sauf si $r - 1 = 0$! Autrement dit : $r = 1$ et $\lambda_r = 0$ est la seule valeur propre de M.

Ainsi, M est semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et par conséquent $M^n = 0_n$.

✍ *Comme on sait, le déterminant de Vandermonde est lié aux polynômes interpolateurs de Lagrange. Avec une petite astuce de calcul bien placée, on peut abréger un peu la démonstration.*

Puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \qquad \sum_{i=1}^{r} m_i.\lambda_i^k = 0,$$

alors

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_{r-1}[X], \qquad \sum_{i=1}^{r} m_i.\lambda_i.P(\lambda_i) = 0.$$

(Toute l'astuce consiste à considérer les polynômes sous la forme XP *puisque* $\mathrm{tr}(M^0) \neq 0$.*) Comme les* λ_i *sont deux à deux distincts, on peut considérer les polynômes interpolateurs* $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ *associés, qui sont tous de degré* $(r-1)$ *et*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant r, \qquad 0 = \sum_{i=1}^{r} m_i.\lambda_i.L_j(\lambda_i) = \underbrace{m_j}_{\in\mathbb{N}^*} \lambda_j.$$

Comme les multiplicités m_i *sont toutes supérieures à* 1, *on en déduit que tous les* λ_j *sont nuls. Comme ils sont deux à deux distincts par hypothèse, on conclut que* $r = 1$ *et* $\lambda_1 = 0$.

2. Deux matrices semblables ont même trace, donc

$$\forall\, t \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A) + t \cdot \mathrm{tr}(B)$$

et donc $\mathrm{tr}(B) = 0$.

Comme A et $(A + t \cdot B)$ sont semblables, leurs itérées sont également semblables et donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}[(A + t \cdot B)^k].$$

Piège ! Comme A et B ne commutent pas, on ne peut pas appliquer la formule du binôme pour développer $(A + t \cdot B)^k$. Pas grave ! On sait tout de même que

$$(A + t \cdot B)^k = t^k \cdot B^k + \cdots$$

où les matrices regroupées dans $\cdots$ constituent une expression polynomiale en t de degré *strictement* inférieur à k. On a donc

$$\forall\, t \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{tr}(A^k) = t^k \cdot \mathrm{tr}(B^k) + \cdots$$

où les complexes regroupés dans $\cdots$ constituent toujours une expression polynomiale en t de degré strictement inférieur à k.

Cette égalité entre expressions polynomiales est vraie pour une infinité de valeurs de t (pour *tout* $t \in \mathbb{C}$ en fait) et comme le membre de gauche ne dépend pas de t, on en déduit en particulier que $\mathrm{tr}(B^k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

D'après la première question, la matrice B est donc nilpotente.

✍ *Attention avec la formule du binôme ! Elle s'applique quand les deux termes commutent, ce qui n'est* a priori *pas le cas ici. De plus, la relation bien connue* $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$ *ne nous est pas d'un grand secours. On peut vérifier que*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+B)^2 &= \mathrm{tr}(A^2) + 2\,\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(B^2) \\ \mathrm{tr}(A+B)^3 &= \mathrm{tr}(A^3) + 3\,\mathrm{tr}(A^2B) + 3\,\mathrm{tr}(AB^2) + \mathrm{tr}(B^3) \end{aligned}$$

mais ça coince dès le degré 4 car

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A.BAB) = \mathrm{tr}(BAB.A) \boxed{\overset{?}{=}} \mathrm{tr}(A^2.B^2) &= \mathrm{tr}(AB^2.A)\\ &= \mathrm{tr}(B.A^2B) = \mathrm{tr}(B^2.A^2).\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ La trace est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie, c'est donc en particulier une application continue.

❧ Comme la suite de matrices $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle 0_n, on en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty} \mathrm{tr}(M_p) = 0.$$

Comme les matrices M_p sont toutes semblables, leurs traces sont égales et en particulier

$$\mathrm{tr}(M_0) = 0.$$

❧ Comme produit de suites convergentes, la suite de matrices

$$(M_p^k)_{p\in\mathbb{N}}$$

converge vers la matrice nulle quel que soit l'entier $k \geqslant 1$ (mais pas pour $k = 0$, bien sûr !).

✍ *Si deux suites $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers A et B, alors la suite produit $(M_pN_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB, le produit des deux limites.*

Cela s'explique par le fait que la multiplication matricielle peut être vue comme une opération bilinéaire sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Comme M_p est semblable à M_0, la matrice M_p^k est semblable à M_0^k et le raisonnement précédent nous donne que

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \mathrm{tr}(M_0^k) = 0.$$

❧ D'après la première question, la matrice M_0 est nilpotente.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Comme M_0 est nilpotente, elle admet un polynôme annulateur scindé n'ayant que 0 pour seule racine. Elle est donc semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}M_0P = T_0 = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & t_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$ représenté par la matrice T_0 dans la base

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n).$$

On a en particulier

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0\\ u(e_2) &= t_{1,2}\cdot e_1\\ &\ \vdots\\ u(e_n) &= t_{1,n}\cdot e_1 + \cdots + t_{n-1,n}\cdot e_{n-1}.\end{aligned}$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, la famille

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_k &= (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\\ &= (k^{n-i}\cdot e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = (k^{n-1}\cdot e_1, k^{n-2}\cdot e_2, \dots, k\cdot e_{n-1}, e_n)\end{aligned}$$

est évidemment une base de $\mathbb{C}^n$ et

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= k^{n-1} \cdot u(e_1) = 0 \\ u(\varepsilon_2) &= k^{n-2} \cdot u(e_1) = \frac{t_{1,2}}{k} \cdot \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ u(\varepsilon_n) &= u(e_n) = \frac{t_{1,n}}{k^{n-1}} \cdot \varepsilon_1 + \cdots + \frac{t_{n-1,n}}{k} \cdot \varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

ou plus explicitement

$$\begin{aligned} \forall\, 2 \leqslant j \leqslant n, \quad u(\varepsilon_j) = k^{n-j} \cdot u(e_j) &= \sum_{i=1}^{j-1} (t_{i,j} k^{n-j}) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \cdot (k^{n-i} \cdot e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \cdot \varepsilon_i. \end{aligned}$$

La matrice de u relative à la base $\mathscr{B}_k$ est donc

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{1,2}}{k} & \frac{t_{1,3}}{k^2} & \dots & \frac{t_{1,n-1}}{k^{n-2}} & \frac{t_{1,n}}{k^{n-1}} \\ \vdots & 0 & \frac{t_{2,3}}{k} & \ddots & & \frac{t_{2,n}}{k^{n-2}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \frac{t_{n-2,n-1}}{k} & \frac{t_{n-2,n}}{k^2} \\ \vdots & & & & 0 & \frac{t_{n-1,n}}{k} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Comme T_0 et T_k représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes, ces deux matrices sont semblables et comme T_0 est, par construction, semblable à M_0, toutes les matrices T_k sont semblables à M_0.

On passe de T_0 à T_k en divisant les coefficients de T_0 par des entiers supérieurs à k, donc T_k converge vers la matrice nulle lorsque k tend vers $+\infty$.

On a ainsi construit une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices semblables à la matrice M_0 qui converge vers la matrice nulle.

✍ *Impossible de s'en sortir sans avoir bien compris le mécanisme de la trigonalisation !*

Si une matrice est trigonalisable sans être diagonalisable, on peut choisir comme on veut l'ordre de grandeur des coefficients au-dessus de la diagonale, simplement en étirant plus ou moins les vecteurs de la base qu'on a trouvée.

✍ *Cette propriété un peu étrange des matrices nilpotentes signifie que l'ensemble des matrices* non *diagonalisables n'est pas fermé : on a construit une suite convergente de matrices non diagonalisables et pourtant la limite de cette suite est diagonalisable.*

On retrouve cette propriété dans plusieurs exercices.

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

1. *Démontrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.

2. *Étudier la régularité de* f*, puis la limite de* f *et celle de* f' *au voisinage de* $+\infty$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

❧ Soit $A > 0$.
Chaque fonction u_n est croissante et impaire, donc

$$\forall\, x \in [-A, A], \quad |u_n(x)| \leqslant u_n(A)$$

et, lorsque n tend vers $+\infty$, le réel A étant fixé,

$$u_n(A) \sim \frac{A}{n^2}.$$

On a ainsi prouvé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur chaque segment $[-A, A]$.

Comme les fonctions u_n sont évidemment continues sur $[-A, A]$, on en déduit que la somme f est continue sur

$$\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A].$$

2. Chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + (x/n)^2}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ce qui prouve que la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

❧ Comme on a déjà justifié que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, finie ou infinie, au voisinage de $+\infty$.

❧ On a vu plus que la série de fonctions $\sum u_n'$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, qu'elle convergeait uniformément au voisinage de $+\infty$.

Chaque fonction u_n' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (Théorème de la double limite).

✍ *Quant à la limite à l'infini de la fonction* f*, c'est plus compliqué à rédiger, mais c'est très classique. Après avoir jeté ses idées au brouillon, on rédige dans un ordre cohérent et ça donne à peu près ça.*

❧ Soit $S > 0$. Comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif, il existe un rang N_0 tel que

$$\frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n}\right) \geqslant S.$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{N_0}u_n(x)=\frac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n}\right)>\frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n}\right),$$

il existe $A_0>0$ tel que

$$\forall\, x\geqslant A_0,\quad \sum_{n=1}^{N_0}u_n(x)\geqslant\frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n}\right)$$

et comme $\sum u_n(x)$ est une série de terme général positif, on en déduit enfin que

$$\forall\, x\geqslant A_0,\quad f(x)\geqslant\sum_{n=1}^{N_0}u_n(x).$$

On a ainsi établi que

$$\forall\, S>0,\ \exists\, A_0>0,\ \forall\, x\geqslant A_0,\quad f(x)\geqslant S$$

c'est-à-dire : la fonction f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

✍ *Autrement dit, au voisinage de l'infini, le comportement de f ressemble à celui de la fonction ℓn.*

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}.$$

1. *Déterminer le domaine de définition de* f.

2. *Démontrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

3. *Démontrer que* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer son intégrale.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

❧ Il est clair que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant pour tout $x \neq 0$. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ est alors convergente.

Pour $x = 0$, le terme général $u_n(0) = 1$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement.

Le domaine de définition de f est donc $D = \mathbb{R}^*$. Comme la fonction f est évidemment paire, on va l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $a > 0$, on a

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

On a un majorant indépendant de x, qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme f est continue sur

$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

✍ *Pour cette question, le Critère spécial des séries alternées n'apporte rien.*

3. Comme on intègre sur un intervalle non borné, la convergence normale et la convergence uniforme ne sont d'aucun secours.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction positive u_n est évidemment intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} u_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{dy}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

(changement de variable affine $y = nx$) et par conséquent la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \big|u_n(x)\big|\, dx$$

est divergente : on ne peut donc pas appliquer le théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

✍ *La méthode usuelle en pareil cas consiste à appliquer le Théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série de fonctions. Mais le Critère spécial des séries alternées nous dit comment majorer le reste de la série, pas comment majorer les sommes partielles...*

❧ D'après la première question, le reste d'ordre N, défini par

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$. D'après le Critère spécial des séries alternées,

$$\forall\, x > 0, \quad \big|R_N(x)\big| \leqslant \frac{1}{1+(N+1)^2x^2} \tag{$\star$}$$

donc R_N est intégrable sur $]0,+\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$, on en déduit que
$$f = -u_1 + \cdots + (-1)^N u_N + R_N$$
est bien intégrable sur $]0,+\infty[$ et, par linéarité de l'intégrale,
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(x)\,dx + \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx\\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \pi}{2n} + \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx.\end{aligned}$$
L'encadrement $(\star)$ et la positivité de l'intégrale nous donnent
$$\forall\, N \geqslant 1, \qquad \left|\int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(N+1)^2x^2} = \frac{\pi}{2(N+1)}.$$
On en déduit que
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2n} = \frac{-\pi \ln 2}{2}.$$

✍ *D'après le Critère spécial des séries alternées, la fonction f est négative (la somme est du signe du premier terme), c'est pourquoi l'intégrale de f est négative.*

✍ *Le calcul de la somme est un classique, qui se montre très facilement : tout d'abord*
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^n\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,dt \qquad \text{(somme géométrique)}\end{aligned}$$
et ensuite
$$\forall\, 0 \leqslant t < 1, \qquad \left|\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\right| \leqslant t^{N+1}$$
donc, par positivité de l'intégrale,
$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{N+1}\,dt = \frac{1}{N+2}.$$

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^2$.

1. *Déterminer les fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *Déterminer les fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3}.$$

1.

✍ *Il est bon de savoir que les expressions*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \textit{et} \qquad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$$

conduisent à passer en coordonnées polaires.

L'ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ en coordonnées cartésiennes correspond à l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, \pi[$ en coordonnées polaires. On connaît les formules :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

et on peut utiliser ici les formules réciproques :

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \operatorname{Arccos}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(On n'en aura pas besoin.)

❧ Les applications $(x,y) \mapsto (r,\theta)$ et $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre et toutes les deux de classe $\mathscr{C}^1$ (sur Ω et sur U respectivement).

Par conséquent, si f et g sont reliées par

$$f(x,y) = g(r,\theta)$$

la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

❧ D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

et donc

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Par conséquent,

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\cdot f(x,y)$$

équivaut à

$$\forall (r,\theta) \in U, \quad \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\alpha}{r}g(r,\theta) = 0.$$

❧ On reconnaît ici une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'inconnue est la fonction $[r \mapsto g(r,\theta)]$ (où l'angle θ est fixé).

On en déduit qu'il existe une fonction $K :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in U, \quad g(r,\theta) = K(\theta)\cdot r^\alpha.$$

En particulier,

$$\forall\, 0 < \theta < \pi, \quad K(\theta) = g(1,\theta)$$

et comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on en déduit que K est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

❧ On vérifie facilement que
$$g = [(r,\theta) \mapsto K(\theta).r^\alpha]$$
est une solution de l'équation
$$\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\alpha}{r} g(r,\theta) = 0$$
quelle que soit l'application K de classe $\mathscr{C}^1$.

❧ En conclusion, la fonction $f(x,y)$ est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω de l'équation
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \cdot f(x,y)$$
si, et seulement si, il existe une application $K(\theta) :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que
$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g(r,\theta) = K(\theta).r^\alpha.$$

2. Même cadre théorique. Cette fois, l'équation en $f(x,y)$ devient
$$r\frac{\partial g}{\partial r} = r^{3/2}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta}\,\cot\theta.$$
Comme θ est fixé, la résolution est très simple ! La fonction $f(x,y)$ est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, il existe une application $K(\theta) :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que
$$\forall\,(r,\theta) \in U, \quad g(r,\theta) = \frac{2}{3}r^{3/2}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta}\,\cot\theta + K(\theta).$$

rms130-922

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on considère une application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $f(t)$ n'est pas nul et que la famille

$$\big(f(t), f'(t)\big)$$

est liée. On pose alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}.$$

1. *Démontrer que l'application g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $g'(t)$ est à la fois colinéaire et orthogonal au vecteur $f(t)$.*

2. *En déduire l'existence d'un vecteur $e \in \mathbb{R}^3$ tel que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) \in \mathbb{R} \cdot e.$$

3. *Cette propriété est-elle encore vraie lorsque la fonction f s'annule ?*

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule pas, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) & \mapsto & \langle\, f(t) \,|\, f(t) \,\rangle & \mapsto & \sqrt{\langle\, f(t) \,|\, f(t) \,\rangle} \end{array}$$

donc l'application $[t \mapsto \|f(t)\|]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après la Formule de Leibniz (dérivation d'un produit — ici d'un produit scalaire)

$$\frac{d}{dt}\big(\|f(t)\|\big) = \frac{\big\langle\, f(t) \,\big|\, f'(t) \,\big\rangle}{\|f(t)\|}.$$

❧ En tant que quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (dont le dénominateur ne s'annule pas), la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f'(t)}{\|f(t)\|} - \frac{f(t)}{\|f(t)\|^2} \cdot \frac{d}{dt}\big(\|f(t)\|\big) \\ &= \frac{f'(t)}{\|f(t)\|} - \frac{\langle\, f(t) \,|\, f'(t) \,\rangle \cdot f(t)}{\|f(t)\|^3}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, le couple de vecteurs $\big(f(t), f'(t)\big)$ est une famille liée et le vecteur $f(t)$ n'est pas nul, donc il existe $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(t) = \alpha(t) \cdot f(t)$$

et par conséquent

$$g'(t) = \frac{\alpha(t) \cdot f(t)}{\|f(t)\|} - \frac{\alpha(t)\, \|f(t)\|^2 \cdot f(t)}{\|f(t)\|^3} = 0.$$

2. La fonction g est donc constante sur l'<u>intervalle</u> $\mathbb{R}$. Il existe donc un vecteur $e = g(0)$ <u>unitaire</u> tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = e$$

et par conséquent

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \|f(t)\| \cdot e \in \mathbb{R} \cdot e.$$

✍ *Réciproquement,*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = \frac{\langle\, f(t) \,|\, f'(t) \,\rangle}{\|f(t)\|} \cdot e \in \mathbb{R} \cdot e$$

donc les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ forment une famille liée.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Pour $t \geqslant 0$, on pose $f(t) = t^2 \cdot e_1$ et pour $t \leqslant 0$, on pose $f(t) = t^2 \cdot e_2$. Ces deux définitions sont cohérentes, car $f(0) = 0$ dans les deux cas.

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall\, t > 0, \quad f'(t) = 2t \cdot e_1 \quad \text{et} \quad \forall\, t < 0, \quad f'(t) = 2t \cdot e_2.$$

De plus, $f(t) = \mathcal{O}(t^2)$ lorsque t tend vers 0, donc f est en fait dérivable en $t = 0$ avec $f'(0) = 0$. Les expressions de $f'(t)$ pour $t \neq 0$ montrent alors que f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \neq 0, \quad f'(t) = \frac{2}{t} \cdot f(t) \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$

donc le couple $\big(f(t), f'(t)\big)$ est une famille liée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

✍ *Interprétation cinématique : si le vecteur position $f(t)$ et le vecteur vitesse sont proportionnels, alors le mouvement est rectiligne tant que le vecteur position ne s'annule pas ; si le vecteur position et le vecteur vitesse s'annulent simultanément, alors on peut changer de direction lors du passage par l'origine...*

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$*, on pose*

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+2b & -4a-b & 2a \\ 2a+b & -3a-b & 2a \\ b & -b & a \end{pmatrix}$$

puis

$$E = \{M_{a,b},\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \{M \in E \,:\, M^n = I_3\}.$$

1. *Calculer* $M_{1,0}M_{0,1}$*,* $M_{0,1}M_{1,0}$*,* $M_{0,1}^2$ *et* $M_{1,0}^2$*.*

2. *Démontrer que* E *est un sous-espace de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$*. Est-ce une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ *?*

3. *Déterminer* R_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

4. *Trouver une matrice inversible* P *telle que la matrice* $P^{-1}M_{1,0}P$ *soit diagonale et que la matrice* $P^{-1}M_{1,0}P$ *soit triangulaire supérieure.*

5. *Calculer* $PM_{a,b}^nP^{-1}$ *en fonction de* $n \in \mathbb{N}^*$ *et de* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$*, et retrouver* R_n*.*

1. On définit les deux matrices indiquées par l'énoncé.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

M10 = np.array([[3, -4, 2], [2, -3, 2], [0, 0, 1]])
M01 = np.array([[1, -1, 0], [1, -1, 0], [1, -1, 0]])
```

On calcule ensuite les produits demandés.

```
np.dot(M10, M01)
np.dot(M01, M10)
np.dot(M01, M01)
np.dot(M10, M10)
```

On constate que ces deux matrices commutent :

$$M_{1,0}M_{0,1} = M_{0,1}M_{1,0} = M_{0,1}$$

que la matrice $M_{0,1}$ est nilpotente d'indice 2 :

$$M_{0,1}^2 = 0_3$$

et que la matrice $M_{1,0}$ est une matrice de symétrie :

$$M_{1,0}^2 = I_3.$$

2. Par définition, E est le sous-espace de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$, c'est donc un sous-espace de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$!

Le sous-espace E ne contient pas I_3 et comme $M_{1,0}^2 = I_3$, il n'est pas non plus stable par produit : aucune chance que ce soit une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$!

3. Puisque les matrices $M_{0,1}$ et $M_{1,0}$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant 2, \quad (aM_{1,0} + bM_{0,1})^n &= a^nM_{1,0}^n + na^{n-1}bM_{1,0}^{n-1}M_{0,1} \\ &= a^nM_{1,0}^n + na^{n-1}bM_{0,1}. \end{aligned}$$

(Il n'y a que deux termes dans cette somme car $M_{0,1}$ est nilpotente d'indice 2.)

❧ Si n est pair, alors $M_{1,0}^n = I_3$ et

$$\begin{aligned} (aM_{1,0} + bM_{0,1})^n = I_3 &\iff a^nI_3 + na^{n-1}bM_{0,1} = I_3 && (18) \\ &\iff (a^n - 1)I_3 + na^{n-1}bM_{0,1} = 0_3 && (19) \\ &\iff a^n = 1 \quad \text{et} \quad b = 0. && (20) \end{aligned}$$

Dans ce cas, les matrices solutions sont les matrices $aM_{1,0}$ avec a parcourant l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. (Il y a donc n solutions distinctes.)

❧ Si n est impair, alors $M_{1,0}^n = M_{1,0}$ et

$$(aM_{1,0} + bM_{0,1})^n = I_3 \iff a^n M_{1,0} + na^{n-1}bM_{0,1} + (-1)I_3 = 0_3$$

ce qui est absurde puisqu'une telle propriété est une relation de liaison entre $M_{1,0}$, $M_{0,1}$ et I_3, alors que

$$I_3 \notin E = \mathrm{Vect}(M_{1,0}, M_{0,1})$$

(ce qui signifie que la famille $(I_3, M_{1,0}, M_{0,1})$ est libre.

Dans ce cas, il n'y a donc pas de solution.

4. On ne peut pas espérer réduire les deux matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ simultanément (= avec une même matrice de passage) sans les étudier en détail au préalable.

❧ On a vu que $M_{0,1}$ était nilpotente d'indice 2.

C'est une matrice de rang 1, donc ses colonnes non nulles dirigent son image :

$$\mathrm{Im}\, M_{0,1} = \mathbb{C} \cdot (1, 1, 1)$$

et chacune de ses lignes nous donne une équation cartésienne de son noyau :

$$\mathrm{Ker}\, M_{0,1} = [x - y = 0].$$

On vérifie ainsi que l'image de la matrice est contenue dans son noyau (c'est pourquoi elle est nilpotente de rang 2).

❧ On sait que $M_{1,0}$ est une matrice de symétrie : elle est diagonalisable, ses valeurs propres sont ± 1 et il nous reste à identifier ses sous-espaces propres.

Les matrices

```
M10-np.eye(3)
M10+np.eye(3)
```

nous disent que

$$\mathrm{Ker}(M_{1,0} - I_3) = [x - 2y + z = 0] \quad \text{et que} \quad \mathrm{Ker}(M_{1,0} + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0).$$

❧ Interprétons la matrice P cherchée comme la matrice de passage de la base canonique vers une nouvelle base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Comme $P^{-1}M_{1,0}P$ est diagonale, il faut que les trois vecteurs ε_k soient des vecteurs propres de $M_{1,0}$.

Comme $P^{-1}M_{0,1}P$ est triangulaire supérieure et que la matrice $M_{0,1}$ est nilpotente, les coefficients diagonaux doivent être nuls et il faut donc que

$$M_{0,1}\varepsilon_1 = 0, \quad M_{0,1}\varepsilon_2 = \alpha \cdot \varepsilon_1, \quad M_{0,1}\varepsilon_3 = \beta \cdot \varepsilon_1 + \gamma \cdot \varepsilon_2.$$

Le vecteur $(1, 1, 0)$ est à la fois un vecteur propre de $M_{1,0}$ (associé à la valeur propre -1) et un vecteur du noyau de $M_{0,1}$ (c'est-à-dire un vecteur propre associé à la valeur propre 0).

Le vecteur $(1, 1, 1)$ vérifie simultanément l'équation $x - y = 0$ et l'équation $x - 2y + z = 0$, donc c'est un vecteur propre de $M_{1,0}$ (associé à la valeur propre 1) et un vecteur propre de $M_{0,1}$ (associé à la valeur propre 0).

En posant $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$, il nous reste à trouver un vecteur ε_3 linéairement indépendant de ε_1 et ε_2 (pour compléter la base) dans le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(M_{1,0} - I_3)$. Comme les sous-espaces propres de $M_{1,0}$ sont en somme directe, il suffit de choisir ε_3 dans $\mathrm{Ker}(M_{1,0} - I_3)$, non proportionnel à ε_2. Faisons simple et prenons par exemple $\varepsilon_3 = (1, 0, -1)$.

```
P = np.array([[1, 1, 0], [1, 1, 1], [1, 0, -1]]).transpose()
R10 = np.dot(np.dot(alg.inv(P), M10), P)
R01 = np.dot(np.dot(alg.inv(P), M01), P)
```

On trouve

$$P^{-1}M_{1,0}P = \mathrm{Diag}(-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad P^{-1}M_{0,1}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On en déduit que

$$P^{-1}M_{a,b}P = aP^{-1}M_{1,0}P + nP^{-1}M_{0,1}P = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

et par conséquent (formule du binôme évidemment)

$$P^{-1}M_{a,b}^{n}P = (P^{-1}M_{a,b}P)^{n} = \begin{pmatrix} (-a)^{n} & 0 & 0 \\ 0 & a^{n} & nba^{n-1} \\ 0 & 0 & a^{n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$P^{-1}M_{a,b}^{n}P = I_3$$

si, et seulement si, $(-a)^{n} = a^{n} = 1$ et $b = 0$: on a bien retrouvé la caractérisation précédente.

> **1.** *Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotence d'indice d.*
> **1. a.** *Démontrer que $d \leqslant n$.*
> **1. b.** *Démontrer que $M^2 - I_n$ est inversible et exprimer son inverse.*
> **2.** *Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que*
> $$M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n.$$
> **2. a.** *Démontrer que $|\operatorname{tr} M| \leqslant n$.*
> **2. b.** *Étudier le cas d'égalité.*
> **2. c.** *Étudier le cas $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. a. Par hypothèse, X^d est un polynôme annulateur de M.

Par définition, le polynôme minimal de M est un diviseur unitaire de X^d, donc il est de la forme X^k.

Par définition de l'indice de nilpotence, X^d est en fait le polynôme minimal de M.

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le degré du polynôme minimal de M est inférieur à n, donc $d \leqslant n$.

✍ *On peut donner une démonstration moins savante (mais pas plus courte) en étudiant les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant d$. Plus précisément, il s'agit de démontrer que*

$$\forall\, 0 \leqslant k < d, \quad \operatorname{Ker} f^k \subsetneq \operatorname{Ker} f^{k+1}.$$

On en déduit alors que

$$\forall\, 0 \leqslant k < d, \quad \dim \operatorname{Ker} f^{k+1} \geqslant 1 + \dim \operatorname{Ker} f^k$$

(inégalité stricte entre nombres entiers) et donc (récurrence finie) que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad \dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant k.$$

En particulier, comme f^d est l'endomorphisme nul,

$$n = \dim E = \dim \operatorname{Ker} f^d \geqslant d.$$

1. b. Comme M est nilpotente, son spectre est réduit à $\{0\}$ (le spectre est l'ensemble des racines du polynôme minimal). Par conséquent, pour tout réel $\lambda \neq 0$, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible, donc la matrice

$$M^2 - I_n = (M - I_n)(M + I_n)$$

est inversible (en tant que produit de matrices inversibles).

Pour tout entier pair $p \geqslant d - 1$, on a donc

$$-(M^2 - I_n)(I_n + M^2 + M^4 + \cdots + M^p) = I_n - M^{p+2} = I_n$$

puisque, par hypothèse sur p, on a $p + 2 \geqslant d$. On en déduit que

$$(M^2 - I_n)^{-1} = -(I_n + M^2 + M^4 + \cdots + M^p)$$

quel que soit l'entier pair $p \geqslant d - 1$ (en changeant l'entier p, on ne fait que rajouter des termes nuls à la somme).

2. a. La matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ admet $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ pour polynôme annulateur.

❧ Dans le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles,

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{X^5 - 1}{X - 1}$$

donc les racines du polynôme annulateur sont les racines cinquièmes de l'unité à l'exception de 1, donc le spectre de M est contenu dans $\mathbb{U}_5$.

En particulier, notre polynôme annulateur est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}[X]$), donc la matrice M est diagonalisable.

❧ Comme M est une matrice à coefficients complexes, son polynôme caractéristique est scindé et par conséquent

$$\operatorname{tr} M = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} m_\lambda \cdot \lambda.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\operatorname{tr} M| \leqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} \underbrace{m_\lambda}_{\in \mathbb{N}^*} \cdot \underbrace{|\lambda|}_{=1} = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} m_\lambda = n.$$

$\boxed{\textbf{2. b.}}$ Il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, les termes complexes de cette somme ont tous le même argument modulo 2π (cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$), c'est-à-dire si M n'admet qu'une seule valeur propre.

Comme M est diagonalisable, on en déduit que M est une homothétie, de rapport $\lambda \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$.

✍ *Faut-il préciser que la réciproque est évidente ?*

$\boxed{\textbf{2. c.}}$ Si M est une matrice à coefficients réels, elle ne peut pas être une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$, donc l'inégalité est stricte :

$$|\operatorname{tr} M| < n.$$

> *Soient* A *et* B*, deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que*
> $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k).$$
> **1.** *Les matrices* A *et* B *sont-elles semblables ?*
> **2.** *Démontrer que les polynômes caractéristiques de* A *et de* B *sont égaux.*

1. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables (leurs rangs sont deux à deux distincts) et pourtant,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k) = \mathrm{tr}(Z^k) = 0$$

et

$$\mathrm{tr}(A^0) = \mathrm{tr}(B^0) = \mathrm{tr}(Z^0) = 3.$$

2. Comme les matrices A et B sont des matrices à coefficients complexes, elles sont semblables à des matrices triangulaires T_A et T_B : il existe deux matrices inversibles P et Q (a priori distinctes) telles que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PT_A^kP^{-1} \quad \text{et} \quad B^k = QT_B^kQ^{-1}.$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(T_A^k) = \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k) = \mathrm{tr}(T_B^k).$$

Nous supposerons donc dorénavant que les matrices A et B sont triangulaires.

En particulier, leurs polynômes caractéristiques sont tous les deux scindés et unitaires. Pour démontrer qu'ils sont égaux, il reste donc à vérifier qu'ils ont les mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

❧ Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, les valeurs propres (complexes, deux à deux distinctes) de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, leurs multiplicités respectives (appartenant à $\mathbb{N}^*$). On a donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \lambda_i^k.$$

On a de même, avec des notations analogues,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(B^k) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \cdot \mu_i^k.$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \lambda_i^k - \sum_{i=1}^{q} \beta_i \cdot \mu_i^k = 0.$$

Pour simplifier cette expression, nous allons poser

$$\{\lambda_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p} \cup \{\mu_i\}_{1 \leqslant i \leqslant q} = \{\nu_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}.$$

On a donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \cdot \nu_i^k = 0$$

avec

$$\gamma_i = \left| \begin{array}{ll} \alpha_j - \beta_\ell \in \mathbb{Z}, & \text{si } \nu_i = \lambda_j = \mu_\ell \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \\ \alpha_j \geqslant 1, & \text{si } \nu_i = \lambda_j \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \mathrm{Sp}(B) \\ -\beta_\ell \leqslant -1, & \text{si } \nu_i = \mu_\ell \in \mathrm{Sp}(B) \setminus \mathrm{Sp}(A). \end{array} \right.$$

Les complexes ν_i étant deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde qui leur est associée est inversible. Or la famille $(\gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est un vecteur qui appartient au noyau de cette matrice : tous les γ_i sont nuls. On est donc dans le premier cas, quel que soit l'indice $1 \leqslant i \leqslant r$.

On en déduit que les familles $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ sont égales à l'ordre près (en particulier $p = q$). Si on prend la peine de les réindexer pour que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p, \quad \alpha_i = \beta_i$$

on en déduit aussi que $\gamma_i = 0 = \mu_i - \nu_i$.

On a ainsi démontré (en admettant un résultat bien connu sur les matrices de Vandermonde) que les matrices A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Par conséquent, ces matrices ont même polynôme caractéristique.

Quels que soient les polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} |t| P(t) Q(t) \, dt.$$

1. *Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Programmer une fonction phi(P,Q) qui renvoie la valeur de $\varphi(P, Q)$.*
3. *Démontrer qu'il existe une, et une seule, suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré du polynôme P_n soit égal à n et que le coefficient dominant de P_n soit positif.*
4. *Programmer une fonction renvoyant le polynôme P_n. Déterminer les polynômes P_k pour $0 \leqslant k \leqslant 4$ et tracer les graphes des fonctions polynomiales associées sur $[-1, 1]$.*
5. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est scindé à racines simples et que ses racines appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.*
6. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n séparent les racines de P_{n+1}.*

2. Il s'agit d'abord d'exprimer l'intégrande f en fonction des polynômes P et Q (ce qu'on fait au moyen d'une *fonction locale*, qui n'existe qu'au sein de la fonction phi(P, Q)) puis d'intégrer la fonction f sur $[-1, 1]$.

```
from numpy.polynomial import Polynomial
from scipy.integrate import quad
import numpy as np

X = Polynomial([0, 1])

def phi(P, Q):
  def f(t):  # fonction locale
    return np.abs(t)*P(t)*Q(t)
  integrale = quad(f, -1, 1)[0]
  return integrale
```

✍ *La fonction quad renvoie un couple constitué de la valeur approchée de l'intégrale et d'une estimation de l'erreur commise. Ici, seule la valeur approchée de l'intégrale nous intéresse, d'où le [0] dans la définition de la variable integrale .*

3. Partant de la base canonique $(X^n)_{n\geqslant 0}$, l'algorithme de Gram-Schmidt construit de proche en proche une base orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en calculant des projetés orthogonaux :

$$Q_0 = X^0 \qquad \forall\, n \geqslant 1, \quad Q_n = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle X^n \,|\, P_i \rangle \cdot P_i$$

puis en les normalisant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \frac{Q_n}{\|Q_n\|}.$$

Il est ainsi clair, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que P_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant $1/\|Q_n\|$ est positif.

✍ *La réciproque est classique, mais difficile en ceci que la démonstration risque de ne pas s'improviser.*

❧ Considérons maintenant une suite orthonormée $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes, échelonnée en degré : $\deg A_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dont les coefficients dominants sont tous positifs.

Par hypothèse, A_0 est un polynôme constant de norme 1, de même que P_0. Comme le sous-espace des polynômes constants est une droite, on en déduit que $A_0 = \pm P_0$. Mais pour les deux polynômes, la constante est aussi le coefficient dominant : elle est donc positive et par conséquent $A_0 = P_0$.

Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$A_0 = P_0, \quad A_1 = P_1, \quad \ldots, \quad A_n = P_n.$$

Comme

$$\mathbb{R}_{n+1}[X] = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n+1}) = \text{Vect}(A_0, A_1, \dots, A_{n+1}),$$

il existe une (unique) famille de scalaires $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ réels tels que

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k \underset{\text{HR}}{=} \alpha_{n+1}P_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k.$$

Par hypothèse,

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle\, A_{n+1} \,|\, A_i \,\rangle = \langle\, P_{n+1} \,|\, P_i \,\rangle = 0.$$

Donc, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle\, A_{n+1} \,|\, A_i \,\rangle &= \alpha_{n+1} \langle\, P_{n+1} \,|\, A_i \,\rangle + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle\, A_k \,|\, A_i \,\rangle \\ &\underset{\text{HR}}{=} \alpha_{n+1} \langle\, P_{n+1} \,|\, P_i \,\rangle + \alpha_i \|A_i\|^2 \\ &= \alpha_i. \end{aligned}$$

On en déduit que $A_{n+1} = \alpha_{n+1}P_{n+1}$. Mais $\|A_{n+1}\| = \|P_{n+1}\| = 1$, donc $|\alpha_{n+1}| = 1$ et comme les coefficients dominants de A_{n+1} et P_{n+1} sont de même signe (positifs), on en déduit que $\alpha_{n+1} = 1$.

On a ainsi démontré par récurrence que $A_n = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'algorithme de Gram-Schmidt ne nous permet pas de calculer P_n sans calculer $P_0, \dots, P_{n-1}$, donc notre fonction va renvoyer la liste $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et pas seulement P_n.

```
def GramSchmidt(n):
  base = BaseCanonique(n)   # cf ci-dessous
  for i in range(n+1):
    # projection orthogonale avec la famille déjà construite
    P = base[i]
    for j in range(i):
      P = P - phi(P, base[j])*base[j]
    # normalisation
    base[i] = P/np.sqrt(phi(P, P))
  return base
```

Cette fonction s'appuie sur la fonction BaseCanonique(n) qui renvoie la famille $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

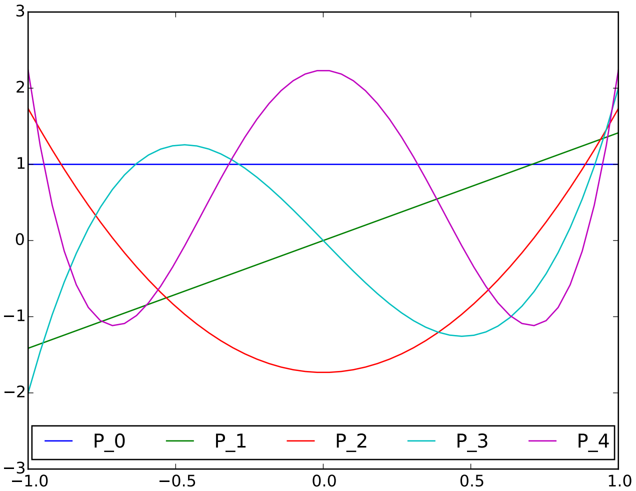
```
U = Polynomial([1])  # X^0
 BaseCanonique(n):
, B = U, [ U ]
or i in range(n):   # ∀ 0 ⩽ i < n,
 P = P*X           # X^{i+1} = X^i.X
.append(P)
eturn B
```

Il ne reste plus qu'à tracer les courbes avec les méthodes usuelles.

```
import matplotlib.pyplot as plt

BON = GramSchmidt(4)
T = np.linspace(-1, 1)
for i, P in enumerate(BON):
  plt.plot(T, P(T), label="P_{}".format(i))
  plt.legend(ncol=5, loc=8)
```

Les propriétés à établir aux questions suivantes apparaissent clairement.



5.

✍ *Classique, très difficile si on ne l'a pas déjà étudié attentivement.*

On sait que P_n est un polynôme de degré n. Il possède donc au plus n racines distinctes et nous allons considérer seulement les racines

$$-1 < a_0 < \cdots < a_{r-1} < 1$$

qui se trouvent dans l'intervalle $]-1,1[$ et *dont la multiplicité est impaire*. Supposons que $r < n$, de telle sorte que le polynôme

$$B = \prod_{0 \leqslant k < r} (X - a_k)$$

appartienne au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$.

Par construction, P_n est orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc

$$0 = \langle P_n \mid B \rangle = \int_{-1}^{1} |t| P_n(t) B(t) \, dt$$

et comme les expressions $P_n(t)$ et $B(t)$ s'annulent en changeant de signe en même temps sur l'intervalle d'intégration (pour $t = a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$), on en déduit que

$$[t \mapsto |t| P_n(t) B(t)]$$

est une fonction continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Cela signifie que

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad |t| P_n(t) B(t) = 0$$

ce qui est impossible (en tant que polynômes non nuls, P_n et B n'ont qu'un nombre fini de racines).

Notre hypothèse $r < n$ est donc absurde : le polynôme P_n possède donc au moins n racines de multiplicité impaire dans $]-1,1[$ et comme $\deg P_n = n$, il possède en fait n racines simples dans $]-1,1[$. Le polynôme P_n est donc scindé à racines simples et toutes ses racines se trouvent dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

6.

✍ *Inutilement difficile ! Suivre les indications de l'examinateur et tâcher d'y répondre intelligemment.*

Soient E et F, deux espaces vectoriels normés de dimension finie et f, une application continue de E dans F. On suppose que $f : E \to F$ est une application ***propre*** *au sens où l'image réciproque de tout compact de F est un compact de E.*

1. *Démontrer que l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F.*

2. *Démontrer que f est propre si, et seulement si,*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty.$$

1.

✍ *Si $f : E \to F$ est une application continue, alors*

- *l'image réciproque par f d'un fermé quelconque $B \subset F$ est un fermé de E et*
- *l'image par f d'un compact quelconque $K_0 \subset E$ est un fermé de F.*

En revanche, l'image réciproque d'un compact de F n'est pas toujours un compact de E : si f est constante et égale à y_0, alors l'image réciproque du compact $\{y_0\}$ est égale à E et n'est donc pas compacte (pas bornée !).

De même, l'image directe d'un fermé de E n'est pas toujours un fermé de F : l'épigraphe de la fonction $[x \mapsto 1/x]$, défini par

$$A = [xy \geqslant 1]$$

est un fermé de $E = \mathbb{R}^2$ (image réciproque du fermé $[1, +\infty[$ par l'application continue $[(x, y) \mapsto xy]$) mais l'image de A par la projection orthogonale sur l'axe des abscisses, égale à $\mathbb{R}^*$, n'est pas un fermé de $F = \mathbb{R}$.

❧ Soient $A \subset E$, une partie fermée, et $B = f_*(A)$, son image par f. On considère une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B qui converge vers $y \in F$ et l'ensemble

$$K = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$$

qui est une partie compacte de F.

✍ *Justifier la compacité de la partie K est un exercice en soi...*

❧ Par définition des y_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que

$$y_n = f(x_n)$$

et l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est contenu dans l'image réciproque $f^*(K)$, qui est, par hypothèse sur f, une partie compacte de E.

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact $f^*(K)$, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\omega \in f^*(K)$.

❧ Par continuité de f,

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\omega)$$

et comme la suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers y, on en déduit que

$$f(\omega) = y.$$

❧ Par construction, les x_{n_k} appartiennent tous à A qui est, par hypothèse, une partie fermée. La limite ω de la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ appartient donc à A et par conséquent $y \in f_*(A)$.

On a ainsi démontré que B était une partie fermée (**caractérisation séquentielle des parties fermées**).

2. Nous allons procéder par double implication.

❧ Soit $A > 0$. L'ensemble

$$\big[\|f(x)\| \leqslant A\big] \subset E$$

est une partie compacte en tant qu'image réciproque par f, application propre, de la partie compacte

$$\big[\|y\| \leqslant A\big] \subset F.$$

En particulier, c'est une partie bornée, donc il existe $r_A > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant A \implies \|x\| \leqslant r_A.$$

Par contraposée,

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| > r_A \implies \big\|f(x)\big\| > A$$

et on a bien démontré que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \big\|f(x)\big\| = +\infty.$$

❧ Réciproquement, on suppose ici que

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, r_0 > 0, \quad \|x\| \geqslant r_0 \implies \big\|f(x)\big\| > A.$$

On considère une partie compacte $K \subset F$. Cette partie est bornée, donc il existe $r_K > 0$ tel que

$$\forall\, y \in K, \quad \|y\| \leqslant r_K.$$

En prenant $A = r_K > 0$, on déduit de l'hypothèse qu'il existe un seuil $r_0 > 0$ tel que

$$\|x\| \geqslant r_0 \implies \big\|f(x)\big\| > r_K.$$

Par contraposée,

$$\begin{aligned} f(x) \in K &\implies \big\|f(x)\big\| \leqslant r_K \\ &\implies \|x\| < r_0 \end{aligned}$$

ce qui signifie que l'image réciproque $[f(x) \in K]$ est bornée.

Par ailleurs, la partie K est fermée et f est continue, donc l'image réciproque $[f(x) \in K]$ est fermée.

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie et que K est une partie fermée et bornée, alors K est une partie compacte de E.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

1. *Calculer u_0 et u_1. Représenter graphiquement u_n pour $n \leqslant 100$. Que peut-on conjecturer ?*

2. *Démontrer cette conjecture.*

3. *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},_q uad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} = \frac{nu_n}{2}.$$

1. On commence par calculer efficacement les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$: il faut pouvoir les calculer pour $0 \leqslant k \leqslant n$ à n fixé. Le mieux est de chercher une relation de récurrence :

— on initialise avec $\binom{n}{0} = 1$;

— on poursuit en remarquant que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k.(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

```
def c_binom(n):
    CB = [1]
    for k in range(1, n+1):
        cb = CB[-1]*(n-k+1)//k
        CB.append(cb)
    return CB
```

✍ *La manière suivante n'est pas indiquée par l'aide-mémoire officiel du concours Centrale.*

```
def c_binom(n):
    CB = [cb(n, k) for k in range(n+1)]
    return CB
```

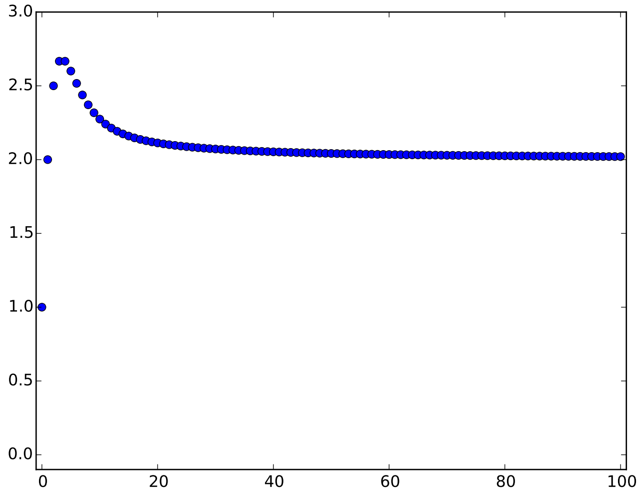
On calcule ensuite facilement les valeurs de u_n.

```
    CB = c_binom(n)
    S = 0
    for c in CB:
        S += 1/c
    return S
```

On vérifie bien que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

❧ On peut alors tracer l'évolution de u_n en fonction de $1 \leqslant n \leqslant 100$.

```
liste_u = [u(n) for n in range(101) ]
plt.plot(liste_u, 'o')
```



Il semble bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Tout d'abord, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et comme tous les coefficients binomiaux sont positifs, on en déduit que $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ensuite, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, donc la somme

$$\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} = \frac{2}{n}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Si $n \geqslant 4$, il reste alors $(n-4)$ termes dans la somme u_n et

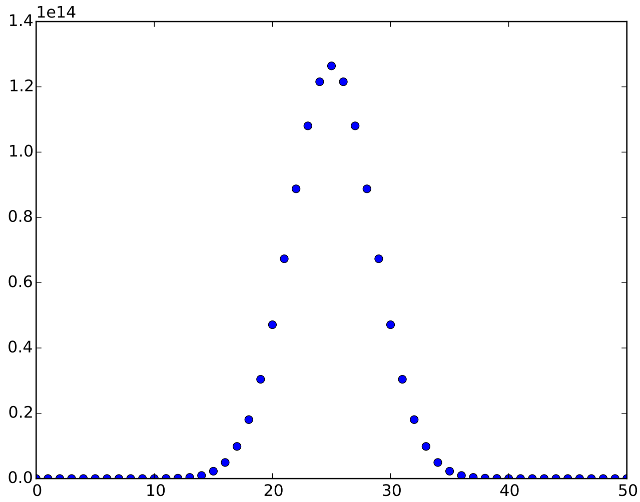
$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n-2, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \geqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

si bien que

$$2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-4)}{n(n-1)} = 2 + \mathcal{O}(1/n).$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge effectivement vers 2.

✍ *Il est important de savoir ici que la famille des $\binom{n}{k}$ est d'abord croissante, puis décroissante, ce qu'on voit bien sur la figure suivante (pour $n = 50$).*



3. Cette dernière question demande de se rappeler la symétrie des coefficients binomiaux !

$$\begin{aligned} nu_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+k}{\binom{n}{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\binom{n}{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} + \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\ell}{\binom{n}{\ell}} && \text{car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}}. \end{aligned}$$

✍ *Cette propriété est facile à vérifier en pratique grâce au code précédent.*

```
CB, S = c_binom(n), 0
for k, c in enumerate(CB):
    S += k/c
return S, n*u(n)/2
```

Soit $\sum a_n$, une série convergente (indexée par $\mathbb{N}^*$) dont le terme général est strictement positif. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. *On suppose que $a_n = 1/n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En approchant R_n par la somme des 100 premiers termes, représenter sur une même figure les séries $\sum a_n$, $\sum \frac{a_{n+1}}{R_n}$ et $\sum \frac{a_{n+1}}{\sqrt{R_n}}$.*

2. *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{a_{n+1}}{\sqrt{R_n}} \leqslant 2(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}}).$$

En déduire la nature de la série $\sum \frac{a_{n+1}}{\sqrt{R_n}}$.

3. *Démontrer que*

$$\forall\, n \geqslant m \geqslant 1, \qquad \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{R_k} \geqslant 1 - \frac{R_{n+1}}{R_m}.$$

En déduire la nature de la série $\sum \frac{a_{n+1}}{R_n}$.

4. *Démontrer qu'il existe un unique réel $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$ tel que la série*

$$\sum \frac{a_{n+1}}{R_n^{\beta}}$$

converge pour $\beta < \alpha$ et diverge pour $\beta > \alpha$.

5. *Expliciter α dans le cas $a_n = 1/n^2$ et dans le cas $a_n = c^n$ (avec $0 < c < 1$).*

1. La série de terme général $a_n = 1/n^2$ est bien convergente !
L'énoncé suggère l'approximation

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \approx \sum_{k=n+1}^{n+100} \frac{1}{k^2}$$

ce qui nous donne le code suivant.

```
def a(n):
    return 1/n**2

def R(n):
    s = 0
    for k in range(n+1, n+101):
        s += a(k)
    return s
```

Il reste ensuite à calculer les sommes partielles des trois séries considérées. Si on tient absolument à éviter le copier/coller, il est assez facile de définir une fonction abstraite mais ce n'est pas une nécessité : l'important ici est de produire vite un code qui fonctionne, pas un code efficace ou élégant.

```
    S = 0
    for i in range(1, n+1):
        S += u(i)
    return S
```

Ce qui suit est très laid (on fait trois fois la même chose, c'est un bon exemple de ce qu'il ne faudrait jamais faire), mais facile à coder et à vérifier.

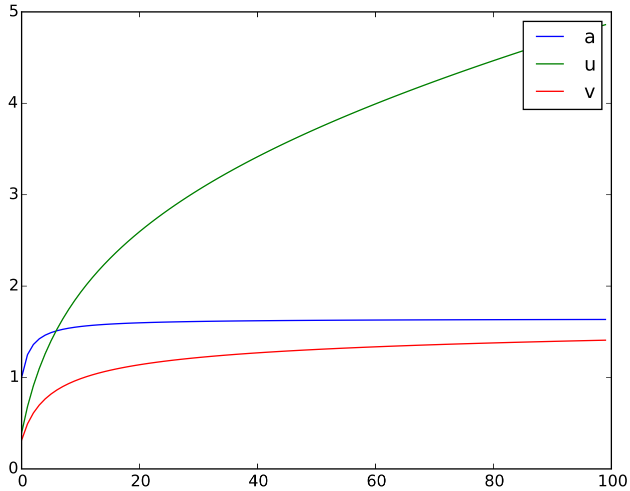
```
A = [somme_part(a, n) for n in range(1, 101) ]

def u(n):
    return a(n+1)/R(n)
U = [somme_part(u, n) for n in range(1, 101) ]
```

```
def v(n):
    return a(n+1)/np.sqrt(R(n))
V = [somme_part(v, n) for n in range(1, 101) ]
```

Il reste à tracer les courbes. On rappelle qu'en fournissant une seule liste de nombres $(\ell_k)_{0 \leqslant k < n}$ à l'instruction plt.plot, on obtient une courbe interpolatrice des points (k, ℓ_k) pour $0 \leqslant k < n$.

```
plt.plot(U, label="u")
plt.plot(V, label="v")
plt.legend()
```



On constate sur la figure que la série $\sum \frac{a_{n+1}}{R_n^\alpha}$ semble converger pour $\beta = 0$ et $\beta = 1/2$ alors qu'elle semble diverger pour $\alpha = 1$, ce qui est en accord avec la suite.

$\boxed{2.}$

$\boxed{3.}$

$\boxed{4.}$

$\boxed{5.}$

rms130-971

On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = y_0 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sqrt{7 - y_n} \quad \textit{et} \quad y_n = \sqrt{7 + x_n}.$$

1. *Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.*
2. *Calculer les 20 premiers termes de ces suites et conjecturer leurs limites respectives.*
3. *On suppose que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Déterminer leurs limites respectives ℓ_x et ℓ_y.*
4. *On pose*

$$K = [0, \sqrt{7}] \times [0, \sqrt{7 + \sqrt{7}}]$$

et

$$\forall\, (x, y) \in K, \quad f(x, y) = \big(\sqrt{7 - y}, \sqrt{7 + x}\big).$$

En munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$, démontrer que l'application f est k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$.
5. *Déterminer un entier n_0 tel que*

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |\ell_x - x_n| \leqslant 10^{-3} \quad \textit{et} \quad |\ell_y - y_n| \leqslant 10^{-3}.$$

Vérifier numériquement.
6. *Démontrer que les suites ne sont pas monotones.*

1. On a bien $0 \leqslant x_0 \leqslant 7$ et $0 \leqslant y_0 \leqslant 7$.
Si x_n et y_n sont bien définis et si $0 \leqslant x_n, y_n \leqslant 7$, alors

$$x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$

sont bien définis et de plus

$$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \sqrt{7} \leqslant y_{n+1} \leqslant \sqrt{14} \leqslant 7.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n, y_n \leqslant 7.$$

✍ *On aurait pu raisonner avec K au lieu de $[0, 7] \times [0, 7]$ mais, pour le moment, ça n'avait pas d'intérêt.*

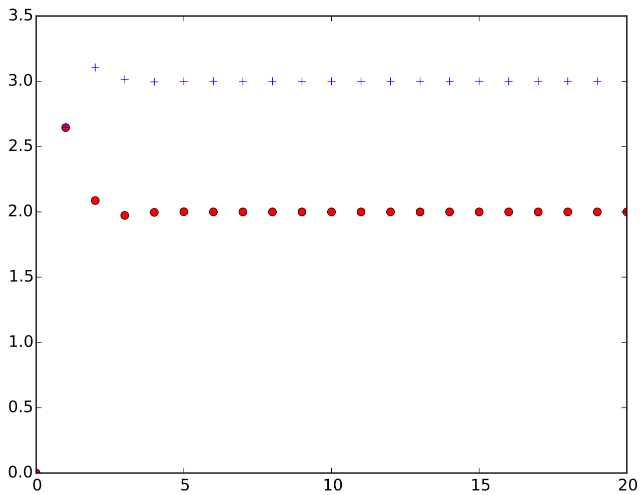
2. Le calcul des 20 premiers termes ne pose pas de difficulté.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def xy(n):
    x, y = 0, 0
    liste_x, liste_y = [x], [y]
    for i in range(n):
        x, y = np.sqrt(7-y), np.sqrt(7+x)
        liste_x.append(x)
        liste_y.append(y)
    return liste_x, liste_y

Lx, Ly = xy(20)
plt.plot(Lx, 'ro')
plt.plot(Ly, 'b+')
```

On constate que les x_n sont rapidement proches de 2 et que les y_n sont rapidement proches de 3.



3. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2, alors on déduit de la relation de récurrence que

$$\ell_1 = \sqrt{7-\ell_2} \quad \text{et que} \quad \ell_2 = \sqrt{7+\ell_1}$$

(par composition de limites). On en déduit que

$$\ell_1^2 + \ell_2 = 7 = \ell_2^2 - \ell_1$$

et donc que

$$\underbrace{(\ell_1+\ell_2)}_{>0}\cdot(\ell_1-\ell_2+1) = 0.$$

On a donc

$$\ell_1^2 + \ell_1 + 1 = 7 \quad \text{et} \quad \ell_2^2 - \ell_2 + 1 = 7$$

avec $\ell_1 \geqslant 0$ et $\ell_2 \geqslant 0$ (en tant que limites de suites positives). On en déduit que $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 3$, conformément à la figure ci-dessus.

4. En raisonnant comme plus haut, on constate que le compact K est stable par f. Comme $(x_0, y_0) \in K$, on en déduit que tous les (x_n, y_n) appartiennent à K.

❧ Soient $(a, b) \in K$ et $(x, y) \in K$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_1$,

$$\big\|f(x,y) - f(a,b)\big\|_1 = \big|\sqrt{7-y} - \sqrt{7-b}\big| + \big|\sqrt{7+x} - \sqrt{7+a}\big|.$$

Les fonctions $\theta = \big[t \mapsto \sqrt{7-t}\big]$ et $\chi = \big[t \mapsto \sqrt{7+t}\big]$ sont dérivables et

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{7}, \quad \big|\chi'(t)\big| = \frac{1}{2\sqrt{7+t}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}}$$
$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{7+\sqrt{7}}, \quad \big|\theta'(t)\big| = \frac{1}{2\sqrt{7-t}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, les fonctions χ et θ sont lipschitziennes et admettent

$$k = \frac{1}{2\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}} \approx 0,253$$

pour constante de Lipschitz commune. On en déduit que

$$\big\|f(x,y) - f(a,b)\big\|_1 \leqslant k|y-b| + k|x-a| = k\|(x,y)-(a,b)\|_1$$

et on a bien $0 < k < 1$.

5. On déduit de la propriété de Lipschitz que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\ell_1 - x_n| \leqslant k^n|\ell_1 - x_0| \leqslant \sqrt{7}\cdot k^n$$

et de même que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\ell_2 - y_n| \leqslant k^n |\ell_2 - y_0| \leqslant \sqrt{7+\sqrt{7}} \cdot k^n.$$

Comme $k \approx 1/4$, on en déduit que, pour $n = 6$, on aura $|\ell_1 - x_n| < 10^{-3}$ et $|\ell_2 - y_n| < 10^{-3}$.

❧ Vérification faite avec le code suivant, l'objectif est presque atteint dès $n = 5$.

```
def erreur(n):
    Lx, Ly = xy(n)
    x, y = Lx[-1], Ly[-1]
    return n, np.abs(2-x), np.abs(3-y)
```

6. Désolé !

1. *Soient E, un espace vectoriel et u, un endomorphisme nilpotent de E. Démontrer que $v = \mathrm{Id}_E + u$ est inversible et déterminer v^{-1}.*

2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.*

2. a. *Démontrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que*

$$Q'' + Q = P.$$

2. b. *On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$ et que P est divisible par X^n. Démontrer que $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et que $Q(0)$ est divisible par $n!$.*

3. *On suppose que $\pi = {}^p/_q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$P_n = (p - qX)^n$$

et on note Q_n, l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q_n'' + Q_n = P_n.$$

En considérant

$$\frac{1}{n!}\int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt,$$

démontrer que π est irrationnel.

1. Supposons que l'indice de nilpotence de u soit égal à d et posons

$$w = I - u + \cdots + (-1)^{d-1}u^{d-1} = \sum_{k=0}^{d-1}(-u)^k \in L(E).$$

Il est clair que v et w commutent (ce sont des polynômes en u) et

$$\begin{aligned}
w \circ v &= \sum_{k=0}^{d-1}(-u)^k \circ (I + u) \\
&= \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k(u^k + u^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k u^k - \sum_{k=1}^{d}(-1)^k u^k && \text{(changement d'indice)} \\
&= I + (-1)^d u^d && \text{(télescopage)} \\
&= I && (\text{car } u^d = \omega_E)
\end{aligned}$$

donc v est inversible et

$$v^{-1} = \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k v^k.$$

✍ *Question très classique !*

2. a. Soit d, le degré de P. Il est clair que $u = [Q \mapsto Q'']$ est un endomorphisme nilpotent de $E = \mathbb{R}_d[X]$ et son indice de nilpotence est inférieur à d (peu importe sa valeur exacte).

✍ *Sur $\mathbb{R}[X]$, l'endomorphisme $[Q \mapsto Q'']$ n'est pas nilpotent ! (Bien que 0 soit sa seule valeur propre...)*

D'après la question précédente, l'endomorphisme $v = I + u$ est inversible, donc il existe un, et un seul, polynôme $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que

$$Q'' + Q = v(Q) = P.$$

De plus,

$$Q = v^{-1}(P) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k v^k(P) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k P^{(2k)}. \tag{21}$$

2. b. En tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (et pas de $\mathbb{R}_d[X]$), l'application ν est inversible car

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \deg \nu(Q) = \deg Q$$

et en particulier, l'image de la base canonique est une famille de polynômes échelonnés en degré.

On en déduit d'une part qu'il existe un, et un seul, polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'' + Q = P$ et d'autre part que $\deg Q = \deg P$.

❧ Il est clair d'après (21) que : si les coefficients de P sont des entiers relatifs, alors les coefficients de Q sont aussi des entiers relatifs.

❧ Comme P est à coefficients entiers, $P^{(2k)}$ est aussi un polynôme à coefficients entiers et en particulier $P^{(2k)}(0)$ est un entier.

Supposons que $P \in \mathbb{Z}[X]$ soit divisible par X^n : il existe donc un polynôme $U_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tel que $P = X^n.U_n$. D'après la Formule de Leibniz,

$$P^{(2k)} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \cdot D^j(X^n) \cdot D^{2k-j}U_n$$

en notant D la dérivation sur l'espace des polynômes.

Par définition,

$$\begin{aligned} \forall\, j < n, \quad D^j(X^n) &= \frac{n!}{(n-j)!} \cdot X^{n-j} \\ D^n(X^n) &= n! \\ \forall\, j > n, \quad D^j(X^n) &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent,

— si $2k < n$, alors $P^{(2k)}(0) = 0$ puisque tous les termes sont nuls ;

— si $2k \geqslant n$, alors

$$P^{(2k)}(0) = \binom{2k}{n} \cdot n! \cdot (D^{2k-n}U_n)(0).$$

On sait que les coefficients binomiaux sont des entiers et comme U_n est un polynôme à coefficients entiers, on en déduit que

$$(D^{2k-n}U_n)(0) \in \mathbb{Z}.$$

Quel que soit l'entier k, l'entier $P^{(2k)}(0)$ est donc bien un multiple de $n!$. Par conséquent, l'entier

$$Q(0) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k P^{(2k)}(0)$$

est un multiple de $n!$ (en tant que somme de multiples, éventuellement nuls, de $n!$).

3. On pose

$$P_n = X^n(p - qX)^n \in \mathbb{Z}[X].$$

D'après la question précédente, il existe un, et un seul, polynôme $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$Q_n'' + Q_n = P_n,$$

et l'entier $Q_n(0)$ est divisible par $n!$.

Considérons maintenant

$$Q_n(\pi - X) = Q_n\Big(\frac{p}{q} - X\Big) = \Big(\frac{p}{q} - X\Big)^n (qX)^n = Q_n.$$

On en déduit que $Q_n(\pi) = Q_n(0)$.

❧ On intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \,dt &= \int_0^\pi \big[Q_n''(t) + Q_n(t)\big] \sin t \,dt \\ &= \big[Q_n'(t) \sin t\big]_0^\pi + \int_0^\pi Q_n'(t) \cos t \,dt + \int_0^\pi Q_n(t) \sin t \,dt \\ &= \big[Q_n(t) \cos t\big]_0^\pi - \int_0^\pi Q_n(t) \sin t \,dt + \int_0^\pi Q_n(t) \sin t \,dt \\ &= -2Q_n(0) \in n!\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par conséquent,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t\,dt \in \mathbb{Z}.$$
Mais la fonction $[t \mapsto P_n(t)\sin t]$ est clairement continue et strictement positive sur $]0, \pi[$, donc
$$\frac{1}{n!}\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t\,dt > 0$$
et finalement
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t\,dt \in \mathbb{N}.$$
Cela dit,
$$\forall\, t \in [0, \pi], \quad P_n(t)\sin t \leqslant \pi^n \cdot p^n$$
donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t\,dt \leqslant \frac{\pi^{n+1}p^n}{n!}$$
et par croissances comparées,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t\,dt = 0.$$
Mais une suite d'entiers strictement positifs ne peut pas tendre vers 0, cette contradiction prouve que π ne peut pas s'écrire p/q : le nombre π est donc irrationnel.

*On appelle **dérivation** sur $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ tout endomorphisme δ de E tel que*

$$\forall\, f, g \in E, \quad \delta(fg) = \delta(f)\cdot g + f\cdot\delta(g).$$

1. *Soit δ, une dérivation de E. Quelle est l'image d'une fonction constante ?*
2. *Soit $f \in E$ telle que $f(0) = 0$. Démontrer qu'il existe une fonction $g \in E$ telle que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xg(x).$$

3. *Déterminer les dérivations de E.*

1. Soit $\varphi_0 = [t \mapsto 1]$. On a donc $\varphi_0 = \varphi_0^2$ et par définition d'une dérivation,

$$\delta(\varphi_0) = 2\varphi_0\cdot\delta(\varphi_0) = 2\cdot\delta(\varphi_0).$$

On en déduit que la fonction $\delta(\varphi_0)$ est identiquement nulle et, par linéarité de δ, l'image par δ de toute fonction constante est la fonction nulle.

2. Soit $f \in E$, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$. D'après le Théorème fondamental,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

et en posant $t = x\cdot u$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x\int_0^1 f'(x\cdot u)\,du.$$

Il est clair que cette égalité est encore vraie pour $x = 0$. Il reste donc à vérifier que la fonction g définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 f'(x\cdot u)\,du$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on pose

$$\forall\,(x,u) \in \mathbb{R}\times[0,1], \quad \gamma(x,u) = f'(x\cdot u).$$

Il est clair que l'application

$$[x \mapsto \gamma(x,u)]$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (régularité) et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k}(x,u) = u^k\cdot f^{(k+1)}(x\cdot u).$$

Il est tout aussi clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k}(x,u)\right]$$

est intégrable sur le segment $[0,1]$: c'est une fonction continue.

Quant à la domination, il suffit de considérer un réel $A > 0$ et de supposer que $x \in [-A,A]$. Pour tout $u \in [0,1]$, on a donc

$$x\cdot u \in [-A,A]$$

et par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in [-A,A],\ \forall\, t \in [0,1], \quad \left|\frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k}(x,u)\right| \leqslant \max_{t\in[-A,A]} f^{(k+1)}(t)$$

ce maximum existant bien puisque $f^{(k+1)}$ est une fonction continue sur le segment $[-A,A]$.

On a ainsi trouvé un majorant indépendant de $x \in [-A,A]$ et intégrable sur $[0,1]$ (toute fonction constante est intégrable sur un intervalle borné).

On en déduit que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (= l'union des segments $[-A, A]$) et que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(x \cdot u)\, du.$$

✍ *De manière analogue, en supposant que*

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0,$$

on déduirait de la Formule de Taylor avec reste intégral que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

et donc que, avec le même changement de variable,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x \cdot u)\, du$$

(y compris pour $x = 0$). Bien entendu, et pour les mêmes raisons que celles qu'on a évoquées plus haut, l'intégrale est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de la variable x.

3. Plus généralement, si $f \in E$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $g_a \in E$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(a) + (x-a)g_a(x) \qquad \text{et que} \qquad g_a(a) = f'(a).$$

Si δ est une dérivation, on en déduit que

$$\delta(f) = 0 + \delta(X) \cdot g_a + (X - a) \cdot \delta(g_a)$$

où $X \in E$ désigne l'application $[x \mapsto x]$.

✍ *Les applications constantes $[x \mapsto f(a)]$ et $[x \mapsto a]$ appartiennent au noyau de la dérivation.*

On a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \delta(f)(x) = \delta(X)(x) \cdot g_a(x) + (x-a) \cdot \delta(g_a)(x)$$

et en particulier

$$\delta(f)(a) = \delta(X)(a) \cdot g_a(a) + (a-a) \cdot \delta(g_a)(a) = \delta(X)(a) \cdot f'(a).$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, f \in E, \quad \delta(f) = \delta(X) \cdot f'.$$

✍ *Toute dérivation sur E se déduit donc de la dérivation usuelle.*
Quelle que soit la fonction $\varphi \in E$, l'application $\delta_\varphi = [f \mapsto \varphi \cdot f']$ est une dérivation sur E. Il existe donc un isomorphisme entre E et les dérivations sur E.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On définit deux suites réelles u et v en posant $u_0 = x$, puis

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\ell n\, u_n}{2^n}.$$

1. a. *Définir deux fonctions u(n,x) et v(n,x). Pour $x = 0,3$ et $n \leqslant 10$, donner u_n et v_n.*

1. b. *Tracer (n, u_n) et (n, v_n) pour différentes valeurs de n et de x. Formuler une conjecture.*

1. c. *Étudier la monotonie de u.*

1. d. *Démontrer qu'il existe un réel α tel que*

$$\alpha - v_n \underset{n \to +\infty}{=} o(2^{-n}).$$

1. e. *En déduire un équivalent simple de u_n.*

2. *On fait maintenant varier x.*

2. a. *Démontrer que*

$$\alpha(x) = \ell n\, x + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \ell n\Big(1 + \frac{1}{u_k(x)}\Big)$$

pour tout $x > 0$.

2. b. *Étudier la monotonie de α en fonction de x.*

2. c. *Démontrer que α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*

2. d. *Tracer*

$$\ell n\, x + \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2k+1} \ell n\Big(1 + \frac{1}{u_n(x)}\Big)$$

pour $0 < x < 20$.

1. a. Le calcul des u_n et des v_n est sans mystère.

```
import numpy as np

def u(n, x):
    un = x
    for i in range(n):
        un = un + un**2/2
    return un

def v(n, x):
    return np.log(u(n, x))/2**n

for n in range(11):
    print(u(n, 0.3), v(n, 0.3))
```

On se rend compte numériquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend rapidement de grandes valeurs. Cela s'explique par la relation de récurrence, qui nous dit que cette suite est strictement croissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 > u_n.$$

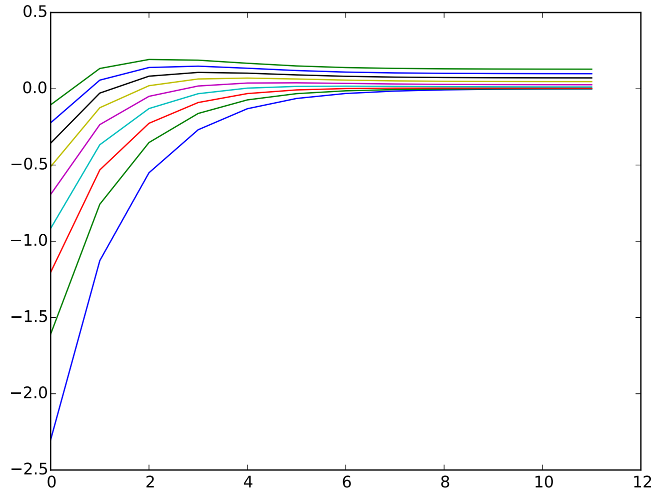
La seule solution réelle de $\ell = \ell + \ell^2$ est $\ell = 0$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (strictement positive et croissante) convergeait, ce serait donc vers 0, ce qui est absurde. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

1. b. Difficile d'émettre une conjecture : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend si vite vers $+\infty$ qu'un débordement de capacité se produit avant $n = 20$ (pour $x = 0,3$), rendant impossible le calcul des v_n.

Cela dit, avec le code suivant, on a l'impression que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge assez vite, indépendamment du choix de x, et que sa limite est une fonction croissante de x.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.figure()
X = np.arange(0.1, 1, 0.1)
for x in X:
    plt.plot([v(n,x) for n in range(12)])
```



1. c. On a déjà démontré que, pour tout $x > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était strictement croissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 > u_n.$$

Allons plus loin en considérant $0 < x < y$. On a donc $u_0(x) < u_0(y)$. S'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(x) < u_n(y)$, alors

$$u_{n+1}(x) = f\big(u_n(x)\big) < f\big(u_n(y)\big) = u_{n+1}(y)$$

puisque la fonction $f = \big[t \mapsto t + t^2\big]$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi établi une autre forme de monotonie : si $x < y$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) < u_n(y)$$

et par conséquent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n(x) < v_n(y).$$

1. d. D'après la relation de récurrence,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ell n\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big).$$

On a vu que, pour tout $x > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était strictement croissante et tendait vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\ell n\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big) = o(1)$$

et donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

La série géométrique $\sum 1/2^n$ est absolument convergente, donc la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est convergente. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. En notant α, la limite de cette suite, on déduit du théorème de sommation des relations de comparaison que

$$\alpha - v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\Big) = o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

1. e. On vient d'établir que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

On en déduit que

$$\ell n\, u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2^n\left[\alpha + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right] = 2^n\alpha + o(1)$$

et donc, par continuité de exp, que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(2^n\alpha).$$

2. a. Par définition de $\alpha = \alpha(x)$,

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= v_0(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} v_{k+1}(x) - v_k(x)\\ &= \ell n\, x + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\,\ell n\left(1 + \frac{1}{u_k(x)}\right).\end{aligned}$$

2. b. On a observé que

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_n(x) < v_n(y).$$

Par définition de $\alpha(x)$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0,\quad \alpha(x) \leqslant \alpha(y).$$

La fonction α est donc croissante.

2. c. On a remarqué que $u_k(x) \geqslant u_0(x) = x$ pour tout $x > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \ell n\left(1 + \frac{1}{u_k(x)}\right) \leqslant \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

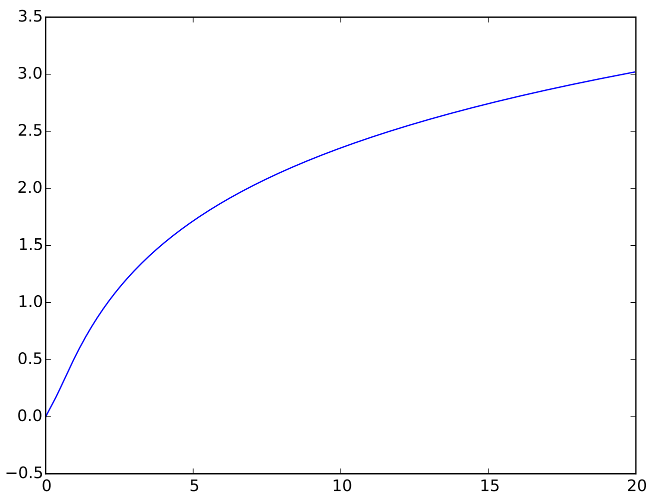
Cet encadrement prouve que la série de fonctions converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et donc que la fonction α est continue comme somme de deux fonctions continues.

2. d. Le tracé du graphe est sans mystère et l'étude de la convergence normale nous assure qu'il s'agit d'une bonne approximation de $\alpha(x)$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def S(x):
    s = np.log(x)
    for k in range(11):
        s += np.log(1 + 1/u(k, x))/(2**(k+1))
    return s

plt.figure()
X = np.arange(0.001, 20, 0.05)
plt.plot(X, [S(x) for x in X])
plt.xlim(-1, 20)
```



On a la confirmation visuelle de la croissance de la fonction α.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\sin t)\,dt$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on pose

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x}\sin t)\,dt.$$

1. *Tracer le graphe de φ sur $[-3, 5]$ et sur $[-10^3, 0]$.*
2. *Déterminer la limite de φ au voisinage de $+\infty$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,dt.$$

Trouver une relation de récurrence entre les K_n. Exprimer K_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. *Démontrer que φ est somme d'une série entière, que l'on précisera.*
5. *Démontrer que φ est positive sur $[-1, +\infty[$, croissante sur $[-2, +\infty[$ et convexe sur $[-3, +\infty[$.*

1. Il est clair que les deux définitions de $\varphi(x)$ coïncident pour $x = 0$: dans les deux cas, on a $\varphi(0) = 1$.

❧ On suit les indications du résumé *Analyse numérique*.

```
from scipy.integrate import quad
pi_sur_deux = np.pi/2

def phi(x):
    def f(t):
        if (x>0):
            return np.cosh(2*np.sqrt(x)*np.sin(t))
        else:
            return np.cos(2*np.sqrt(-x)*np.sin(t))
    return 1/pi_sur_deux*quad(f, 0, pi_sur_deux)[0]
```

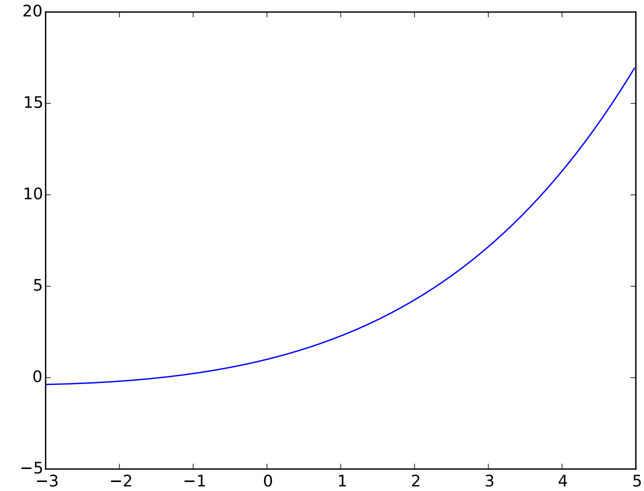
Le tracé des courbes ne pose alors pas de difficulté.

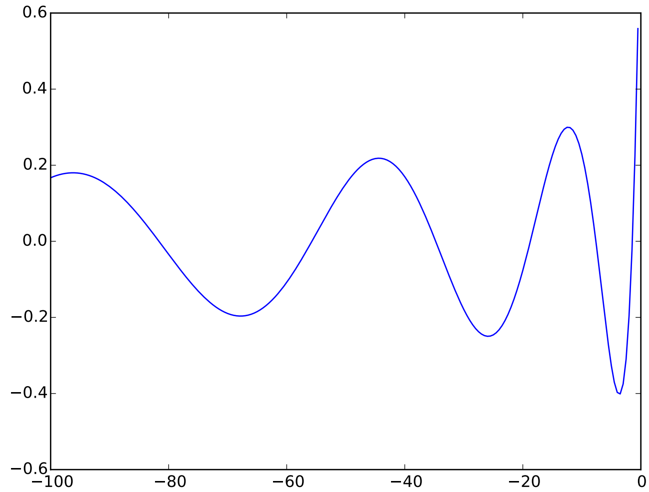
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
X = np.arange(-3, 5, 0.02)
plt.plot(X, [phi(x) for x in X])

plt.figure()
X = np.arange(-100, 0, 0.5)
plt.plot(X, [phi(x) for x in X])
```

On obtient successivement les deux graphes suivants.





2. Pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ch}(\sqrt{x})\,dt = \frac{2}{3}\operatorname{ch}(\sqrt{x})$$

donc φ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ (avec une branche parabolique d'axe (Oy)).

3. On reconnaît les intégrales de Wallis. On a en particulier

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad K_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} K_n.$$

4. On développe ch et cos en série entière et on justifie l'intégration terme à terme (par exemple en invoquant la convergence normale sur le segment $[0, \pi/2]$).

On obtient alors

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n K_n}{(2n)!}\, x^n$$

pour tout x réel (positif ou négatif !).

5. Les propriétés sont évidentes pour $x \geqslant 0$ (il suffit d'invoquer la positivité de l'intégrale).

❧ Pour $x \leqslant 0$, on déduit du développement en série entière que $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ sont les sommes de séries alternées.

❧ Tout d'abord,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \qquad \text{avec} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(4|x|)^n K_n}{(2n)!}.$$

Avec la formule de récurrence des intégrales de Wallis, on a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{4|x|}{(2n+2)^2} \cdot u_n.$$

Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $0 < u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut déduire du Critère spécial des séries alternées que la somme $\varphi(x)$ est positive (= du signe du premier terme).

❧ Ensuite, puisque le rayon de convergence est infini, on peut dériver terme à terme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n4^n K_n}{(2n)!} \cdot x^{n-1}$$

et, en particulier,

$$\forall\, x \leqslant 0, \qquad \varphi'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m v_m \qquad \text{avec} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad v_m = \frac{(m+1)4^{m+1}|x|^m K_{m+1}}{(2m+2)!}.$$

Avec la formule de récurrence des intégrales de Wallis, on a donc

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad v_{m+1} = \frac{|x|}{(m+1)(m+2)} \cdot v_m.$$

En particulier, si $-2 \leqslant x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant v_{m+1} \leqslant v_m$ et on peut déduire du Critère spécial des séries alternées que la somme $\varphi'(x)$ est positive.

❧ Enfin,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)K_n}{(2n)!} \cdot x^{n-2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+2)(m+1)K_{m+2}}{(2m+4)!} \cdot x^m$$

et, en particulier,

$$\forall\, x \leqslant 0, \qquad \varphi''(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m w_m \qquad \text{avec} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad w_m = \frac{(m+2)(m+1)K_{m+2}}{(2m+4)!} \cdot |x|^m.$$

Comme précédemment, on a donc

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad w_{m+1} = \frac{|x|}{(m+1)(m+3)} \cdot w_m.$$

En particulier, si $-3 \leqslant x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant w_{m+1} \leqslant w_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et, une fois de plus, on déduit du Critère spécial des séries alternées que la somme $\varphi''(x)$ est positive.

rms130-981

> *Soient* U*, un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* f*, une application de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* U *dans* $\mathbb{R}$*.*
> *Démontrer que* f *est convexe sur* U *si, et seulement si,*
> $$\forall\, a, b \in U, \quad f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f(a) \,|\, b - a \rangle .$$

Comme U est supposé ouvert, il y a un sens à supposer que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et comme U est supposé convexe :
$$\forall\, (a, b) \in U \times U,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad (1-t)a + tb \in U$$
et il y a donc un sens à supposer que f soit convexe sur U.

❧ On suppose que f est convexe sur U et on fixe deux points $a \neq b$ dans U :
$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f\big((1-t)a + tb\big) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b).$$

L'application $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall\, x \in [0, 1], \quad g(x) = f\big((1-x)a + xb\big)$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ (comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$).

Quels que soient $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ et $t \in [0, 1]$, on pose
$$z = (1-t)x + ty \in [0, 1]$$
et (par associativité du barycentre)
$$(1-z)a + zb = (1-t)\big[(1-x)a + xb\big] + t\big[(1-y)a + yb\big]$$
donc (par convexité de f)
$$g(z) \leqslant (1-t)g(x) + tg(y)$$
ce qui prouve que g est convexe sur $[0, 1]$.

En particulier, la dérivée de g est une fonction croissante et donc
$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \geqslant g'(0)$$
c'est-à-dire
$$f(b) - f(a) \geqslant df(a)(b-a) = \big\langle \nabla f(a) \,\big|\, b - a \big\rangle .$$

❧ Réciproquement, on suppose que
$$\boxed{\forall\, (u, v) \in U \times U,} \quad f(u) \geqslant f(v) + \big\langle \nabla f(v) \,\big|\, u - v \big\rangle$$
et on considère trois points de U :
$$a, \quad b \quad \text{et} \quad c = (1-t)a + tb$$
(où $t \in [0, 1]$).

Par hypothèse,
$$f(a) \geqslant f(c) + \big\langle \nabla f(c) \,\big|\, a - c \big\rangle ,$$
$$f(b) \geqslant f(c) + \big\langle \nabla f(c) \,\big|\, b - c \big\rangle .$$

Or $a - c = t(a - b)$ et $b - c = (1-t)(b-a)$, donc
$$f(a) \geqslant f(c) - t\big\langle \nabla f(c) \,\big|\, b - a \big\rangle ,$$
$$f(b) \geqslant f(c) + (1-t)\big\langle \nabla f(c) \,\big|\, b - a \big\rangle$$
donc
$$t\big[f(b) - f(c)\big] \geqslant t(1-t)\big\langle \nabla f(c) \,\big|\, b - a \big\rangle \geqslant (1-t)\big[f(c) - f(a)\big]$$
et finalement
$$f(c) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b),$$
ce qui prouve que f est bien convexe sur U.

Soient $s \in]1, +\infty[$ et X, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s).n^s}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "l'entier n divise X".

1. *Vérifier que $A \in \mathcal{A}$ et calculer $\mathbf{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

2. *Soient $n_1, \dots, n_k$, des entiers deux à deux premiers entre eux. Démontrer que $(A_{n_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une famille d'événements indépendants.*

3. *Soit $(p_n)_{n \geqslant 1}$, la suite croissante des entiers premiers. Démontrer que*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} = \zeta(s).$$

4. *Démontrer que la série $\sum 1/p_n$ est divergente.*

1. Pour tout $s > 1$, il est clair que la famille de terme général

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}$$

est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

Par conséquent, il existe bien une variable aléatoire discrète

$$X\ :\ (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{N}^*$$

telle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}.$$

✍ *La question n'est pas posée, mais il faut savoir y répondre !*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier n divise l'entier $X(\omega)$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$X(\omega) = k.n$$

donc

$$[n \text{ divise } X] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = kn].$$

Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, chaque $[X = kn]$ est un événement et, par union dénombrable,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = [n \text{ divise } X] \in \mathcal{A}.$$

Par σ-additivité (puisque les événements qui composent A_n sont deux à deux disjoints),

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = kn) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(kn)^s} = \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}.$$

2. D'après le Théorème de Gauss, si n_1, ..., n_r sont des entiers deux à deux premiers entre eux qui divisent l'entier $X(\omega)$, alors le produit $n_1 \cdots n_r$ divise $X(\omega)$.

La réciproque est évidente : si $n_1 \cdots n_r$ divise $X(\omega)$, alors $n_1, \dots, n_r$ divisent $X(\omega)$. Donc

$$\bigcap_{k=1}^{r} A_{n_k} = A_{n_1 \cdots n_r}$$

et, d'après la loi de X,

$$\mathbf{P}(A_{n_1 \cdots n_r}) = \frac{1}{(n_1 \cdots n_r)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{n_k^s}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{r} A_{n_k}\Big) = \prod_{k=1}^{r} \mathbf{P}(A_{n_k}).$$

✍ *Par définition, des événements* $B_1, \dots, B_r$ *sont (mutuellement) indépendants lorsque*

$$\mathbf{P}(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_d}) = \prod_{k=1}^{d} \mathbf{P}(B_{i_k})$$

quel que soit *l'entier* $2 \leqslant d \leqslant r$, ***quels que soient*** *les indices*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leqslant r.$$

Rien que d'écrire cette définition, on frémit !

Si les entiers $n_1, \dots, n_r$ sont deux à deux premiers entre eux, il en va évidemment de même pour les entiers $n_{i_1}, \dots, n_{i_d}$, quel que soit l'entier $2 \leqslant d \leqslant r$, quels que soient les indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant r$ et par conséquent

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{d} A_{n_{i_k}}\Big) = \prod_{k=1}^{d} \mathbf{P}(A_{n_{i_k}}).$$

On a donc bien démontré que les événements

$$A_{n_1}, \dots, A_{n_r}$$

étaient (mutuellement) indépendants.

1. *Démontrer qu'il existe un réel $1 < a < 2$ et un complexe b vérifiant $|b| < 1$ tels que*

$$X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\overline{b}).$$

2. *On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on note p_n, la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer.*
Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1} et p_{n+2}.

3. *Calculer p_n et donner un équivalent de p_n.*

1. On remarque que $P(1) = -2 < 0$ et $P(2) = 1 > 0$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $1 < a < 2$ tel que $P(a) = 0$.

Les racines de $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ sont 1 et $-1/3$ et $P'(x)$, expression polynomiale du second degré, est négatif entre ses racines. Donc P est croissante sur $]-\infty, -1/3]$, décroissante sur $[-1/3, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

Comme

$$P(-1/3) = \frac{-1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 < 0,$$

on peut déduire du tableau de variations de P que P admet une racine réelle unique.

Puisque P est un polynôme de degré trois à coefficients réels, il admet donc aussi deux racines complexes conjuguées b et $\overline{b}$.

Le terme constant du polynôme nous indique que le produit des trois racines est égal à 1. Donc

$$a \times |b|^2 = 1$$

et par conséquent $|b| = \frac{1}{\sqrt{a}} < 1$.

✍ *Il est utile d'avoir en tête les différentes formes possibles pour le graphe d'un polynôme de degré 3. À défaut de connaître les formules de Cardan (qui donnent les racines d'un polynôme de degré 3) ou de pouvoir les appliquer, on doit pouvoir localiser les racines en discutant sur les variations du polynôme.*

2. On modélise le jeu de Pile ou Face par une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, (mutuellement) indépendantes et qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $p = 1/2$ (puisque la pièce est supposée équilibrée).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n, l'ensemble des suites

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$$

pour lesquelles le plus petit indice k tel que

$$\varepsilon_{k-2} = \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k = 1$$

est égal à n. Autrement dit, E_n est l'ensemble des résultats possibles pour lesquels la séquence PPP apparaît pour la première fois au n-ième lancer et par conséquent

$$p_n = \mathbf{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in E_n\big).$$

3.

rms130-985

1. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires. On suppose que X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/n)$ pour tout $n \geqslant 1$ et on note G_{X_n}, la fonction génératrice de X_n.*

1. a. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer que la suite $\big(\mathbf{P}(X_n = k)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

1. b. *Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la suite des fonctions génératrices G_{X_n} converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction génératrice G_X.*

1. c. *La convergence est-elle uniforme ?*

2. *Soient X et $(X_n)_{n\geqslant 1}$, des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note G (resp. G_n), la fonction génératrice de la variable X (resp. de X_n).*

2. a. *On suppose que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k).$$

Démontrer que la suite $(G_{X_n})_{n\geqslant 1}$ des fonctions génératrices converge simplement sur $[0, 1]$ vers G_X.

2. b. *Établir la réciproque.*

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

On reconnaît la loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$.

1. b. Comme X_n suit la loi $\mathscr{B}(n, 1/n)$,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G_{X_n}(t) = \left(1-\frac{1}{n}+\frac{t}{n}\right)^n = \left(1+\frac{t-1}{n}\right)^n.$$

Soit X, une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{P}(1)$:

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{k!}t^k = e^{t-1}.$$

On constate en effet que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(t).$$

1. c. Soit $n \geqslant 2$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur le segment $[-1/2, 0]$:

$$\forall\, x \in [-1/2, 0], \quad \big|\ell n(1+x) - x\big| \leqslant x^2.$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad \left|\ell n\left(1+\frac{t-1}{n}\right) - \frac{t-1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et donc que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad \left|n\,\ell n\left(1+\frac{t-1}{n}\right) - (t-1)\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Il est clair que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad -1 \leqslant (t-1) \leqslant 0$$

et on en déduit que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad -1-\frac{1}{n} \leqslant n\,\ell n\left(1+\frac{t-1}{n}\right) \leqslant 0.$$

On applique l'inégalité des accroissements finis (= Taylor-Lagrange à l'ordre 1) sur le segment $[-3/2, 0]$ à la fonction exp : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, -3/2 \leqslant u, v \leqslant 0, \quad \left|\exp(u) - \exp(v)\right| \leqslant K|u - v|$$

et on en déduit enfin que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|\exp\left[n\ln\left(1 + \frac{t-1}{n}\right)\right] - \exp(t-1)\right| \leqslant \frac{K}{n}.$$

Le majorant est indépendant de $t \in [0,1]$ et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite des fonctions génératrices des X_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction génératrice de X.

2. a. Par hypothèse,

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k \quad \text{et} \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k)t^k.$$

✍ *Comme $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, on sait que la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est (absolument) convergente, ce qui prouve que la série entière $\sum \mathbf{P}(X = k)t^k$ converge normalement sur $[-1,1]$.*

Il en va bien sûr de même pour chaque variable aléatoire X_n.

❧ Fixons arbitrairement un entier $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\left|G_n(t) - G(t)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)\right| t^k && \text{(inégalité triangulaire (famille sommable))}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)\right| && \text{(car } 0 \leqslant t^k \leqslant 1\text{)}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N} \left|\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)
\end{aligned}$$

(relation de Chasles et inégalité triangulaire).

On sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1.$$

On déduit alors de la relation de Chasles et de l'inégalité triangulaire (pour les familles finies) que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) &= 1 - \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) + \sum_{k=0}^{N} \left[\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)\right]\\
&\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) + \sum_{k=0}^{N} \left|\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)\right|.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\left|G_n(t) - G(t)\right| \leqslant 2\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) + 2\sum_{k=0}^{N} \left|\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)\right|.$$

❧ Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est une série convergente de terme général positif, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leqslant \varepsilon.$$

✍ *La suite des restes tend vers 0.*

L'entier N étant fixé, on déduit de l'hypothèse que la suite de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{N} \left| \mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k) \right|$$

tend vers 0. Il existe donc un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \qquad 0 \leqslant w_n \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant N_0,\ \forall\, t \in [0,1], \quad \left| G_n(t) - G(t) \right| \leqslant 4\varepsilon.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t, donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_0, \qquad \|G_n - G\|_\infty \leqslant 4\varepsilon.$$

✍ *L'important ici est que l'entier N_0 dépende seulement du choix de ε (et pas de la valeur de t) pour établir la convergence uniforme — il n'aurait pas été plus simple de prouver la convergence simple !*

2. b. Avec les mêmes notations, on suppose que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} G_n(t) = G(t). \tag{22}$$

❧ En particulier,

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = G_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G(0) = \mathbf{P}(X = 0).$$

❧ **HR :** On suppose qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant k, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = i) = \mathbf{P}(X = i).$$

D'après **HR**,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X_n = i)t^i = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i)t^i. \tag{23}$$

On pose alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_{n,k+1}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k+1+i)t^i$$
$$G_{\infty,k+1}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k+1+i)t^i.$$

On retranche (23) de (22) et on divise par t^{k+1} pour obtenir

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad \lim_{n\to+\infty} G_{n,k+1}(t) = G_{\infty,k+1}(t). \tag{24}$$

Il nous reste à vérifier que cette propriété est encore vraie pour $t = 0$, ce qui nous donnera

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k+1) = \mathbf{P}(X = k+1).$$

❧ Soit F, la fonction génératrice d'une variable aléatoire quelconque Z à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\forall\, t \in [0,1], \quad F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k)t^k.$$

La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et

$$\forall\, 0 \leqslant t < 1, \quad F'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\,\mathbf{P}(Z = k+1)t^k.$$

On en déduit que

$$\forall\, 0 \leqslant t < 1, \quad 0 \leqslant F'(t) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)t^k = \frac{1}{(1-t)^2}$$

et donc que F est 4-lipschitzienne sur $[0, {}^1\!/_2]$, indépendamment de la loi de Z.

❧ Nos fonctions génératrices $G_{n,k+1}$ et $G_{\infty,k+1}$ sont donc uniformément lipschitziennes au voisinage de 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 < \alpha \leqslant {}^1\!/_2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\left|G_{n,k+1}(0) - G_{\infty,k+1}(0)\right| &\leqslant \left|G_{n,k+1}(0) - G_{n,k+1}(\alpha)\right| \\ &\quad + \left|G_{n,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(\alpha)\right| \\ &\quad + \left|G_{\infty,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(0)\right| \\ &\leqslant 8\alpha + \left|G_{n,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(\alpha)\right|.\end{aligned}$$

❧ Soit alors $\varepsilon > 0$, assez petit pour que

$$0 < \alpha = \frac{\varepsilon}{16} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après (24), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \left|G_{n,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(\alpha)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \left|G_{n,k+1}(0) - G_{\infty,k+1}(0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a bien démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k+1) = \mathbf{P}(X = k+1)$$

et notre démonstration par récurrence est terminée.

Soient A et B, deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et a, un nombre réel. On suppose que $A(a) \neq 0$ et on considère l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ : \ P + P(a)A = B\}$$

ainsi que l'application f définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad f(P) = P(a).A.$$

1. *Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer son rang.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*
3. *Déterminer l'ensemble E.*

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P) = \underbrace{P(a)}_{\in\mathbb{R}} \cdot A \in \mathbb{R}_n[X]$$

et la linéarité de f est évidente :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(a) \cdot A = \lambda \cdot [P(a) \cdot A] + Q(a) \cdot A$$

donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

❧ Manifestement, l'image de f est contenue dans la droite $\mathbb{R} \cdot A$, donc le rang de f est inférieur à 1. Réciproquement,

$$f(A) = \underbrace{A(a)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{A}_{\neq 0} \neq 0$$

donc f n'est pas l'endomorphisme nul et son rang est donc égal à 1.

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \cdot A$$

✍ *La suite est sans surprise lorsqu'on se souvient d'avoir traité plusieurs fois la diagonalisabilité des endomorphismes de rang 1 (cf rms130-1246 par exemple).*

2. Comme $A \neq 0$, alors

$$f(P) = 0 \iff P(a) = 0$$

donc le noyau de f est aussi le noyau de la forme linéaire

$$[P \mapsto P(a)] \,.$$

Comme cette forme linéaire n'est pas identiquement nulle, son noyau est un hyperplan.

Plus précisément, le noyau de f est l'idéal $\langle (X-a) \rangle$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Vect}\big((X-a)^k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\big).$$

En d'autres termes, le scalaire 0 est une valeur propre de f et le sous-espace propre associé à 0 est un sous-espace de dimension n.

✍ *Il est normal que la dimension d'un hyperplan soit égale à n — puisque la dimension de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $(n+1)$!*

Par ailleurs, si λ est une valeur propre non nulle de f, alors il existe un polynôme $P \neq 0$ tel que

$$f(P) = P(a) \cdot A = \lambda \cdot P$$

et donc

$$P = \frac{P(a)}{\lambda} \cdot A \in \mathbb{R} \cdot A = \operatorname{Im} f.$$

Réciproquement, $f(A) = A(a) \cdot A$ (comme on l'a déjà vu), donc $A(a)$ est une valeur propre de f et le sous-espace propre associé à $A(a)$ est la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot A$.

En conclusion, f possède deux valeurs propres : 0 et $A(a) \neq 0$ et comme

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}[f - A(a) \cdot \mathrm{Id}] = \dim \mathbb{R}_n[X],$$

l'endomorphisme est diagonalisable.

✍ *Au cas où la question se poserait : la trace de f est égale à $A(a)$ et son déterminant est nul (somme et produit des valeurs propres).*

$\boxed{3.}$ D'après la question précédente, l'équation

$$P + P(a)A = B$$

d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$ peut aussi s'écrire

$$(\mathrm{Id} + f)(P) = B.$$

L'endomorphisme $\mathrm{Id} + f$ possède deux valeurs propres : 1 de multiplicité n et $[1 + A(a)]$ de multiplicité 1.

❧ **Si** $A(a) = -1$**,** alors $\mathrm{Id} + f$ est diagonalisable et

$$\operatorname{Sp}\{\mathrm{Id} + f\} = \{0;\ 1\}$$

donc $\mathrm{Id} + f$ est un projecteur. Plus précisément, c'est la projection sur l'hyperplan

$$\operatorname{Im}(\mathrm{Id} + f) = \operatorname{Ker}[(f + \mathrm{Id}) - \mathrm{Id}] = \operatorname{Ker} f = \langle (X - a) \rangle$$

parallèlement à la droite

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} + f) = \operatorname{Ker}[f - A(a) \cdot \mathrm{Id}] = \mathbb{R} \cdot A.$$

Il faut alors distinguer deux cas.

— Ou bien $B(a) = 0$, c'est-à-dire $B \in \operatorname{Im}(\mathrm{Id} + f)$. Dans ce cas, il est clair que

$$B + B(a) \cdot A = B$$

donc B est une solution particulière et la solution générale est la somme de cette solution particulière et d'un vecteur quelconque de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} + f)$. Donc l'ensemble E des solutions est une droite affine :

$$E = B + \mathbb{R} \cdot A.$$

— Ou bien $B(a) \neq 0$, donc $B \notin \operatorname{Im}(\mathrm{Id} + f)$. Dans ce cas, l'équation n'a pas de solution.

$$E = \varnothing$$

❧ **Si** $A(a) \neq -1$**,** alors l'endomorphisme $\mathrm{Id} + f$ est en fait un automorphisme (son spectre ne contient pas 0) et l'ensemble E des solutions est un singleton.

Comme f est diagonalisable, en "concaténant" des bases de ses sous-espaces propres, on obtient une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il est donc judicieux de considérer la base

$$\mathscr{B} = \big(A, (X - a), (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n\big).$$

Tout polynôme P admet une décomposition dans cette base :

$$P = \alpha_0 \cdot A + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (X - a)^k.$$

En particulier ($X \leftarrow a$), on a

$$P(a) = \alpha_0 . \underbrace{A(a)}_{\neq 0} .$$

On dispose ainsi de la décomposition du second membre :

$$B = \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot (X - a)^k$$

et de la décomposition du premier membre :

$$P + P(a) \cdot A = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{A(a)}\right)}_{\neq 0} P(a) \cdot A + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (X - a)^k.$$

La décomposition d'un vecteur dans une base étant unique, on peut identifier terme à terme et en déduire que l'unique solution de l'équation est

$$\begin{aligned} P &= \frac{B(a)}{A(a).[1 + A(a)]} \cdot A + \sum_{k=1}^{n} \beta \cdot (X - a)^k \\ &= \frac{B(a)}{A(a).[1 + A(a)]} \cdot A + B - \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A \\ &= \frac{-B(a)}{1 + A(a)} \cdot A + B. \end{aligned}$$

✍ *Il faut bien comprendre ce qui est implicite dans les calculs qui précèdent : on a décomposé les deux vecteurs* B *(la donnée) et* P *(l'inconnue) dans la somme directe des sous-espaces propres.*

On a trouvé que

$$P = \underbrace{\frac{P(a)}{A(a)} \cdot A}_{\in \operatorname{Ker}[(\operatorname{Id} + f) - (1 + A(a))]} + \underbrace{\left(P - \frac{P(a)}{A(a)} \cdot A\right)}_{\in \operatorname{Ker}[(\operatorname{Id} + f) - 1]}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Id} + f)(P) &= [1 + A(a)] \frac{P(a)}{A(a)} \cdot A + \left(P - \frac{P(a)}{A(a)} \cdot A\right) \\ &= \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A + \left(B - \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A\right). \end{aligned}$$

Or la décomposition d'un vecteur sur la somme directe

$$\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Ker}\big[(\operatorname{Id} + f) - [1 + A(a)]\big] \oplus \operatorname{Ker}\big[(\operatorname{Id} + f) - 1\big]$$

est unique, ce qui permet d'identifier terme à terme (et cette fois, il n'y a plus que deux termes). On en déduit que la solution est le polynôme

$$P = \frac{1}{1 + A(a)} \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A + \left(B - \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A\right).$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\omega_n = e^{2i\pi/n} \quad \textit{et} \quad F_n = \left(\omega_n^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. *Écrire une fonction qui prend un entier $n \in \mathbb{N}^*$ en argument et qui renvoie la matrice F_n.*
2. *Calculer le produit $F_n\overline{F_n}$ (avec Python).*
3. *Écrire une fonction qui prend un entier $n \in \mathbb{N}^*$ en argument et qui renvoie la matrice inverse F_n^{-1}. Que peut-on conjecturer ?*
4. *Écrire une fonction qui prend deux entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ en argument et qui renvoie F_n^k. Que peut-on conjecturer ?*
5. *Démontrer les conjectures précédentes.*
6. *Déterminer les valeurs propres de F_n. Cette matrice est-elle diagonalisable ?*

1. Avec des indices pythoniens, tout est plus simple :

$$F_n = (\omega_n^{k\ell})_{0 \leqslant k,\ell < n}.$$

Le code le plus simple étant, de notre point de vue, le meilleur, on peut définir la matrice F_n de la manière suivante (une liste de lignes, qu'on convertit en tableau numpy au moment de renvoyer la valeur calculée).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def F(n):
  omega = np.exp(2j*np.pi/n)
  M = []
  for k in range(n):
    ligne = [ omega**(k*ell) for ell in range(n) ]
    M.append(ligne)
  return np.array(M)
```

✍ *Si on veut limiter au strict minimum les opérations effectuées, on peut utiliser le code suivant.*

```
def F(n):
  omega = np.exp(2j*np.pi/n)
  Fn = np.zeros((n,n), dtype=np.complex)
  facteur = 1
  for k in range(n):
    coeff = 1
    for ell in range(n):
      Fn[k, ell] = coeff
      coeff *= facteur
    facteur *= omega
  return Fn
```

Plus économique, c'est incontestable, mais moins évident et, de ce fait, moins sûr.

❧ Les calculs sont effectués en virgule flottante, il faut penser à arrondir les valeurs d'un coup d'œil pour connaître les matrices exactes.

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

2. Le produit $F_n.\overline{F_n}$ est facile à calculer.

```
def F_Fbarre(n):
    Fn = F(n)
    return np.dot(Fn, Fn.conjugate())
```

En arrondissant les résultats fournis, on conjecture que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad F_n.\overline{F_n} = nI_n.$$

3. Rien de plus compliqué avec l'inverse.

```
def F_inv(n):
    return alg.inv(F(n))
```

Rien de vraiment neuf par rapport à la question précédente non plus : on conjecture que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad F_n^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \overline{F_n}.$$

4. Et toujours rien de compliqué pour le calcul des puissances : le module d'algèbre linéaire a déjà pensé à tout !

```
def Fnk(n, k):
    A = F(n)
    return alg.matrix_power(A, k)
```

Si on sait ce qu'on cherche, on trouve $F_2^4 = 4I_2$, $F_3^4 = 9I_3$, $F_4^4 = 16I_4$... et on conjecture que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad F_n^4 = n^2 I_n.$$

Si on ne connaît pas le résultat à établir, on aura peut-être la chance de commencer par calculer F_n^2 pour différentes valeurs de n avant de conjecturer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad F_n^2 = \left(n\delta_{i+j\equiv 0\ [n]}\right)_{0\leqslant i,j<n} = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & \diagup & n \\ 0 & n & \diagup \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

✍ *La matrice F_n intervient dans l'algorithme de la transformation de Fourier rapide (FFT).*

5.

6.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r & r & r & r & r \end{pmatrix}$$

avec $r = 1/5$.

1. *Calculer la polynôme caractéristique de* A*. La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Que dire du module de ses valeurs propres ?*

2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = 8, \quad u_3 = 4, \quad u_4 = 11$$

et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+5} = \frac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4}}{5}.$$

2. a. *Écrire une fonction qui prend un entier* $n \in \mathbb{N}$ *en argument et qui renvoie les* $(n+1)$ *premiers termes de la suite.*

2. b. *Calculer les 25 premiers termes. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite ?*

2. c. *Écrire la relation de récurrence à l'aide de la matrice* A.

2. d. *Démontrer que la suite de matrices* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la matrice d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.*

2. e. *Trouver une colonne non nulle* X *telle que* $A^\top.X = X$.

1. On commence par définir la matrice A.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A = np.zeros( (5,5) )
for i in range(4):
  A[i,i+1] = 1
for i in range(5):
  A[4,i] = 1/5
```

❧ Il s'agit d'une matrice compagnon, donc on sait à quoi s'attendre en calculant le polynôme caractéristique. On n'est d'ailleurs pas obligé de le calculer à la main...

```
chi_A = np.poly(A)
```

$$\chi_A = X^5 - \frac{X^4 + X^3 + X^2 + X + 1}{5}$$

✍ ***Attention !*** *Contrairement au module Polynomial, les coefficients du polynôme sont ici donnés selon les puissances* décroissantes*. Comme le polynôme caractéristique est unitaire, le premier coefficient est donc toujours égal à* 1.

❧ Je ne vois pas vraiment comment factoriser ce polynôme à la main (même si j'ai remarqué qu'il admettait 1 pour racine).

```
Sp_A = alg.eigvals(A)
```

On constate que 1 est la seule valeur propre réelle de A, les autres sont complexes et deux à deux conjuguées.

```
mod_vp = [ np.abs(lbd) for lbd in Sp ]
```

La matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais elle est bien diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (puisque $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{C})$ possède 5 valeurs propres distinctes).

On constate par ailleurs que les modules des valeurs propres complexes sont *strictement* inférieurs à 1.

2. a. On peut calculer les u_n de manière élémentaire en réécrivant la relation de récurrence sous une forme plus simple (= directe à coder).

$$\forall\, i \geqslant 5, \quad u_i = \frac{u_{i-5} + u_{i-4} + u_{i-3} + u_{i-2} + u_{i-1}}{5}$$

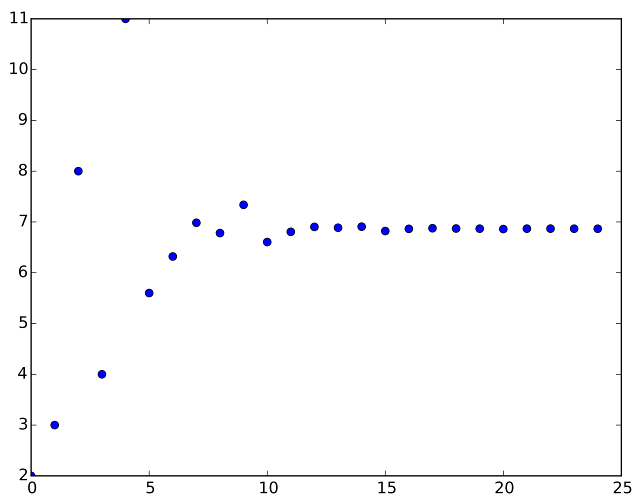
```
def u(n):
  Lu = [ 2, 3, 8, 4, 11 ]
  for i in range(5, n+1):
    u = 0
    for k in range(i-5, i):
      u += Lu[k]
    Lu.append(u/5)
  return Lu
```

✍ *Les pythoniens fanatiques préféreront utiliser les tranches et en profiteront pour rendre le code exact pour $n \leqslant 4$ (ce qui est un signe avéré de maniaquerie). On n'attend pas cela des candidats...*

```
def u(n):
  Lu = [ 2, 3, 8, 4, 11 ]
  for i in range(5, n+1):
    u = 0.2*sum(Lu[-5:])
    Lu.append(u)
  return Lu[:n+1]
```

2. b. En traçant l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on devine qu'elle converge (vers une limite légèrement inférieure à 6).

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(u(24), 'o')
```



2. c. La relation de récurrence peut aussi s'écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \\ u_{n+4} \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad X_n = A^n X_0.$$

2. d. On a constaté plus haut qu'il existait une matrice $P \in GL_5(\mathbb{C})$ telle que

$$\Delta = P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, \alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta})$$

avec $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.

On en déduit que

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \mathrm{Diag}(1, \alpha^n, \overline{\alpha}^n, \beta^n, \overline{\beta}^n)$$

tend vers $\mathrm{Diag}(1, 0, 0, 0, 0)$, qui est évidemment une matrice de projection (de rang 1).

Comme l'application $\left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ est continue (linéaire sur un espace de dimension finie), on déduit du Théorème de composition des limites que

$$\Pi = \lim_{n\to+\infty} A^n = P\,\mathrm{Diag}(1, 0, 0, 0, 0)P^{-1}$$

qui est aussi une matrice de projection.

✍ *Les **éléments caractéristiques** d'un projecteur sont son image et son noyau, c'est-à-dire ses sous-espaces propres.*

En effet, si l'image d'un projecteur p est le sous-espace F et si le noyau est le sous-espace G, alors p est en fait la projection sur F parallèlement à G (et, de ce fait, on peut déterminer le vecteur $p(x)$ pour tout $x \in E$ dès qu'on connaît les deux sous-espaces vectoriels F et G.

❧ Comme

$$\chi_A = \frac{(X-1)(5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1)}{5},$$

on déduit du théorème de décomposition des noyaux (et du Théorème de Cayley-Hamilton) que

$$\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}(A - I_5) \oplus \mathrm{Ker}(5A^4 + 4A^3 + 3A^2 + 2A + I_5)$$

et on conjecture que Π est la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_5)$ parallèlement au sous-espace $\mathrm{Ker}(5A^4 + 4A^3 + 3A^2 + 2A + I_5)$.

✍ *La formule du changement de base nous assure que Π est une projection sur la droite propre associée à la valeur propre 1.*

Laissons la théorie de côté et calculons Π.

```
P = alg.eig(A)[1]
proj_diag = np.zeros( (5,5) )
proj_diag[0,0] = 1
proj = np.dot(np.dot(P, proj_diag), alg.inv(P))
```

Pour y voir plus clair, on élimine les parties imaginaires (qui ne sont que des erreurs d'arrondi : telle qu'on l'a définie, la matrice Π est réelle) et après quelques tâtonnements, la commande

```
  (proj*15).real
```

nous assure que

$$\Pi = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{15} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de la projection sur la droite

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}(A - I_5)$$

parallèlement à l'hyperplan d'équation

$$[x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0].$$

La confirmation est facile à obtenir.

```
B = np.eye(5)
for i in range(1, 5):
  B += (i+1)*alg.matrix_power(A, i)
```

On constate que $B = 15\Pi$.

2. e. En passant à la limite dans la relation $A^{n+1} = A^n.A$, on obtient $\Pi = \Pi.A$ et donc $A^\top.\Pi^\top = \Pi^\top$. Chaque colonne de $\Pi^\top$ nous donne donc un vecteur X tel que $A^\top.X = X$ et, d'après ce qui précède, chaque colonne de $\Pi^\top$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Soient E*, un espace vectoriel réel et* v*, un endomorphisme de* E *tel que*

$$v^2 + v + I_E = \omega_E.$$

1. *Soit* $x \in E$*, non nul. Démontrer que le couple* $\big(x, v(x)\big)$ *est une famille libre.*
2. *Soient* x *et* y*, deux vecteurs de* E *tels que la famille*

$$\big(x, y, v(x)\big)$$

soit libre. Démontrer que la famille

$$\big(x, y, v(x), v(y)\big)$$

est libre.
3. *On suppose que* $\dim E = 4$.
3. a. *Démontrer qu'il existe une base* (e_1, e_2, e_3, e_4) *de* E *qui vérifie*

$$e_3 = v(e_1) \qquad \text{et} \qquad e_4 = v(e_2).$$

3. b. *Donner la matrice de* v *dans cette base. Cette matrice est-elle diagonalisable ?*

1. Remarquons pour commencer que l'énoncé nous donne un polynôme annulateur unitaire de v :

$$X^2 + X + 1.$$

Comme E est un espace vectoriel *réel*, ce polynôme annulateur doit être considéré comme un polynôme irréductible (donc sans diviseur propre), c'est donc le **polynôme minimal** de v.

Comme il n'a pas de racine réelle, le spectre de v est vide.

✍ *Le spectre complexe de* v *est* $\{j, j^2 = \bar{j}\}$ *et de ce point de vue, le polynôme minimal de* v *est scindé à racines simples donc les matrices qui représentent* v *sont diagonalisables en tant que matrices complexes.*

Mais j'insiste, toute cette discussion est hors sujet !

❧ Comme le vecteur x n'est pas nul, alors la "famille" (x) est libre. Si la famille $\big(x, v(x)\big)$ était liée, il existerait donc $\lambda \in \mathbb{R}$ (espace vectoriel réel !) tel que

$$v(x) = \lambda \cdot x$$

et x serait un vecteur propre de v associé à la valeur propre λ.

On a vu que v n'avait pas de valeur propre, donc la famille $\big(x, v(x)\big)$ est libre.

2. Même démarche ! On suppose cette fois que la famille

$$\big(x, y, v(x)\big)$$

est libre. Par conséquent, si la famille

$$\big(x, y, v(x), v(y)\big)$$

était liée, alors il existerait trois réels a, b et c tels que

$$v(y) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot v(x). \tag{25}$$

✍ *En général, dans une famille liée, un vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs... mais lequel ? Impossible de le savoir sans poser quelques calculs !*

En revanche, quand on passe d'une famille libre

$$(u_1, \dots, u_n)$$

à une famille liée

$$(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}),$$

c'est le dernier vecteur ajouté, c'est-à-dire u_{n+1}*, qui introduit la relation de liaison, c'est donc lui qu'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres.*

Par linéarité de v,

$$\begin{aligned}-y - v(y) &= v^2(y)\\ &= a \cdot v(x) + b \cdot v(y) + c \cdot v^2(x)\\ &= a \cdot v(x) + b \cdot v(y) + c \cdot \big(-x - v(x)\big)\end{aligned}$$

donc

$$-c \cdot x + (a - c) \cdot v(x) + y + (b + 1) \cdot v(y) = 0$$

et d'après (25)

$$\begin{aligned}0 &= -c \cdot x + (a - c) \cdot v(x) + y + (b + 1) \cdot \big(a \cdot x + b \cdot y + c \cdot v(x)\big)\\ &= [a(b + 1) - c] \cdot x + [1 + b(b + 1)] \cdot y + [(a - c) + (b + 1)c] \cdot v(x).\end{aligned}$$

Comme $\big(x, y, v(x)\big)$ est une famille libre, on en déduit que les trois coefficients de cette relation de liaison sont nuls et en particulier que

$$1 + b(b + 1) = 1 + b + b^2 = 0.$$

Comme $b \in \mathbb{R}$, c'est impossible !

On a démontré par l'absurde que la famille

$$\big(x, y, v(x), v(y)\big)$$

était libre.

$\boxed{\textbf{3. a.}}$ Dans un espace de dimension 4 (non réduit à $\{0\}$ par conséquent), on peut choisir un vecteur $e_1 \neq 0$. On pose alors $e_3 = v(e_1)$.

D'après la première question, la famille (e_1, e_3) est nécessairement libre. Elle engendre un sous-espace de dimension 2, donc on peut choisir un vecteur $e_2 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et poser $e_4 = v(e_2)$.

La famille (e_1, e_2, e_3) est alors libre et d'après la deuxième question, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre elle aussi.

En tant que famille libre de 4 éléments dans un espace de dimension 4, il s'agit d'une base.

✍ *Si on choisit un vecteur "au hasard" dans $\mathbb{R}^4$, il sera presque sûrement non nul. Et si on choisit ensuite "au hasard" un second vecteur dans $\mathbb{R}^4$, il sera presque sûrement en dehors du plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ (en dimension 4 comme en dimension 3, le volume d'un plan est nul). On peut donc confier le soin de choisir la base $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$ à la fonction* `random` *!*

$\boxed{\textbf{3. b.}}$ Par définition de e_2 et e_4 et d'après le polynôme minimal de v, la matrice de v dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

❧ Cette matrice n'est pas diagonalisable, car son polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples !

✍ *On peut trouver le polynôme caractéristique de cette matrice sans aucun calcul !*

En effet, le polynôme caractéristique est ici un polynôme unitaire de degré 4 (taille de la matrice !), c'est un multiple du polynôme minimal et ces deux polynômes ont les mêmes facteurs irréductibles. Cette dernière affirmation est hors-programme, on est seulement censé savoir que ces deux polynômes ont les mêmes racines.

Comme le polynôme minimal est irréductible de degré 2, on en déduit que le polynôme caractéristique est égal à

$$(X^2 + X + 1)^2.$$

❧ *Si on souhaite poser les calculs, il vaut mieux changer de base... en remettant les vecteurs dans un ordre géométriquement intelligent ! En effet, la deuxième question nous a révélé que les deux plans $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_4)$ étaient supplémentaires dans E et tous les deux stables par v : ce serait dommage de négliger une telle information !*

La matrice de v dans la base (e_1, e_3, e_2, e_4) est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

elle est donc diagonale par blocs et les blocs diagonaux sont des matrices compagnons ! Donc son polynôme caractéristique est bien $(X^2 + X + 1)^2$.

rms130-1031

1. *Démontrer que l'application définie par*

$$\langle u \mid v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$$

est un produit scalaire sur l'espace E *des fonctions continues de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

2. *Soit* $K : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, *une fonction continue. Pour* $f \in E$, *on définit la fonction* $T(f)$ *en posant*

$$\forall\, x \in [a, b], \quad T(f)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)\,dy.$$

2. a. *Démontrer que* T *est un endomorphisme de* E.

2. b. *On munit* E *de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *de la convergence uniforme. Démontrer que l'endomorphisme* T *est continu.*

1. Archi-classique.

2. a. Le segment $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc le carré $[a, b] \times [a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Comme K est continue sur ce compact, elle est bornée : il existe un réel M tel que

$$\forall\, (x, y) \in [a, b]^2, \qquad \left|K(x, y)\right| \leqslant M.$$

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ et donc bornée.

❧ Ainsi :

— pour tout $y \in [a, b]$, la fonction

$$[x \mapsto K(x, y)f(y)]$$

est continue sur le segment $\Omega = [a, b]$ comme composée de fonctions continues :

$$x \mapsto (x, y) \mapsto K(x, y) \mapsto K(x, y)\,\underbrace{f(y)}_{\text{Cte}}$$

— pour tout $x \in [a, b]$, la fonction

$$[y \mapsto K(x, y)f(y)]$$

est continue sur le segment $I = [a, b]$ et donc intégrable sur I ;

— enfin la domination est assurée par

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, y \in I, \quad \left|K(x, y)f(y)\right| \leqslant M\,\|f\|_\infty$$

puisque le majorant est constant et donc intégrable sur le segment I.

Ainsi T est bien une application de E dans E et la linéarité de T est évidente.

2. b. En intégrant l'inégalité de domination, on trouve

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \left|T(f)(x)\right| \leqslant (b - a)M\,\|f\|_\infty$$

et donc

$$\forall\, f \in E, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant M(b - a)\,\|f\|_\infty$$

ce qui prouve que l'application linéaire T est bien continue et que $|||T||| \leqslant M(b - a)$.

On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - {}^1\!/\!_4 y(x) = 0. \tag{E}$$

1. *Existe-t-il une solution y de (E) sur $]-1,1[$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=\sqrt{2}$? Si oui, est-elle unique ?*

2. *Représenter graphiquement cette solution.*

3. *Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière.*

4. *Soit f_1, une solution de (E) développable en série entière*

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $a_0 = 0$ et $a_1 = \sqrt{2}$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

1. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre. Les coefficients sont continus sur $\mathbb{R}$ et le coefficient de $y''(x)$ ne s'annule jamais. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz : quels que soient les réels x_0, a et b, il existe une, et une seule, solution f de (E) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0) = a \quad \text{et} \quad f'(x_0) = b.$$

En particulier, il existe une, et une seule, solution sur $]-1,1[$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=\sqrt{2}$.

2. La résolution numérique d'une équation différentielle demande qu'on l'écrive sous forme résoluble. L'équation (E) devient alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(\frac{1}{4}y(x) - xy'(x)\right)\end{pmatrix} = f\big(Y(x), x\big).$$

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

def f(Y, x):
  y, y_prime = Y[0], Y[1]
  y_seconde = (y/4-x*y_prime)/(1+x**2)
  return np.array([y_prime, y_seconde])
```

❧ La résolution numérique ne demande alors plus que de choisir un intervalle de temps $(x_i)_{0\leqslant i<n}$ et une condition initiale (y_0, v_0).

```
X = np.arange(0, 1.01, 0.01)
CI = np.array([0, np.sqrt(2)])
Y = odeint(f, CI, X)
positions, vitesses = Y[:,0], Y[:,1]
plt.plot(X, positions)
```

Le tableau Y produit par odeint est de la forme $(Y_{i,j})_{0\leqslant i<n, 0\leqslant j<2}$ où $Y_{i,0} \approx y(x_i)$ et $Y_{i,1} \approx y'(x_i)$.

❧ Mais l'approximation de la solution ainsi obtenue n'est définie que sur l'intervalle $[0,1]$ et pas sur $[-1,1]$!

Une première possibilité consiste à calculer l'équation vérifiée par $z = [x \mapsto y(-x)]$. Comme $z(x) = y(-x)$, $z'(x) = -y'(-x)$ et $z''(x) = y''(-x)$ et que y est une solution de (E) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, alors z est une solution de (E) sur l'intervalle $[-x_2, -x_1]$:

$$\begin{aligned}(1+x^2)z''(x) + xz'(x) - \frac{1}{4}z(x) \\ &= (1+x^2)y''(-x) - xy'(-x) - \frac{1}{4}y(-x) \\ &= [1+(-x)^2]y''(-x) + (-x)y'(-x) - \frac{1}{4}y(-x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, y est solution sur $[-1, 0]$ si, et seulement si, z est solution sur $[0, 1]$ avec la condition initiale

$$\big(z(0), z'(0)\big) = \big(y(0), -y'(0)\big) = (0, -\sqrt{2}) = -(0, \sqrt{2}).$$

```
Z = odeint(f, -CI, X) # on résout sur [0,1]
plt.plot(-X, Z[:,0])  # on trace sur [−1,0]
```

✍ *En général, les fonctions y et z* ne vérifient pas *la même équation différentielle...*

❧ On peut procéder de manière un peu différente en tirant parti de la structure particulière de l'équation différentielle.

Considérons la solution y de (E) définie sur $\mathbb{R}$ associée à la condition initiale $(a, b) = (0, b)$ et la fonction $z = [x \mapsto -y(-x)]$. On vérifie (comme plus haut) que z est une solution de (E) associée à la même condition initiale : comme le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = -y(-x) = y(x).$$

Autrement dit, la solution y est impaire et son graphe admet donc l'origine pour centre de symétrie et il est donc inutile d'invoquer deux fois la fonction odeint !

```
plt.figure()
plt.plot(X, positions)
plt.plot(-X, -positions)
```

3.

4.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $v \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} x''(t) = -\alpha x'(t) \\ y''(t) = -\alpha y'(t) - 1 \end{cases} \tag{S}$$

1. *Tracer la solution de (S) telle que*

$$x(0) = y(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(0) = y'(0) = v$$

pour différentes valeurs de α et de v. Interpréter qualitativement.

2. *Résoudre le système. Démontrer que les fonctions x et y sont liées par la relation suivante.*

$$y(t) = \Big(1 + \frac{1}{\alpha v}\Big)x(t) + \frac{1}{\alpha^2}\,\ell n\Big(1 - \frac{\alpha x(t)}{v}\Big)$$

1. Il ne s'agit pas d'un système différentiel mais de deux équations différentielles indépendantes l'une de l'autre. On les résout donc séparément.

❧ On les traite comme des équations du second ordre en les écrivant sous forme résoluble (ce qui nous donne l'expression des fonctions f et g à définir pour appliquer odeint).

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\alpha x'(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\alpha y'(t) - 1 \end{pmatrix}$$

✍ *Bien entendu, si on devait mener les calculs à la main, on traiterait ces équations comme des équations du* premier ordre *d'inconnues $x'(t)$ et $y'(t)$.*

❧ Pour une résolution numérique, tous les paramètres doivent être choisis : pour le moment, la constante de temps α, la durée d'étude T_{max} et la vitesse initiale v sont fixés arbitrairement.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

a = 0.5
T_max, v = 15, 3.5

def f(X, t):
    x, x_prime = X[0], X[1]
    x_seconde = -a*x_prime
    return np.array([x_prime, x_seconde])

def g(Y, t):
    y, y_prime = Y[0], Y[1]
    y_seconde = -a*y_prime - 1
    return np.array([y_prime, y_seconde])

T = np.arange(0, T_max, 0.01)
CI = np.array([0, v])

X = odeint(f, CI, T)
Y = odeint(g, CI, T)
```

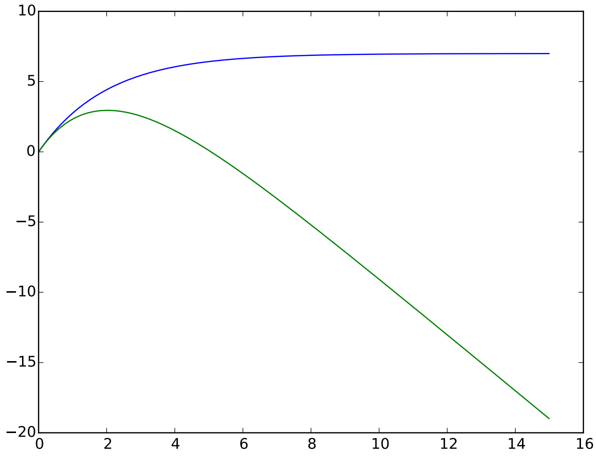
✍ *On rappelle la manière dont est défini le tableau retourné par la fonction odeint :*
- *la valeur T[0] est l'instant initial t_0 ;*
- *le tableau CI contient $x(t_0)$ et $x'(t_0)$;*
- *le résultat X est un tableau de n lignes et 2 colonnes où n est égal à T ;*
- *pour tout $0 \leqslant k < n$, les flottants X[k,0] et X[k,1] sont des valeurs approchées de $x(t_k)$ et $x'(t_k)$ où t_k est égal à T[k].*

❧ Dans un premier temps, on peut superposer les graphes de x et de y en fonction du temps.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(T, X[:, 0])
plt.plot(T, Y[:, 0])
```

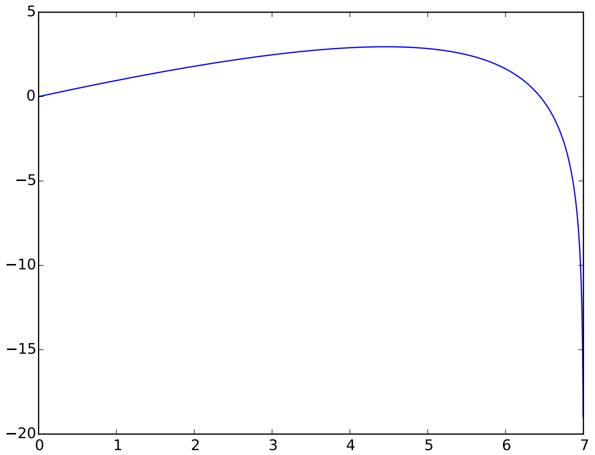
On constate que la fonction x tend vers une limite finie, tandis que la fonction y admet une asymptote oblique.



❧ On peut aussi tracer le support de l'arc paramétré $\big(x(t), y(t)\big)_{t\in T}$.

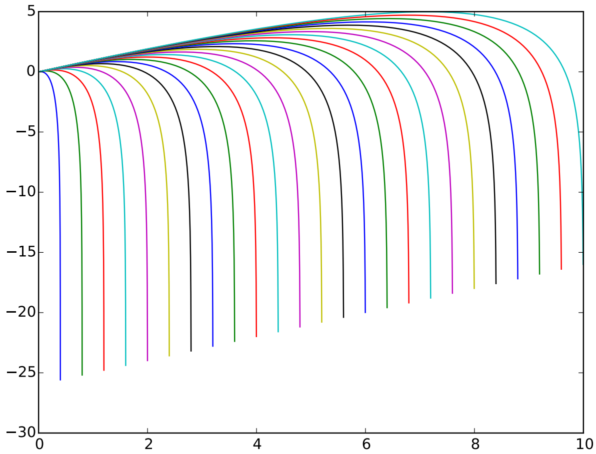
```python
plt.figure()
plt.plot(X[:, 0], Y[:, 0])
```

On retrouve, sous une forme différente, les propriétés précédentes : la trajectoire admet une asymptote verticale (limite finie pour $x(t)$, limite infinie pour $y(t)$) mais on perd une information : on ne voit plus que $y(t) = \mathcal{O}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.



❧ Pour tracer les trajectoires qui correspondent à plusieurs conditions initiales, il faut répéter les opérations effectuées précédemment au sein d'une boucle *for*.

```python
plt.figure()
for v in np.arange(0.2, 5.2, 0.2):
    CI = np.array([0, v])
    X = odeint(f, CI, T)
    Y = odeint(g, CI, T)
    plt.plot(X[:, 0], Y[:, 0])
```



2.

On note S_C, l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles, continues sur le fermé $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + f(t, x)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0. \tag{S}$$

On considère une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante.

1. *Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel $a(t, x)$ tel que*

$$x = a(t, x) + tu\big(a(t, x)\big).$$

*On **admettra** que la fonction*

$$[(t, x) \mapsto a(t, x)]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad f(t, x) = u\big(a(t, x)\big).$$

2. a. *Démontrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0, x) = f(x).$$

2. b. *Démontrer que $f \in S_C$.*

1. Pour $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \varphi(y) = y + tu(y) - x.$$

Comme u est de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante, alors la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u'(y) = 1 + tu'(y) \geqslant 1.$$

La fonction u tend vers une limite, finie ou égale à $+\infty$, au voisinage de $+\infty$, donc la fonction φ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

De même, la fonction u tend vers une limite, finie ou égale à $-\infty$, au voisinage de $-\infty$, donc la fonction φ tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$.

La fonction φ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier il existe un, et un seul, $y_0 = a(t, x) \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(y_0) = 0$.

✍ *On aurait dû en fait définir*

$$\Phi(t, x, y) = y + tu(y) - x$$

qui est manifestement une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'analyse précédente et le fait que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, x, y) = 1 + tu'(y) > 0$$

permettent d'appliquer le Théorème des fonctions implicites, qui prouve que la fonction $a(t, x)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. a. Pour $t = 0$, on a $a(0, x) + 0 - x = 0$ (par définition de $a(t, x)$), donc

$$f(0, x) = u\big(a(0, x)\big) = u(x).$$

2. b. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, par définition de $a(t, x)$ et de $f(t, x)$,

$$a(t, x) + t \cdot f(t, x) - x = 0.$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial a}{\partial t} + f(t, x) + t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial a}{\partial x} + t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= u'\big(a(t,x)\big)\cdot\frac{\partial a}{\partial t} = -u'\big(a(t,x)\big)\cdot\left[f(t,x)+t\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right]\\ \frac{\partial f}{\partial x} &= u'\big(a(t,x)\big)\cdot\frac{\partial a}{\partial x} = u'\big(a(t,x)\big)\cdot\left[1-t\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

donc que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-u'\big(a(t,x)\big)}{1+tu'\big(a(t,x)\big)}\cdot f(t,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u'\big(a(t,x)\big)}{1+tu'\big(a(t,x)\big)}$$

et finalement que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f(t,x)\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

pour tout (t,x) dans l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

> *Une puce initialement placée à l'origine d'un plan fait des sauts aléatoires d'une unité dans les quatre directions possibles. On note (X_n, Y_n), ses coordonnées après n déplacements. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.*

On modélise l'expérience aléatoire par une famille $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires complexes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qu'on suppose indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}\big(Z = 1\big) = \mathbf{P}\big(Z = -1\big) = \mathbf{P}\big(Z = i\big) = \mathbf{P}\big(Z = -i\big) = \frac{1}{4}$$

qui représentent les *déplacements* successifs de la puce.

❧ Les *positions* occupées par la puce au fil du temps sont les variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = S_n + Z_{n+1}.$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n introduites par l'énoncé sont alors définies par

$$X_n = \mathfrak{Re}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}(Z_k) \quad \text{et} \quad Y_n = \mathfrak{Im}(S_n).$$

Comme les variables aléatoires Z_k sont indépendantes et de même loi, les variables aléatoires $\mathfrak{Re}(Z_k)$ sont aussi indépendantes (lemme des coalitions) et de même loi :

$$\mathbf{P}\big(\mathfrak{Re}(Z) = 1\big) = \mathbf{P}\big(\mathfrak{Re}(Z) = -1\big) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}\big(\mathfrak{Re}(Z) = 0\big) = \frac{1}{2}.$$

❧ On en déduit que

$$\mathbf{E}\big(\mathfrak{Re}(Z)\big) = 0$$

et donc que (Koenig-Huyghens)

$$\mathbf{V}\big(\mathfrak{Re}(Z)\big) = \mathbf{E}\big(\mathfrak{Re}(Z)^2\big) = \frac{1}{2}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\big(\mathfrak{Re}(Z_k)\big) = 0.$$

Par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}\big(\mathfrak{Re}(Z_k)\big) = \frac{n}{2}$$

et, à nouveau par la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \frac{n}{2}.$$

> *Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme R_k tel que*
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$
> *Donner une expression de R_k.*

La fonction $f = [x \mapsto x + {}^1\!/_x]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et atteint son minimum en $x = 1$ (étudier les variations...), donc ce minimum est égal à 2. Par ailleurs, cette fonction tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires,

$$f_*(\mathbb{R}_+^*) = [2, +\infty[\,.$$

En supposant qu'il existe deux polynômes R_k^1 et R_k^2 tels que

$$\forall\, x > 0, \quad R_k^1\left(x + \frac{1}{x}\right) = R_k^2\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k},$$

on aurait donc

$$\forall\, y \geqslant 2, \quad R_k^1(y) = R_k^2(y).$$

Comme l'intervalle $[2, +\infty[$ est un ensemble INFINI, on en déduit que les deux polynômes R_k^1 et R_k^2 sont égaux.

✍ *Il existe donc au plus un polynôme R_k tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k},$$

Pour le moment, nous n'en savons pas plus...

❧ Pour $k = 0$, il est clair que $R_0 = 2$ convient.
De même, pour $k = 1$, il est clair que $R_1 = X$ convient.

HR : Supposons que, pour un certain entier $k \geqslant 1$, il existe deux polynômes R_k et R_{k-1} tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k} \quad \text{et} \quad R_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}.$$

On remarque (!!!) alors que

$$\forall\, x \neq 0, \quad \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$$

et donc que

$$\forall\, x \neq 0, \quad x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = R_1\left(x + \frac{1}{x}\right) R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) - R_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

En posant

$$R_{k+1} = R_1 R_k - R_{k-1} = XR_k - R_{k-1}$$

on obtient donc un polynôme qui vérifie bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad R_{k+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

et l'existence de la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi établie par récurrence.

✍ *On peut déduire de cette relation de récurrence que R_k est un polynôme unitaire de degré k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

❧ Soit $k \in \mathbb{N}$. Du fait que l'égalité

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

soit vérifiée sur un ensemble infini, on en déduit l'égalité

$$R_k\left(X+\frac{1}{X}\right)=X^k+\frac{1}{X^k}$$

entre éléments du corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients réels. En particulier, on a donc

$$\forall\, z\in\mathbb{C}^*,\quad R_k\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^k+\frac{1}{z^k}$$

et donc, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$R_k(2\cos\theta)=2\cos k\theta$$

en prenant $z=e^{i\theta}$.

À peu de choses près, les polynômes R_k sont donc les polynômes de Tchebychev.

✍ *On aurait pu faire ce constat à l'aide de la relation de récurrence en réécrivant*

$$R_{k+1}=XR_k-R_{k-1}$$

sous la forme

$$\frac{1}{2}R_{k+1}(2X)=2X\Big(\frac{1}{2}R_k(2X)\Big)-\frac{1}{2}R_{k-1}(2X),$$

à rapprocher de la relation

$$T_{k+1}=2XT_k-T_{k-1}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}R_k(2\cos\theta)&=2\,\mathfrak{Re}\big[(\cos\theta+i\sin\theta)^k\big]\\&=2\,\mathfrak{Re}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cos^{k-j}\theta\cdot i^j\cdot\sin^j\theta\right)\\&=2\sum_{0\leqslant 2j\leqslant k}\binom{k}{j}\cos^{k-2j}\theta\cdot(-1)^j\cdot(1-\cos^2\theta)^j\end{aligned}$$

pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

On a ainsi démontré que

$$R_k(2u)=2\sum_{0\leqslant 2j\leqslant k}\binom{k}{j}u^{k-2j}\cdot(-1)^j\cdot(1-u^2)^j$$

pour tout $u\in[-1,1]$. Comme le segment $[-1,1]$ est un ensemble infini, on en déduit que

$$R_k=2\sum_{0\leqslant 2j\leqslant k}\binom{k}{j}\frac{X^{k-2j}}{2^{k-2j}}\cdot(-1)^j\cdot\Big(1-\frac{X^2}{4}\Big)^j.$$

✍ *L'intérêt de cette formule est proche de zéro : trop compliqué pour être vraiment utile !*

❧ Cherchons les racines de R_k appartenant au segment $[-2,2]$: chacune d'elles peut s'écrire $2\cos\theta$ pour un angle $\theta\in[0,\pi]$.

La relation $R_k(2\cos\theta)=2\cos k\theta$ nous dit alors que

$$k\theta=\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}$$

et comme on impose $\theta\in[0,\pi]$, on en déduit qu'il existe un entier $0\leqslant\ell<k$ tel que

$$\theta=\frac{\pi}{2k}+\ell\cdot\frac{\pi}{k}$$

et donc tel que

$$2\cos\theta=2\cos\frac{(2\ell+1)\pi}{2k}.$$

Comme
$$0 < \frac{\pi}{2k} < \frac{3\pi}{2k} < \cdots < \frac{(2k-1)\pi}{2k} < \pi$$
et que cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a trouvé k racines deux à deux distinctes pour le polynôme R_k :
$$2\cos\frac{(2\ell+1)\pi}{2k}, \qquad 0 \leqslant \ell < k.$$
Comme $\deg R_k = k$, on a trouvé les racines de R_k (elles sont toutes de multiplicité 1) et comme R_k est unitaire, on a en fait déterminé R_k :
$$R_k = \prod_{\ell=0}^{k-1}\left[X - 2\cos\frac{(2\ell+1)\pi}{2k}\right]$$
qui est un polynôme scindé à racines simples, toutes ces racines appartenant à $[-2, 2]$.

✍ *Cette expression n'est pas plus simple à établir que la précédente : dans les deux cas, il faut avoir repéré les polynômes de Tchebychev...*

rms130-1054

> *Soient* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et* ψ_A*, l'application définie par*
>
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi_A(M) = AM - MA.$$
>
> **1.** *L'endomorphisme* ψ_A *est-il injectif ?*
> **2.** *Soit* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\psi_A(B) = B$.
> **2. a.** *Démontrer que*
>
> $$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad AB^k - B^kA = kB^k.$$
>
> **2. b.** *En déduire que* B *est nilpotente.*
> **3.** *Soit* $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf* $n_{i,i+1} = 1$ *pour* $1 \leqslant i < n$*. Donner une condition nécessaire et suffisante sur* A *pour que* N *soit un vecteur propre de* ψ_A *associé à la valeur propre* 1.

1. Comme ψ_A est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est injectif si, et seulement si, il est surjectif.

Or la trace de $\psi_A(M)$ est nulle, quelle que soit la matrice M, donc

$$\operatorname{Im}\psi_A \subset [\operatorname{tr}(N) = 0] \subsetneq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

donc ψ_A n'est pas surjectif.

✍ *Ou, si on préfère, tout polynôme en* A *commute à* A*, donc*

$$\mathbb{R}[A] \subset \operatorname{Ker}\psi_A$$

et comme $\dim \mathbb{R}[A] \geqslant 1$*, l'endomorphisme* ψ_A *n'est donc pas injectif.*

On rappelle que la dimension de la sous-algèbre $\mathbb{R}[A]$ *est égale au degré du polynôme minimal de* A*. Elle est donc strictement positive !*

2. a. Pour $k = 1$, on a

$$AB - BA = B = 1.B^1$$

par hypothèse.

On suppose qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$AB^k - B^kA = k.B^k.$$

On multiplie à droite par B :

$$AB^{k+1} - B^k.\underbrace{AB}_{=BA+B} = k.B^{k+1}$$

et en développant on obtient

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1).B^{k+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2. b. Comme $\psi_A \in L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\big)$, le cardinal du spectre de ψ_A est inférieur à $n^2 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Si B n'était pas nilpotente, alors $B^k \neq 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, B^k serait un vecteur propre de ψ_A associé à la valeur propre k et le spectre de ψ_A contiendrait donc $\mathbb{N}^*$ tout entier : c'est absurde !

Donc B est nilpotente.

3. La matrice N est la matrice nilpotente d'indice n de référence :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation

$$AN - NA = N$$

dont l'inconnue est A. C'est une équation linéaire avec second membre, donc la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène

$$BN - NB = 0.$$

Résolution du système homogène

Résoudre le système homogène, c'est en fait calculer le commutant de N.

❧ Il est clair que la sous-algèbre $\mathbb{R}[N]$ des polynômes en N est contenue dans le commutant de N.

Avant d'aller plus loin, il est impératif de remarquer que : si

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d,$$

alors

$$P(N) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & a_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & & \ddots & a_1 \\ & & & & & a_0 \end{pmatrix}.$$

❧ Réciproquement, y a-t-il dans le commutant de N des matrices qui ne sont pas des polynômes en N ? Eh bien non !

Notons $(e_1, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n, \qquad Ne_i = e_{i-1}$$

et aussi $Ne_1 = 0$. Par conséquent,

$$\forall\, 0 \leqslant k < i, \qquad N^k e_i = e_{i-k}$$

ou, si on préfère,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad e_i = N^{n-i} e_n.$$

Considérons une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$NB = BN$$

et décomposons la dernière colonne de B dans la base canonique :

$$Be_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot e_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right) e_n.$$

Comme N et B commutent, alors N^k et B commutent quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$Be_i = BN^{n-i} e_n = N^{n-i} Be_n = N^{n-i}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right) e_n\right]$$

et comme la sous-algèbre $\mathbb{R}[N]$ est commutative, on en déduit que

$$\begin{aligned} N^{n-i}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right) e_n\right] &= \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right)(N^{n-i} e_n) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right) e_i \end{aligned}$$

et donc que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad Be_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right) e_i.$$

Comme $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base**, on en déduit que

$$B = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot N^{n-i}\right) \in \mathbb{R}[N].$$

Bref, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$NB - BN = 0$$

est exactement le sous-espace (ou la sous-algèbre) des polynômes en N.

✍ *D'une manière générale, le commutant d'une matrice M contient toujours la sous-algèbre des polynômes en M.*

Solution particulière

Avec $A_0 = \mathrm{Diag}(n, n-1, \dots, 2, 1)$, on a

$$A_0N = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n & & & & \\ & & n-1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 2 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et aussi

$$NA_0 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & & & & \\ & & n-2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donc on a bien

$$A_0N - NA_0 = N.$$

Conclusion

La matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$AN - NA = N$$

si, et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$A = A_0 + P(N).$$

✍ *Mais comment peut-on penser à A_0 ???*

J'ai commencé par écrire le produit AN colonne par colonne et le produit NA ligne par ligne (cf plus haut). C'était un peu plus clair, mais pas encore assez !

J'ai donc posé le calcul comme un bourrin : l'équation $AN - NA = N$ devient alors

$$\begin{pmatrix} -a_{2,1} & \boxed{\quad a_{i,j-1} - a_{i+1,j} \quad} \\ \vdots & \\ -a_{n,1} & \\ 0 & a_{n,1} \quad \cdots \quad a_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit tout d'abord que

$$\begin{cases} a_{2,1} = \cdots = a_{n,1} = 0 \\ a_{n,1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0 \end{cases}$$

mais aussi que

$$\forall\, j \neq i+1, \qquad a_{i,j-1} = a_{i+1,j}$$

(j'ai renoncé à ce moment-là à être plus précis sur les quantificateurs), ce qui m'a donné

$$a_{2,1} = \cdots = a_{i,i-1} = a_{i+1,i} = \cdots = a_{n,n-1} = 0.$$

En n'ayant pas encore regardé de près à quoi ressemblait l'ensemble des solutions de l'équation homogène, j'ai alors cherché une solution particulière diagonale en remarquant que

$$\forall\, j = i+1, \qquad a_{i,i} = a_{i+1,i+1} + 1$$

et le tour était joué : il suffisait de vérifier que la matrice A_0 était une solution particulière.

On pose

$$f(x,y) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{1-xy}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Déterminer l'ensemble de définition* D *de* f.

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* D.

$\boxed{\textbf{3.}}$ *Simplifier l'expression de* f.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie sur l'ouvert $D = [xy \neq 1]$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Les trois fonctions

$$[(x,y) \mapsto x]\,, \quad [(x,y) \mapsto y] \quad \text{et} \quad \left[(x,y) \mapsto \frac{x+y}{1-xy}\right]$$

sont des fonctions rationnelles définies sur D et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D. Comme Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Après quelques simplifications, on constate que

$$\forall\,(x,y) \in D, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

La fonction f est donc constante sur chacune des trois composantes connexes de D :

$$[x>0] \cap [xy>1] \quad [x<0] \cap [xy>1] \quad [xy<1].$$

On détermine les constantes en calculant des valeurs particulières simples :

$$\begin{aligned}
\forall\,(x,y) \in [x>0] \cap [xy>1], &\quad f(x,y) = f(\sqrt{3},\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \\
\forall\,(x,y) \in [x<0] \cap [xy>1], &\quad f(x,y) = f(-\sqrt{3},-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{2} \\
\forall\,(x,y) \in [xy<1], &\quad f(x,y) = f(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

rms130-1129

> *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme scindé à racines simples.*
> **1.** *Démontrer que P' est aussi scindé à racines simples.*
> **2.** *Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et des racines de P'.*

1. Notons d, le degré du polynôme P en supposant que $d \geqslant 2$.

✍ *Si $d = 1$, le polynôme dérivé est constant et je ne sais pas trop ce que peut être un polynôme constant "scindé à racines simples".*
Si $d = 0$, alors le polynôme dérivé est le polynôme nul...
Bref, supposons $d \geqslant 2$ pour éviter les discussions oiseuses !

Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, il admet d racines réelles deux à deux distinctes et comme chaque partie **finie** peut être énumérée dans l'ordre croissant, on peut noter

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_d$$

les racines de P.

✍ *Une partie infinie dénombrable de $\mathbb{R}$ peut être énumérée (par définition !). Certaines peuvent être énumérées dans l'ordre croissant, c'est le cas de $\mathbb{N}$. En revanche, d'autres ne peuvent être énumérées dans l'ordre croissant : c'est le cas de $\mathbb{Z}$ (qui n'a pas de plus petit élément), mais c'est aussi le cas de $\mathbb{Q}_+$ (qui a bien un plus petit élément).*

❧ Pour tout entier $1 \leqslant k < d$, la fonction polynomiale associée à P est continue sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ et prend la même valeur en a_k et a_{k+1} :

$$P(a_k) = P(a_{k+1}) = 0.$$

D'après le Théorème de Rolle, il existe donc un réel

$$b_k \in]a_k, a_{k+1}[$$

tel que $P'(b_k) = 0$.

❧ Les racines de P et les racines de P' que nous venons de trouver sont entrelacées :

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_{d-1} < b_{d-1} < a_d$$

et comme toutes ces inégalités sont strictes, on a ainsi démontré que P', polynôme de degré $(d-1)$, admet au moins $(d-1)$ racines réelles deux à deux distinctes.

Comme un polynôme de degré $(d-1) \geqslant 1$ (polynôme non nul par conséquent !) admet au plus $(d-1)$ racines distinctes, cela prouve que P' est également un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

2. D'après les **relations entre coefficients et racines pour les polynômes scindés**, si le polynôme P s'écrit sous forme développée

$$P = c_d X^d + c_{d-1} X^{d-1} + \cdots + c_0,$$

alors la somme des racines de P est égale à

$$\frac{-c_{d-1}}{c_d}$$

et la moyenne arithmétique de ses racines est donc égale à

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{-c_{d-1}}{c_d}.$$

Le polynôme dérivé P', qui est lui aussi scindé comme on vient de le voir, s'écrit alors sous forme développée

$$P' = dc_d X^{-1} + (d-1)c_{d-1} X^{d-2} + \cdots + c_1$$

ce qui prouve que la moyenne arithmétique des racines de P' est égale à

$$\frac{1}{d-1} \cdot \frac{-(d-1)c_{d-1}}{dc_d} = \frac{-c_{d-1}}{dc_d}.$$

Par conséquent, si P est scindé à racines simples, alors les moyennes arithmétiques des racines de P et de P' sont égales !

✍ *Cette dernière propriété est vraie pour* tous *les polynômes complexes de degré $d \geqslant 2$. Nous n'avons utilisé l'hypothèse* à racines simples *pour P que pour démontrer que P' était lui aussi scindé.*

Mais dans $\mathbb{C}[X]$, quel que soit P de degré $d \geqslant 2$, les deux polynômes P et P' sont scindés, que les racines de P soient simples ou non !

rms130-1133

> *Soient* u*, un endomorphisme non nul de* $\mathbb{R}^3$ *tel que*
>
> $$u^3 + u = \omega$$
>
> *et* A*, la matrice de* u *relative à la base canonique.*
>
> **1.** *Démontrer que* A *est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
>
> **2.** *Déterminer le rang de* u.
>
> **3.** *Démontrer que*
>
> $$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$$
>
> *puis que*
>
> $$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}).$$
>
> **4.** *Démontrer que* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.
>
> **5.** *Démontrer qu'il existe une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* u *est égale à*
>
> $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A admet $X^3 + X = X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme annulateur est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc la matrice A est diagonalisable en tant que matrice complexe :

$$\exists\, P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

où les λ_i appartiennent à $\{0, i, -i\}$ (= l'ensemble des racines du polynôme annulateur).

✍ *Ce polynôme annulateur n'est pas scindé dans* $\mathbb{R}[X]$.

Si la matrice A *était diagonalisable en tant que matrice réelle, alors son polynôme minimal serait scindé à racines simples dans* $\mathbb{R}[X]$. *Comme le seul diviseur scindé de ce polynôme est* X*, cela signifierait que* A *serait la matrice nulle !*

2. Comme $u \neq 0$, le rang de u n'est pas nul. Donc il y a au moins une valeur propre non nulle parmi les λ_k.

Comme A est une matrice *réelle*, ses valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées avec la même multiplicité. Par conséquent, i et $-i$ sont toutes les deux valeurs propres. Leur multiplicité commune ne peut pas être strictement supérieure à 1 (on est en dimension 3 !), donc la matrice A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

et son rang est égal à 2.

3. Soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $x = u(x_0)$ et

$$u(x) = u^2(x_0) = 0_E.$$

Comme $u^3 + u = 0$ et que u est linéaire, on en déduit que

$$x = u(x_0) = -u^3(x_0) = -u(0_E) = 0_E.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$.

D'après le Théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$. Par conséquent,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

✍ *On a donné ici une preuve élémentaire qui repose sur le polynôme annulateur connu. Mais le résultat établi est en fait vrai pour tout endomorphisme ayant un polynôme annulateur dont* 0 *est racine simple !*

Supposons que $P = XP_0$ *soit un polynôme annulateur de* u *et que* P_0 *ne soit pas divisible par* X*. Le polynôme* P_0 *est alors premier à* X *et (Bézout !) il existe deux polynômes* A *et* B *tels que*

$$AX + BP_0 = 1.$$

On en déduit que

$$P_0(u) \circ u = 0 \quad \textit{et que} \quad A(u) \circ u + B(u) \circ P_0(u) = \mathrm{Id}\,.$$

Considérons alors un vecteur $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ *: il existe un vecteur* x_0 *tel que* $x = u(x_0)$ *et par conséquent*

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Id}(x) &= A(u)\big[u(x)\big] + B(u)\big[P_0(u) \circ u(x)\big] \\ &= A(u)(0_E) + B(u)(0_E) = 0_E. \end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$ *et donc* $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ *(Théorème du rang).*

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux et que leur produit est un polynôme annulateur de u, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}).$$

✍ *Suffit-il d'annoncer que* X *et* $X^2 + 1$ *sont premiers entre eux ? Ou faut-il prendre la peine d'écrire la relation de Bézout :*

$$(-X).X + (1).(X^2 + 1) = 1$$

qui justifie ce fait ?

❧ Comme $u^3 + u = 0$, alors

$$\forall\, x \in E, \quad (u^2 + \mathrm{Id})[u(x)] = (u^3 + u)(x) = 0_E$$

donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.

D'après les décompositions en somme directe,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$$

on a aussi $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ et par conséquent (inclusion et égalité des dimensions)

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}).$$

✍ *Il suffit de tracer trois droites dans le plan pour constater qu'on peut avoir*

$$E = F \oplus G = F \oplus H$$

sans que pour autant $G = H$ *!*

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Considérons un vecteur directeur e_1 de $\operatorname{Ker} u$ (qui est une droite comme on l'a vu).

❧ Considérons un vecteur e_2 non nul dans le plan $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$. Si e_2 et $u(e_2)$ étaient colinéaires (en tant que vecteurs de $\mathbb{R}^3$, pas en tant que vecteurs de $\mathbb{C}^3$), alors il existerait un réel λ tel que

$$u(e_2) = \lambda \cdot e_2.$$

On aurait alors $u^2(e_2) = \lambda^2 \cdot e_2$, et comme $\lambda \in \mathbb{R}$, cela contredirait $u^2(e_2) = -e_2$ (puisque $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$).

Par conséquent, $\big(e_2, u(e_2)\big)$ est toujours une famille libre, et donc une base, de $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ (quel que soit le choix du vecteur e_2 dans ce plan).

❧ Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$(e_1, e_2, e_3) = \big(e_1, e_2, u(e_2)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

On observe alors que

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0_E = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ u(e_2) &= e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ u(e_3) &= -e_2 = 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \end{aligned}$$

puisque $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ (car $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$).

Par conséquent, la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à $a \in \mathbb{C}$ et les coefficients non-diagonaux sont tous égaux à $b \in \mathbb{C}$.

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* M.

2. *La matrice* M *est-elle diagonalisable ?*

3. *Calculer le polynôme minimal de* M.

4. *Calculer le déterminant de* $I_n + M$.

1. On peut calculer facilement le polynôme caractéristique au moyen d'opérations de pivot judicieuses (et sans passer par une relation de récurrence).

Partant de

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

on effectue d'abord les opérations

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n, \quad L_i \leftarrow L_i - L_1$$

pour obtenir

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & \cdots & b \\ b-a+\lambda & a-b-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-a+\lambda & 0 & \cdots & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

avant d'effectuer

$$C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j$$

pour parvenir à une matrice triangulaire

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda+(n-1)b & b & & b \\ 0 & a-b-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

qui donne directement

$$\chi_M = (X-a+b)^{n-1}\big(X-a-(n-1)b\big).$$

❧ On en déduit en particulier que

$$\det M(a,b) = (-1)^n \chi_M(0) = (a-b)^{n-1}\big(a+(n-1)b\big).$$

✍ *On n'est pas obligé de calculer le polynôme caractéristique pour trouver le déterminant !*

✍ ***Autre méthode très astucieuse pour calculer le déterminant.***
On commence par considérer

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier que f est une fonction affine de x en effectuant les opérations de pivot

$$\forall\, 2 \leqslant j \leqslant n, \quad C_j \leftarrow C_j - C_1$$

pour obtenir

$$\begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & \cdots & c-b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

qu'on développe par la première colonne :

$$f(x) = (a+x) \times M_{1,1} + (b+x) \times \left[\sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} M_{i,1}\right]$$

où les mineurs $M_{i,1}$ ne dépendent pas de x.

Il existe donc deux constantes A et B telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ax + B.$$

❧ *Pour $x = -c$, il est clair que*

$$f(c) = Ac + B = (a-c)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire inférieure) et pour $x = -b$, il est tout aussi clair que

$$f(b) = Ab + B = (a-b)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire supérieure).

❧ *En supposant que $b \neq c$, on déduit des formules de Cramer que*

$$A = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{c-b} \quad \text{et} \quad B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

En particulier,

$$f(0) = B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

❧ *En tant que fonction de b et c, l'expression $f(x)$ est continue (car polynomiale !) donc*

$$\det M(a,b) = \lim_{c \to b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

On pose alors $c = b + h$ et on conclut par un développement limité :

$$\frac{(a-b)^n}{h} \cdot \left((b+h) - b\left[1 - \frac{h}{a-b}\right]^n\right) \xrightarrow[h \to 0]{} (a-b)^{n-1}\big((a-b) + nb\big).$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ La matrice $M(a,b)$ est symétrique mais ses coefficients a et b sont complexes : on ne peut donc pas conclure directement à l'aide du Théorème spectral !

La matrice $M(0,1)$ est, elle, symétrique réelle donc diagonalisable : il existe une matrice de passage Q telle que

$$Q^{-1} M(0,1) Q$$

soit diagonale.

On en déduit alors que, quels que soient les nombres complexes a et b, la matrice

$$Q^{-1} M(a,b) Q = a \underbrace{Q^{-1} M(1,0) Q}_{I_n} + b \underbrace{Q^{-1} M(0,1) Q}_{\text{diag.}}$$

est diagonale, ce qui prouve que toutes les matrices $M(a,b)$ sont diagonalisables.

✍ *Qu'on puisse ici choisir la matrice de passage dans le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est sans intérêt.*

3. Si $b = 0$, alors $M(a,b) = aI_n$ est une homothétie et son polynôme minimal est donc $(X - a)$.
Si $b \neq 0$, alors $M(a,b)$ n'est pas une homothétie et le degré de son polynôme minimal est donc supérieur à 2.

Il est alors classique de considérer la matrice

$$J = M(1,1)$$

dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc

$$J^2 = nJ$$

et comme

$$M(a,b) - (a-b)I_n = bJ$$

alors

$$\begin{aligned}[M(a,b) - (a-b)I_n]^2 &= b^2J^2 \\ &= nb.(bJ) \\ &= nb.[M(a,b) - (a-b)I_n].\end{aligned}$$

Cela nous montre que le polynôme

$$[X - (a-b)]^2 - nb.[X - (a-b)]$$

est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, de degré 2 et unitaire : c'est donc le polynôme minimal de $M(a,b)$.

Conclusion :

$$\mu_M = (X - a + b)\big(X - a - (n-1)b\big).$$

✍ ***Variante plus élaborée :***

Le polynôme caractéristique de $M(a,b)$ nous donne ses deux valeurs propres (ou sa valeur propre si $b = 0$) et on sait que $M(a,b)$ est diagonalisable. Par conséquent, son polynôme minimal est unitaire, scindé, à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de $M(a,b)$ (c'est-à-dire les racines de χ_M) : cela caractérise le polynôme minimal.

4. Comme $I_n + M(a,b) = M(a+1,b)$, le déterminant de $I_n + M(a,b)$ est égal à

$$(1 + a - b)^{n-1}\big(1 + a + (n-1)b\big).$$

rms130-1135b

Soit $\mathrm{M}(a,b) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à $a \in \mathbb{C}$ et les coefficients non-diagonaux sont tous égaux à $b \in \mathbb{C}$.

1. *Démontrer que*
$$\mathcal{E} = \{\mathrm{M}(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\}$$
est un espace vectoriel et admet $\big(\mathrm{I} = \mathrm{M}(1,0),\ \mathrm{J} = \mathrm{M}(1,1)\big)$ pour base.

2. *Démontrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.*

3. *Démontrer que la famille $\big(\mathrm{I}, \mathrm{M}(a,b), \mathrm{M}(a,b)^2\big)$ est liée et exhiber une relation de liaison.*

4. *En déduire une condition pour que la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ soit inversible et, le cas échéant, exprimer son inverse.*

1. L'application $\varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{K}^2, \quad \varphi(a,b) = \mathrm{M}(a,b) = a\mathrm{M}(1,0) + b\mathrm{M}(0,1)$$
est évidemment linéaire et $\mathcal{E}$, en tant qu'image d'une application linéaire, est donc un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

❧ La définition de φ nous dit que $\big(\mathrm{M}(1,0),\ \mathrm{M}(0,1)\big)$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$ et comme il est clair que
$$a\mathrm{M}(1,0) + b\mathrm{M}(0,1) = \mathrm{M}(a,b) = 0_n \iff a = b = 0$$
cette famille génératrice est en fait une base de $\mathcal{E}$.

L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur $\mathcal{E}$ et en particulier $\dim \mathcal{E} = 2$.

❧ Quels que soient les scalaires α et β,
$$\alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J} = \mathrm{M}(\alpha+\beta, \beta).$$
Il est clair que
$$\alpha + \beta = \beta = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$
et par conséquent la famille (I, J) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2, on en déduit que (I, J) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Comme $\mathcal{E}$ est engendré par la famille (I, J), il suffit de vérifier que les produits deux à deux des membres de cette famille :
$$\mathrm{I} \times \mathrm{I}, \quad \mathrm{I} \times \mathrm{J}, \quad \mathrm{J} \times \mathrm{I}, \quad \mathrm{J} \times \mathrm{J}$$
appartiennent bien à $\mathcal{E}$.

Comme I est neutre pour $\times$, il suffit même de vérifier que $\mathrm{J}^2 \in \mathcal{E}$.

On vérifie sans peine que $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J} \in \mathcal{E}$, ce qui prouve que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

✍ *Comme $\mathrm{I} \in \mathcal{E}$, on vient en fait de prouver que $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

3. D'après la question précédente, la famille est constituée de trois vecteurs de $\mathcal{E}$, espace vectoriel de dimension 2, donc cette famille est liée.

❧ Sachant que $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$ et que
$$\mathrm{M}(a,b) - (a-b)\mathrm{I} = b\mathrm{J},$$
on obtient
$$\big[\mathrm{M}(a,b) - (a-b)\mathrm{I}\big]^2 = b^2\mathrm{J}^2 = nb^2\mathrm{J} = nb.\big[\mathrm{M}(a,b) - (a-b)\mathrm{I}\big]$$
ce qui nous donne une relation de liaison et par conséquent un polynôme annulateur de $\mathrm{M}(a,b)$:
$$[X - (a-b)]^2 - nb.[X - (a-b)] = [X - (a-b)][X - (a-b) - nb].$$

4. La relation de liaison qu'on vient de trouver peut s'écrire
$$\mathrm{M}(a,b)\big[\mathrm{M}(a,b) - [2(a-b) + nb]\mathrm{I}_n\big] = -(a-b)(a-b+nb)\mathrm{I}_n.$$
Par conséquent, si $a \neq b$ et si $a \neq (n-1)b$, alors la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible et son inverse est la matrice
$$\frac{-1}{(a-b)(a-b+nb)} \cdot \big[\mathrm{M}(a,b) - [2(a-b) + nb]\mathrm{I}_n\big].$$

✍ *En revanche, si $a = b$ ou si $a = (n-1)b$, on ne peut exploiter la relation de liaison... Il faut faire intervenir le polynôme minimal pour conclure !*

❧ Le polynôme minimal de $M(a, b)$ est un diviseur unitaire du polynôme annulateur trouvé.

Si le polynôme minimal de $M(a, b)$ est un polynôme de degré 1, alors $M(a, b)$ est une homothétie ($b = 0$) de rapport a et $M(a, 0)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$, d'inverse $M(1/a, 0) \in \mathcal{E}$.

Sinon, le polynôme minimal de $M(a, b)$ est égal à

$$[X - (a - b)][X - (a - b) - nb]$$

et la matrice $M(a, b)$ est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas une racine du polynôme minimal, c'est-à-dire si $a \neq b$ et $a \neq (n-1)b$ et dans ce cas, l'expression de l'inverse de $M(a, b)$ a déjà été donnée.

> *Pour toute fonction* $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, *on pose*
> $$N(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|.$$
> *Démontrer que* N *est une norme sur* $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[t \mapsto f(t)t^n]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale
$$\int_0^1 f(t)t^n\,dt$$
est bien définie.

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y reste bornée et
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \qquad \left|f(t)t^n\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$
Par positivité de l'intégrale, on en déduit que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)t^n\right|dt \leqslant \|f\|_\infty.$$

L'ensemble
$$\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$: elle admet bien une borne supérieure et cette borne supérieure est un réel positif.

Ainsi, N est bien une application de $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

✍ *Faut-il prendre la peine de justifier pourquoi l'ensemble considéré n'est pas vide ?*

On a justifié l'existence de chaque intégrale, donc cet ensemble contient tous les termes d'une suite réelle (pas nécessairement distincts deux à deux, mais c'est sans importance).

Je ne pense pas qu'il faille en dire plus.

En revanche, il est crucial de justifier l'existence de chaque intégrale, de justifier clairement que l'ensemble est borné et de mentionner (juste mentionner, en passant) qu'il n'est pas vide.

► Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que
$$\left|\int_0^1 (\lambda f)(t)t^n\,dt\right| = \underbrace{|\lambda|}_{\geqslant 0} \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|$$
et par conséquent
$$N(\lambda f) = |\lambda| \sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\} = |\lambda|\,N(f).$$

✍ *Là encore, inutile d'entrer dans les détails (à mon avis).*

Mais un jour d'oral, on doit se tenir prêt à fournir les détails nécessaires pour justifier que, pour toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$,
$$\forall\, t > 0, \quad \sup(t.A) = t.\sup(A).$$
(Rien de compliqué, mais ça prend pas mal de temps de bien le rédiger.)

► Quelle que soient les fonctions f et g dans E, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (f+g)(t)t^n\,dt\right| &= \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt + \int_0^1 g(t)t^n\,dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right| + \left|\int_0^1 g(t)t^n\,dt\right| \\ &\leqslant N(f) + N(g)\end{aligned}$$

(en invoquant successivement la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et le fait que la borne sup est un majorant).

On a trouvé un majorant indépendant de n, on peut donc passer au sup :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 (f+g)(t)t^n \, dt \right| \leqslant N(f) + N(g)$$

ce qui signifie précisément que N vérifie aussi l'inégalité triangulaire :

$$\forall f, g \in E, \quad N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

✍ *Je tiens à ce style de démonstration avec les bornes sup (ou inf) : on commence par trouver un majorant et on conclut en rappelant que, par définition, la borne sup est le plus petit de tous les majorants possibles. — C'est peut-être une manie personnelle ?*

► Il reste à vérifier que N sépare les points. Pour cela, nous considérons $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)t^n \, dt = 0.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit que

$$\int_0^1 f(t)P(t) \, dt = 0$$

pour toute application polynomiale $P \in E$.

❧ La fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[0, 1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications polynomiales qui converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0.$$

❧ Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est bornée sur $[0, 1]$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left|f^2(t) - f(t)P_n(t)\right| = \left|f(t)\right| \left|f(t) - P_n(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty.$$

Par linéarité, par inégalité triangulaire et enfin par positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f^2(t) \, dt - \int_0^1 f(t)P_n(t) \, dt \right| &= \left| \int_0^1 f^2(t) - f(t)P_n(t) \, dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|f^2(t) - f(t)P_n(t)\right| dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty. \end{aligned}$$

❧ On en déduit que

$$\int_0^1 f^2(t) \, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)P_n(t) \, dt.$$

Or on a constaté en commençant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)P_n(t) \, dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^1 f^2(t) \, dt = 0$$

et comme f^2 est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, on en déduit que f est la fonction nulle.

✍ *On peut vérifier facilement que l'application*

$$\left[(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) \, dt\right]$$

définit un produit scalaire sur E*. Le raisonnement qui précède démontre que l'orthogonal du sous-espace* F *des applications polynomiales est réduit à* $\{0\}$ *et donc que*

$$\mathsf{F}^{\perp} = \mathsf{E}^{\perp} = \{0\} \quad \textit{bien que} \quad \mathsf{F} \subsetneq \mathsf{E}.$$

On en déduit en particulier que $(\mathsf{F}^{\perp})^{\perp} = \mathsf{E} \neq \mathsf{F}$.

Cela n'est possible que parce que E *est un espace de dimension infinie et que* F *est dense dans* E.

Rappel : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé (donc $\overline{\mathsf{F}} = \mathsf{F}$*) et* $(\mathsf{F}^{\perp})^{\perp} = \mathsf{F}$.

> *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit l'application $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en posant*
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$$
> *et on note F, le sous-espace de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les e_λ.*
> *Pour tout $f \in F$, on pose*
> $$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}.$$
> *Démontrer que N est une norme sur F.*

Par définition de F, pour toute fonction $f \in F$, il existe un NOMBRE FINI de scalaires complexes

$$a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

(où les λ_p sont DEUX À DEUX DISTINCTS) tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p e^{\lambda_p x}.$$

Il est alors clair que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k.$$

Toute famille FINIE de nombres réels positifs admet un plus grand élément : en posant

$$a_0 = \sum_{p=1}^{n} |a_p| \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\},$$

on obtient

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(k)}(0)\right| \leqslant a_0 \lambda_0^k$$

et on en déduit que la série

$$\sum \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}$$

est bien convergente (comparaison à une série de Poisson).

Par conséquent, N est bien une application de F dans $\mathbb{R}_+$.

- ▶ L'homogénéité est évidente (linéarité de la somme pour les séries convergentes).
- ▶ L'inégalité triangulaire est facile à établir. Quelles que soient les applications f et g dans F,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|(f+g)^{(k)}(0)\right| \leqslant \left|f^{(k)}(0)\right| + \left|g^{(k)}(0)\right|$$

(inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$) et par positivité de la somme (pour les séries convergentes)

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

- ▶ Il reste à vérifier que N sépare les points.

Supposons donc que $N(f) = 0$ pour une certaine application $f \in F$. On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0$$

(une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul) et donc que (en conservant les notations précédentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k = 0.$$

Comme les λ_p sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde

$$V = (\lambda_p^k)_{\substack{0 \leqslant k < n \\ 1 \leqslant p \leqslant n}}$$

est inversible, donc les a_p vérifient le système de Cramer homogène

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k = 0$$

ce qui prouve que les a_p sont tous nuls et donc que f est le vecteur nul.

✍ *Non, la matrice de Vandermonde n'est pas au programme. En théorie, il faudrait justifier en détail le fait qu'elle est inversible si, et seulement si, les λ_p sont deux à deux distincts.*

Mais la matrice de Vandermonde est un grand classique *et, à ce titre, on a le droit d'y faire allusion sans trop entrer dans les détails — surtout quand, comme ici, elle n'est pas introduite par l'énoncé.*

Et d'autre part, la matrice de Vandermonde apparaît dans le cours sur les polynômes interpolateurs de Lagrange qui, eux, sont bien au programme. De ce fait, on peut quand même considérer que la matrice de Vandermonde est au programme !

VARIANTE.— Pour tout λ, la fonction e_λ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n.$$

Par combinaison linéaire, toute fonction $f \in F$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier (Formule de Taylor) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Comme on l'a vu, si $N(f) = 0$, alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent la fonction f est la fonction nulle.

✍ *Cette variante est plus élégante que la méthode précédente... En fait, cette variante ne prouve que ce qu'il faut prouver (la fonction f est la fonction nulle) et rien de plus !*

La méthode précédente au contraire démontrait que f était nulle en démontrant que tous les scalaires a_k étaient nuls au moyen d'un argument (système de Cramer associé à une matrice de Vandermonde) qui permet de démontrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est une famille libre — ce dont on n'a nul besoin ici.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^{3/2} + (n+x)^{1/2}}$$

et on note f, la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. *Démontrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.*

2. *Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.*

3. *Trouver un équivalent de f au voisinage de -1. En déduire que f est intégrable sur $]-1, 0]$.*

4. *Calculer la limite de f au voisinage de $+\infty$.*

5. *Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que*

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

1. On pose $I =]-1, +\infty[$.
Pour tout $x > -1$ (fixé),

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et comme la série de Riemann $\sum {}^1/_{n^{3/2}}$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente et donc que la somme $S(x)$ est bien définie.

2. Chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I$,

$$f_n'(x) = \frac{-(3n+3x+1)}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)^2}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{3}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)}.$$

En particulier,

$$\forall \boxed{n \geqslant 2,}\ \forall\, x \in I, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{3}{2(n-1)^{3/2}n}$$

ce qui prouve que la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 2} f_n'$ converge normalement sur I.

On a ainsi démontré que $S - f_1$ était de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) - f_1'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x)$$

et donc que

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

✍ *Il me paraît plus simple de séparer f_1 du reste de la série et de produit un argument de convergence normale sur I tout entier que de conserver f_1 avec les autres termes et de démontrer la convergence normale sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ pour tout $a > -1$.*

Bien entendu, pour penser à traiter f_1 séparément, il faut avoir remarqué pourquoi la convergence n'était pas normale au voisinage de -1 (c'est le genre de questions qu'il est toujours bon de se poser).

3. On reprend la même démarche en traitant f_1 à part !

❧ Pour tout $x > -1$,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(-1) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot n}.$$

En sommant ces inégalités (pour $n \geqslant 2$ seulement, pas pour $n \geqslant 1$!), on obtient

$$\forall\, x > -1, \quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot n}.$$

Cet encadrement prouve que $S(x) - f_1(x)$ est bornée sur $]-1, +\infty[$ et en particulier que

$$S(x) \underset{x \to -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1).$$

✍ *On prouve ainsi que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} f_n$ converge normalement sur I et on redémontre à cette occasion que la somme S est continue sur I en tant que somme de f_1, continue sur I, et de la somme de la série $\sum_{n \geqslant 2} f_n$, qui est pour sa part continue sur $[-1, +\infty[$.*

❧ Comme la fonction f_1 tend vers $+\infty$ au voisinage de -1, on en déduit que

$$S(x) \underset{x \to -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1) = f_1(x) + o\big[f_1(x)\big]$$

donc que

$$S(x) \underset{x \to -1}{\sim} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}(x+2)}$$

et enfin que

$$S(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

❧ Comme la fonction S est continue sur $]-1, 0]$, cet équivalent prouve que S est intégrable sur $]-1, 0]$ (comparaison à $1/\sqrt{u}$ au voisinage de $u = 0^+$).

4. On a prouvé que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} f_n$ convergeait normalement sur I et donc en particulier au voisinage de $+\infty$.

Comme f_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que

$$(S - f_1)(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 0.$$

Comme f_1 tend également vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit finalement que

$$S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

5. Fixons $x \geqslant 1$ (ce n'est pas une restriction, puisque x tend vers $+\infty$).

La fonction φ définie par

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t+x}\,(t+x+1)}$$

est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$, une comparaison somme–intégrale (**avec figure correctement légendée !**) donne

$$\int_1^N \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leqslant \int_0^N \varphi(t)\,dt.$$

Or, quels que soient $0 \leqslant a \leqslant N$,

$$\int_a^N \varphi(t)\,dt = \int_{x+a}^{N+x} \frac{du}{\sqrt{u}\,(u+1)}$$

(changement de variable affine $u = t + x$) et donc

$$\int_a^N \varphi(t)\,dt = 2\int_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}} \frac{dv}{v^2+1} = \Big[2\,\text{Arctan}\,v\Big]_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}}$$

(changement de variable $v = \sqrt{u}$).

On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{N \to +\infty} \int_a^N \varphi(t)\,dt &= 2\big[\pi/2 - \text{Arctan}\,\sqrt{x+a}\big]\\ &= 2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x+a}}\end{aligned}$$

et donc que

$$2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leqslant S(x) \leqslant 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

pour tout $x \geqslant 1$.

Finalement,

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$$

ce qui redémontre que S tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et prouve que S n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

✍ *Cette dernière remarque sert à justifier le calcul de l'équivalent — car à quoi peut bien servir un équivalent au voisinage de $+\infty$ à moins qu'on n'étudie l'intégrabilité ?*

> *Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f et telle que la suite $(P_n)'_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f'.*

✍ *Convergence uniforme sur un segment, fonctions polynomiales... Évidemment, c'est l'occasion d'appliquer le Théorème de Weierstrass !*

Mais attention, si la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers u, rien ne prouve que la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge uniformément sur I vers la dérivée u'...

Par hypothèse, la dérivée u' est continue sur le segment $[0,1]$, donc il existe une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers u' (Théorème d'approximation de Weierstrass) :

$$\lim_{n\to+\infty} \|Q_n - u'\|_\infty = 0.$$

Comme u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après le Théorème fondamental,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt.$$

Par analogie, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad P_n(x) = u(0) + \int_0^x Q_n(t)\,dt.$$

En tant que primitive de la fonction polynomiale Q_n, la fonction P_n est elle aussi polynomiale.

De plus, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\big|P_n(x) - u(x)\big| &= \left|\left(u(0) + \int_0^x Q_n(t)\,dt\right) - \left(u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt\right)\right| \\
&= \left|\int_0^x Q_n(t) - u'(t)\,dt\right| \\
&\leqslant |x-0|\,\|Q_n - u'\|_\infty
\end{aligned}$$

car

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|Q_n(t) - u'(t)\big| \leqslant \|Q_n - u'\|_\infty.$$

On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|P_n(x) - u(x)\big| \leqslant \|Q_n - u'\|_\infty.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [0,1]$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|P_n - u\|_\infty \leqslant \|Q_n - u'\|_\infty$$

donc la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers u. Et de plus, par construction, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers u'.

> *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose*
> $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$
> **1.** *Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
> **2.** *Déterminer la limite de S au voisinage de $+\infty$.*
> **3.** *Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

❧ Il est clair que, pour tout $x > 0$, la suite de terme général

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{1+nx}$$

tend vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ est donc convergente.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme S est bien définie sur cet intervalle.

✍ *La série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $x = 0$.*

❧ Puisque les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites, on sait comment dominer le reste d'ordre n :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

❧ Pour $a > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, cela signifie que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (et donc en particulier sur $[a, +\infty[$), on en déduit que la somme S est continue sur $[a, +\infty[$.

❧ Cela étant vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que la conclusion est vraie sur $]0, +\infty[$: la somme S est continue sur $]0, +\infty[$.

✍ *La domination du reste donnée par le Critère spécial des séries alternées ne permet pas de conclure à la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. En effet, le majorant trouvé sur cet intervalle :*

$$\sup_{x>0} \frac{1}{1+(n+1)x} = 1$$

ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$!

D'autre part, chaque fonction u_n tend vers une limite finie (égale à ± 1) au voisinage de 0 et le Théorème d'interversion des limites (ou Théorème de la double limite) nous dit que, si la série $\sum u_n$ convergeait uniformément sur un voisinage de 0, alors en particulier la série numérique

$$\sum \lim_{x \to 0} u_n(x) = \sum (-1)^n$$

serait convergente ! La question est réglée : la série $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de 0.

✍ *On a établi la continuité de la somme par un argument de convergence uniforme. Il est important de noter qu'on ne pouvait pas invoquer la convergence normale :*

$$\forall\, a > 0, \quad \sup_{x \in [a, +\infty[} \left|u_n(x)\right| = u_n(a) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{na}$$

et la série $\sum {}^1\!/\!_{n\,a}$ est divergente.

$\boxed{\textbf{2.}}$ On a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait uniformément sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$.

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et d'autre part la fonction u_0 tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

La convergence uniforme au voisinage de $+\infty$ nous autorise à passer à la limite terme à terme : la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et cette limite est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1.$$

✍ *Comme cette limite est un réel non nul, on peut aussi présenter le résultat sous la forme d'un équivalent :*

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, x > 0, \quad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}.$$

► On sait que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

✍ *Il nous reste à démontrer que la série des dérivées $\sum u_n'$ converge uniformément sur chaque l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ afin de pouvoir conclure.*

► L'inégalité

$$\left|u_{n+1}'(x)\right| \leqslant \left|u_n'(x)\right|$$

équivaut (après quelques simplifications...) à

$$n(n+1)x^2 \geqslant 1.$$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $x^2 \geqslant a^2$ et par conséquent, la suite extraite

$$\left(\left|u_n'(x)\right|\right)_{n\geqslant 1/a}$$

tend vers 0 en décroissant.

Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont donc satisfaites pour tout $x \geqslant a$ à partir du rang $n \geqslant {}^1\!/\!_a$. En particulier,

$$\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, n \geqslant \frac{1}{a}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| \leqslant \frac{n+1}{(1+[n+1]a)^2}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est un majorant en $\mathcal{O}(1/n)$), donc la série des dérivées $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

► On en déduit que la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Comme cette propriété est vraie pour tout $a > 0$, on en déduit qu'en fait la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x > 0, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

rms130-1194

Soient E, *un espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f, *un endomorphisme de* E.

1. *Pour tout entier* $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k.$$

2. *S'il existe un entier* $p \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1},$$

alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+k}.$$

3. *En déduire que*

$$\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}.$$

Soit u, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$ et $u \neq \mathrm{Id}$.

1. *Démontrer que 1 est une valeur propre de u.*

2. *Démontrer que*

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}).$$

3. *Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est égale à*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Par hypothèse, le polynôme

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

est un polynôme annulateur de u.

❧ La dimension de $\mathbb{R}^3$ est égale à 3, donc le degré du polynôme caractéristique χ de u, égal à 3, est impair.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle (avatar du Théorème des valeurs intermédiaires), donc χ possède au moins une racine réelle, donc u admet au moins une valeur propre réelle.

Toute valeur propre de u est en particulier une racine du polynôme annulateur $(X^3 - 1)$ et la **seule** racine réelle de $(X^3 - 1)$ est égale à 1. Par conséquent, 1 est bien une valeur propre de u (et c'est sa seule valeur propre réelle).

2. Les facteurs $(X-1)$ et $(X^2 + X + 1)$ sont irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$), unitaires et distincts, donc ils sont premiers entre eux. Comme leur produit : $(X^3 - 1)$ est un polynôme annulateur de u, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}).$$

3. Commençons par analyser la matrice donnée.

Si cette matrice représente u dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors

$$e_2 = u(e_1), \quad e_3 = u(e_2) = u^2(e_1) \quad \text{et} \quad e_1 = u(e_3) = u^3(e_1) = e_1$$

puisque, par hypothèse, $u^3 = \mathrm{Id}$.

✍ *Ainsi $\mathscr{B} = \big(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\big)$. Il s'agit donc uniquement de bien choisir le vecteur e_1...*

❧ *Si on choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, alors $e_2 = u(e_1) = e_1$, ce qui contredit le fait que la famille (e_1, e_2) doive être une famille libre.*

❧ *Si on choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$, alors*

$$e_3 + e_2 + e_1 = (u^2 + u + \mathrm{Id})(e_1) = 0$$

ce qui contredit le fait que la famille (e_1, e_2, e_3) soit libre.

❧ *Puisque $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$, le vecteur e_1 peut être décomposé*

$$e_1 = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})} + \underbrace{z}_{\in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})}$$

et d'après ce qui précède, il faut que $y \neq 0$ et que $z \neq 0$.

▶ Comme $1 \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$, donc il existe y_0 *non nul* dans $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

▶ Comme $u \neq \mathrm{Id}$, alors $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \subsetneq \mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ et il existe $z_0 \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$, *non nul.*

La famille (z_0) est donc une famille libre.

▶ Le sous-espace

$$G = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$$

est stable par u et l'endomorphisme $u_G \in L(G)$ induit par restriction de u admet évidemment $X^2 + X + 1$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme n'a pas de racine réelle, cela signifie que u_G n'a pas de valeur propre réelle et donc que le sous-espace G ne contient aucun vecteur propre de u_G.

Si le couple
$$\big(z_0, u(z_0)\big) = \big(z_0, u_G(z_0)\big)$$
était lié, alors z_0 serait un vecteur propre de u_G : on vient de voir que c'est impossible !

Par conséquent, le couple $\big(z_0, u(z_0)\big)$ est une famille libre.

► Comme les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et G sont en somme directe, que (y_0) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et que $\big(z_0, u(z_0)\big)$ est une famille libre de G, la famille
$$\big(y_0, z_0, u(z_0)\big)$$
est libre.

✍ *La propriété de somme directe permet de concaténer des familles libres en conservant l'indépendance linéaire des vecteurs (sans avoir à poser de calculs pour justifier ce fait).*

► Posons maintenant
$$e_1 = y_0 + z_0.$$
Par linéarité de u,
$$u(e_1) = y_0 + u(z_0) \quad \text{et} \quad u^2(e_1) = y_0 + u^2(z_0) = y_0 - z_0 - u(z_0)$$
puisque $z_0 \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$ et donc $u^2(z_0) + u(z_0) + z_0 = 0$.

▷ Soient a, b et c, trois réels tels que
$$ae_1 + bu(e_1) + cu^2(e_1) = 0.$$
On en déduit que
$$(a + b + c)y_0 + (a - c)z_0 + (b - c)u(z_0) = 0.$$

▷ Comme la famille $\big(y_0, z_0, u(z_0)\big)$ est libre, on en déduit que
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$
et donc que $a = b = c = 0$ (système de Cramer). Par conséquent, la famille
$$\big(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\big)$$
est libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de u relative à cette base est égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(par définition de la base pour les deux premières colonnes ; à cause de $u^3 = \mathrm{Id}$ pour la troisième colonne).

Soient $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* F, *le sous-espace engendré par les vecteurs*

$$e_1 = \cos \quad \textit{et} \quad e_2 = \sin .$$

Pour toute fonction $f \in E$, *on pose*

$$T_f = \left[t \mapsto \big(10f(0) - 6f'(0)\big)\cos t + \big(12f(0) - 7f'(0)\big)\sin t\right]$$

et on note $u = [f \mapsto T_f]$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Démontrer que* e_1 *et* e_2 *sont linéairement indépendants.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Démontrer que* u *est un endomorphisme de* E. *Est-il injectif ?*

$\boxed{\textbf{3.}}$ *Démontrer qu'il existe un endomorphisme* v *de* F *induit par restriction de* u.

$\boxed{\textbf{4.}}$ *Quelles sont les valeurs propres de* v *?*

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soient a et b, deux réels tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad ae_1(t) + be_2(t) = 0.$$

Avec $t = 0$, on obtient $a = 0$ et avec $t = \pi/2$, on a aussi $b = 0$. Donc la famille (e_1, e_2) est libre.

$\boxed{\textbf{2.}}$ L'application T_f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en tant que combinaison linéaire de e_1 et de e_2.

D'autre part,

$$[f \mapsto f(0)] \quad \text{et} \quad [f \mapsto f'(0)]$$

sont bien des formes linéaires sur E, donc $[f \mapsto T_f]$ est bien une application linéaire.

❧ On sait que la dimension de l'espace de départ E est infinie. On a remarqué que l'image de u était contenue dans $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, espace vectoriel de dimension deux.

Comme $\dim F < \dim E$, l'application $u \in L(E, F)$ n'est pas injective.

$\boxed{\textbf{3.}}$ On a déjà remarqué que le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ était stable par u, donc il existe bien un endomorphisme de F induit par restriction de u : c'est celui que l'énoncé note v.

✍ *La question est très mal formulée. La notation* $u_{|F}$ *désigne la restriction de* u *à* F *et, par définition, il s'agit d'une application de* F *dans* E *(puisque* $u : E \to E$*), qui ne peut donc pas être un* endomorphisme.

$\boxed{\textbf{4.}}$ D'après la première question, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de F. Dans cette base, la matrice de v est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

La trace est égale à $3 = 2 + 1$ et le déterminant à $2 = 2 \times 1$, donc les valeurs propres de v sont 1 et 2.

❧ Comme

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -9 \end{pmatrix},$$

les applications

$$2e_1 + 3e_2 \quad \text{et} \quad 3e_1 + 4e_2$$

sont des vecteurs propres de v respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2.

❧ En posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

on définit donc une matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, 2).$$

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et f, un endomorphisme de E dont le rang est égal à r. Démontrer que le degré du polynôme minimal de f est inférieur ou égal à $(r+1)$.

✍ *On n'a ici aucune idée de ce que pourrait être le polynôme minimal de f (on ne dispose d'aucune indication sur la nature géométrique de f [projecteur, symétrie...] par exemple).*

Le seul théorème applicable est donc celui qui nous assure que le degré du polynôme minimal est inférieur à la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

On ne peut donc pas se contenter d'étudier f, endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.

Le sous-espace $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace stable par f de dimension $r = \operatorname{rg} f$. On note f_0, l'endomorphisme de $F = \operatorname{Im} f$ induit par restriction de f à $\operatorname{Im} f$.

Comme $\dim \operatorname{Im} f = r$, on en déduit que le degré du polynôme minimal de f_0 est inférieur ou égal à r.

Il existe donc un polynôme

$$\mu_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

dont le degré d est inférieur à r et qui annule f_0 :

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} f, \quad (f_0^d + a_{d-1}f_0^{d-1} + \cdots + a_1 f_0 + a_0 \operatorname{Id})(y) = 0_E.$$

Comme f_0 est induit par restriction de f à $\operatorname{Im} f$, on en déduit qu'en fait

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} f, \quad (f^d + a_{d-1}f^{d-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \operatorname{Id})(y) = 0_E.$$

Pour tout $x \in E$, on a $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ (par définition même de $\operatorname{Im} f$), donc

$$\forall\, x \in E, \quad (f^d + a_{d-1}f^{d-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \operatorname{Id})[f(x)] = 0_E$$

ce qui prouve que le polynôme

$$X^{d+1} + a_{d-1}X^d + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$$

est un polynôme unitaire annulateur de f.

Le polynôme minimal de f est un diviseur de ce polynôme, donc le degré du polynôme minimal de f est inférieur ou égal à $(r+1)$.

rms130-1206

Soient $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, une colonne non nulle, et $A = X.X^\top$.

1. *Calculer le rang et le spectre de A.*

2. *En déduire le polynôme caractéristique de A.*

3. *Démontrer que*

$$\det(I_n + A) = 1 + X^\top.X.$$

1.

✍ *Nous allons traiter cet exercice de manière élémentaire, mais on pourrait évoquer plusieurs résultats de nature géométrique pour aller plus vite en voyant plus loin. À tout à l'heure !*

On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$A = (x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

ou, plus clairement en lisant A colonne par colonne,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 X & x_2 X & \cdots & x_n X \end{pmatrix}.$$

❧ Comme $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ n'est pas la colonne nulle,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$$

donc la matrice A n'est pas la matrice nulle et son rang est donc au moins égal à 1.

Réciproquement, toutes les colonnes de A sont proportionnelles à la colonne X, donc le rang de A est au plus égal à 1.

Bref : le rang de A est égal à 1.

❧ En particulier, 0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé à cette valeur propre (alias $\operatorname{Ker} A$) est un sous-espace de dimension $(n-1)$.

D'autre part,

$$AX = (XX^\top).X = X.\underbrace{(X^\top X)}_{=\operatorname{tr}(A)\in\mathbb{R}} = \operatorname{tr}(A).X$$

et comme la colonne X n'est pas la colonne nulle, il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A) > 0$.

Conclusion : le spectre de A est $\{0, \operatorname{tr}(A)\}$.

2. On a trouvé deux valeurs propres distinctes 0 et $\operatorname{tr}(A) > 0$, on a constaté que les dimensions des deux sous-espaces propres étaient respectivement égale à $(n-1)$ et au moins égale à 1, donc A est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à $\operatorname{tr}(A)$ est donc la droite $\mathbb{R} \cdot X$ et le polynôme caractéristique de A est donc égal à

$$(X-0)^{n-1}(X - \operatorname{tr} A)^1 = X^{n-1}(X - \operatorname{tr} A).$$

3. Comme A est semblable à

$$\operatorname{Diag}(\operatorname{tr} A, 0, \dots, 0),$$

alors $I_n + A$ est semblable à

$$\operatorname{Diag}(1 + \operatorname{tr} A, 1, \dots, 1)$$

donc

$$\det(I_n + A) = (1 + \operatorname{tr} A).1^{n-1} = 1 + \operatorname{tr} A = 1 + X^\top.X.$$

✍ *Un peu de géométrie maintenant ?*

Soient e, le vecteur représenté par la colonne X dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ et φ, l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de E.

On suppose que E *est muni du produit scalaire canonique. Dans ces conditions,*

$$\forall\, u \in E, \quad \varphi(u) = e.\langle\, e \,|\, u \,\rangle \;=\; \langle\, e \,|\, u \,\rangle \,\cdot e = \|e\|^2 \cdot p(u)$$

où p *est la projection orthogonale sur la droite* $D = \mathbb{R} \cdot e$*.*

Il est donc clair que le rang de φ *est égal à* 1 *(= le rang de* p*), que les valeurs propres de* φ *sont* 0 *et* $\|e\|^2$ *(proportionnelles aux valeurs propres de* p*) et que les sous-espaces propres de* φ *respectivement associés à ces valeurs propres sont l'hyperplan* $H = (\mathbb{R} \cdot e)^{\perp}$ *et* $\mathbb{R} \cdot e$ *(= les sous-espaces propres de* p*, c'est-à-dire le noyau et l'image de la projection).*

rms130-1208

1. *Soient $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ses valeurs propres (comptées avec multiplicité). Démontrer que*

$$\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

2. *Pour $n \geqslant 3$, on considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur les quatre "bords", qui sont tous égaux à 1. Déterminer les éléments propres de A.*

1. Comme la matrice M est complexe, elle est trigonalisable : il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$Q^{-1}M^2Q = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

et comme des matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

2. On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 \;\cdots\; 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 \;\cdots\; 0 & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La question précédente nous suggère de calculer

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \cdots & 2 & n \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & n \end{pmatrix}.$$

✍ *Si on se laisse emporter par son élan (ce qui ne manque pas d'arriver si on a déjà étudié cette matrice), on trouve aussi*

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 2n+(2n-4) & 4+(2n-4) & \cdots & 4+(2n-4) & 2n+(2n-4) \\ 4+(2n-4) & 4 & \cdots & 4 & 4+(2n-4) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 4+(2n-4) & 4 & \cdots & 4 & 4+(2n-4) \\ 2n+(2n-4) & 4+(2n-4) & \cdots & 4+(2n-4) & 2n+(2n-4) \end{pmatrix} \\ &= 2A^2 + (2n-4)A \end{aligned}$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^3 - 2X^2 - (2n-4)X = X.[X^2 - 2X - (2n-4)]$$

et le spectre de A s'en déduit facilement.

Mais quel rapport avec la première question ?

❧ Il est clair que le rang de la matrice A est égal à 2 : les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et toutes les autres colonnes sont égales à l'une de ces deux colonnes.

Comme $n \geqslant 3$, alors 0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé est un sous-espace de dimension $(n-2)$. Plus précisément, une base à peu près évidente de $\operatorname{Ker} A$ est

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

c'est-à-dire (en faisant appel à la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(E_1 - E_n, \underbrace{E_2 - E_3, \dots, E_2 - E_i, \dots, E_2 - E_{n-1}}_{(n-3) \text{ vecteurs}})$$

✍ *Il est plus simple de donner une caractérisation cartésienne de ce sous-espace propre :*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} A &= [x_1 + \cdots + x_n = 0] \cap [x_1 + x_n = 0]\\ &= [x_1 + x_n = 0] \cap [x_2 + \cdots + x_{n-1} = 0]\end{aligned}$$

mais l'énoncé demande les vecteurs propres et pas seulements les sous-espaces propres.

❧ En considérant très provisoirement A comme une matrice complexe, on peut appliquer le résultat établi à la première question ! En effet, le spectre de A est

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-2)}\}$$

donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \operatorname{tr} A^2 = 4n - 4.$$

Or $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$, donc

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 &= 2\\ \lambda_1\lambda_2 &= 4 - 2n\end{cases}$$

ce qui prouve que λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme

$$X^2 - 2X + (4 - 2n)$$

et donc que

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Nous allons nous passer de ces valeurs et calculer simultanément les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 en écrivant ces deux valeurs propres sous la forme $1 + \alpha$.

Il s'agit donc de résoudre le système

$$AX = (1 + \alpha)X$$

sachant que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle (puisque $1 + \alpha$ est une valeur propre simple).

Pour $2 \leqslant i < n$, on obtient

$$x_1 + x_n = (1 + \alpha)x_i$$

et comme $1 + \alpha \neq 0$, on en déduit que

$$x_2 = \cdots = x_{n-1}$$

et nous allons utiliser x_2 comme un paramètre pour exprimer les autres coordonnées.

La première équation nous donne alors

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 + \alpha x_1$$

c'est-à-dire

$$\alpha x_1 - x_n = (n-2)x_2.$$

La dernière équation est inutile puisque la matrice $[A - (1+\alpha)I_n]$ n'est pas inversible.

Bref, il s'agit en fait de résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_n = (n-2)x_2 \\ x_1 + x_n = (1+\alpha)x_2 \end{cases}$$

en fonction du paramètre x_2 : on applique les formules de Cramer et on en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $1+\alpha$ ont pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{(n-2)+(1+\alpha)}{1+\alpha} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\alpha(1+\alpha)-(n-2)}{1+\alpha} \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \end{pmatrix}$$

puisque $\alpha^2 = 2n-3$.

✍ *Et si $1+\alpha$ n'était pas valeur propre ? Dans ce cas, la dernière équation viendrait compléter ces calculs et nous devrions imposer $x_2 = 0$ pour éviter toute contradiction. Le vecteur nul serait donc la seule solution...*

✍ *Il est bon de conclure en remarquant que la matrice A est symétrique réelle et qu'on n'est donc pas surpris de constater qu'elle est diagonalisable !*

Bien que pertinente, cette remarque n'apporte aucune aide dans les calculs à mener ici...

On peut aussi préciser que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qui est assez facile à vérifier sur les bases qu'on en a données. Le seul calcul à poser est le suivant (pour vérifier l'orthogonalité des sous-espaces propres associés à $1 \pm \alpha$) :

$$2\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{n-1-\alpha}{1-\alpha} + (n-2) = 2\frac{(n-1)^2 - \alpha^2}{1-\alpha^2} + (n-2) = 0$$

puisque $\alpha^2 = 2n-3$.

✍ *On peut aussi calculer le polynôme caractéristique de A. On suivra une tradition typographique bien établie : les coefficients nuls ne seront pas écrits.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$, aucune importance !)

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & & -\lambda & 1 \\ \lambda & & & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (L_n \leftarrow L_n - L_1)$$

On factorise la dernière ligne par $-\lambda$ et on continue :

$$\det(A-\lambda I_n) = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 2 & & -\lambda & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 + C_n)$$

On développe par la dernière ligne et (astuce !) on multiplie la première ligne par λ :

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_n) &= -\begin{vmatrix} \lambda(2-\lambda) & \lambda & \cdots & \lambda \\ 2 & -\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 2 & & & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} \lambda(2-\lambda)+2(n-2) & & & \\ 2 & -\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 2 & & & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \\ &= -(-\lambda)^{n-2}\big[\lambda(2-\lambda)+2(n-2)\big] \end{aligned}$$

et par conséquent le polynôme caractéristique de A est

$$X^{n-2}[X^2 - 2X - 2n + 4].$$

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = AM.$$

1. *Démontrer que f_A est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Démontrer que : si $A^2 = A$, alors f_A est un projecteur.*
3. *Démontrer que A est diagonalisable si, et seulement si, f_A est diagonalisable.*
4. *Construire une matrice propre de f_A à l'aide d'un vecteur propre de A.*
5. *Construire un vecteur propre de A à l'aide d'une matrice propre de f_A.*

1. Par bilinéarité de la multiplication matricielle

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

l'application f_A est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si $A^2 = A$, alors

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad (f_A \circ f_A)(M) = A(AM) = A^2M = AM = f_A(M)$$

donc f_A est un projecteur de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. En généralisant le calcul précédent (récurrence + combinaison linéaire), on constate que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad P(f_A)(M) = P(A)M. \tag{26}$$

❧ Si P est un polynôme annulateur de A, alors la relation (26) montre que $P(f_A)$ est l'endomorphisme nul de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et donc que P est aussi un polynôme annulateur de f_A.

❧ Réciproquement, si P est un polynôme annulateur de f_A, alors $P(A)M$ est la matrice nulle quelle que soit la matrice M et en particulier $P(A) = 0_n$ (pour $M = I_n$!). Donc P est aussi un polynôme annulateur de A.

❧ En conclusion, la matrice A et l'endomorphisme f_A ont le même idéal annulateur et par suite, elles ont le même polynôme minimal.

Or une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable si, et seulement si, f_A est diagonalisable.

✍ *On aurait pu répondre à cette question en comparant les sous-espaces propres de A aux sous-espaces propres de f_A. Mais pour cela, il aurait fallu traiter les questions suivantes au préalable !*

Pour aborder les questions de cet exercice dans l'ordre où elles sont posées (ce qui est le choix de l'examinateur), il faut donc pouvoir caractériser les matrices/endomorphismes diagonalisables sans connaître leurs valeurs propres et les sous-espaces propres : il ne reste donc que le polynôme minimal !

4. Si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$, alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

n'est pas la matrice nulle et

$$f_A(M) = AM = \begin{pmatrix} AX & AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda M$$

donc M est bien un vecteur propre de f_A associé à λ. Par conséquent, λ est aussi une valeur propre de f_A.

✍ *Plus subtilement, si X^i est un vecteur propre de A associé à λ_i, alors la famille des matrices définies par*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad X^i_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème colonne}}}{X^i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est une famille libre *de vecteurs propres de f_A associés à λ_i.*

❧ Réciproquement, si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas la matrice nulle et si $AM = \lambda M$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad AC_j = \lambda C_j$$

et comme l'une des colonnes C_j au moins n'est pas la colonne nulle, on en déduit que λ est aussi une valeur propre de A.

$\boxed{5.}$ D'après les deux dernières questions,

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$$

(par double inclusion).

✍ *Plus précisément, si*

$$(X^1, \dots, X^n)$$

est une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs propres de* A*, la famille*

$$(X^i_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est une famille libre *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *constituée de* n^2 *vecteurs propres de* f_A *et donc une base de vecteurs propres de* f_A.

On pouvait donc démontrer, sans recourir au polynôme minimal, que : si A *est diagonalisable, alors* f_A *est diagonalisable.*

On pourrait aussi établir la réciproque de manière analogue, mais la démonstration est plus embrouillée (il s'agit d'extraire une famille libre de n *colonnes d'une famille libre de* n^2 *matrices).*

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
2. *Étudier la continuité de* f.
3. *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$.
4. *Démontrer que* f *tend vers une limite finie* ℓ *au voisinage de* $+\infty$*, puis déterminer un équivalent de* $f(x) - \ell$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.
5. *Étudier les variations de* f.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

❧ Pour $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (divergence grossière de la série).

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(0)$$

et comme

$$u_n(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et que la série $\sum {}^1\!/\!{}_{n^2}$ est convergente, la série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$.

La somme f de la série de fonctions est donc définie sur $[0, +\infty[$.

2. Chaque fonction u_n est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+$. On a vu à la question précédente que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Chaque fonction u_n est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Par conséquent, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant n^{k-2} e^{-na}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et comme $a > 0$,

$$\frac{(n+1)^{k-2} e^{-(n+1)a}}{n^{k-2} e^{-na}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a} < 1$$

donc ce majorant est le terme général d'une série convergente (règle de D'Alembert).

On vient donc de démontrer que, pour tout $k \geqslant 1$, la série des dérivées $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Par conséquent, la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et comme cela vaut pour tout $a > 0$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

On sait de plus que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

(Le terme en $n = 0$ est constant, donc ses dérivées sont nulles).

✍ *Et en 0 ? On sait que* f *est continue sur* $[0, +\infty[$ *et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0, +\infty[$*. De plus, pour tout* $N \geqslant 1$,

$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Comme la série

$$\sum \frac{-n}{n^2+1}$$

est divergente, pour tout $A > 0$*, on peut choisir* $N = N(A) \in \mathbb{N}$ *assez grand pour que*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} \leqslant -A-1.$$

Or la somme

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$$

est une expression continue sur $\mathbb{R}$ *en tant que fonction de* x *(puisqu'il n'y a qu'un nombre* FINI *de termes et que chaque terme est continu). En particulier,*

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} < -A$$

donc il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leqslant -A.$$

et par conséquent tel que

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad f'(x) \leqslant -A.$$

Cela nous montre que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty.$$

Comme f *est continue en* 0*, on peut en déduire que le graphe de* f *admet une* ***tangente verticale*** *au point d'abscisse* $x = 0$*.*

4. Puisque la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$ et que chaque fonction u_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, le Théorème de la double limite nous assure que la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} u_0(x) = 1 \quad \text{et que} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0.$$

► Pour trouver un équivalent de

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit de détailler la somme :

$$f(x) = 1 + u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x).$$

Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 2, \forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{e^{-2x}}{n^2+1}$$

et donc que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \leqslant e^{-2x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2x})$$

et donc que

$$f(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{2} + o(e^{-x}) \sim \frac{e^{-x}}{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ La fonction f est positive (somme d'une série de fonctions positives) et décroissante (somme d'une série de fonctions décroissantes, ce qui est confirmé par le fait que la dérivée est la somme d'une série de fonctions négatives).

De plus, la fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$, puisqu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est la somme d'une série de fonctions positives.

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc en fait convexe sur $[0, +\infty[$ tout entier (par densité).

On a toutes les informations nécessaires pour tracer le graphe de f de manière assez précise...

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = & y - z \\ y' = & 2x + y + z \\ z' = & -2x - y - z \end{cases}$$

MÉTHODE PHYSICIENNE.—

❧ On remarque l'existence d'une intégrale première simple : comme

$$(y' + z') = 0$$

alors la fonction $y + z$ est constante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) + z(t) = y_0 + z_0.$$

❧ On en déduit que

$$x'' = y' - z' = 4x + 2(y_0 + z_0).$$

Par conséquent, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A \operatorname{ch} 2t + B \operatorname{sh} 2t - \frac{y_0 + z_0}{2}.$$

❧ On en déduit alors que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = [A \operatorname{sh} 2t + B \operatorname{ch} 2t - (y_0 + z_0)t] + [(y_0 + z_0)t] + C_y$$

(en intégrant la seconde équation différentielle, connaissant $x(t)$ et la somme $y(t) + z(t)$) et aussi que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = [-A \operatorname{sh} 2t - B \operatorname{ch} 2t + (y_0 + z_0)t] - [(y_0 + t_0)t] + C_z.$$

Finalement, les fonctions x, y et z s'expriment

$$\begin{aligned} x(t) &= A \operatorname{ch} 2t + B \operatorname{sh} 2t - \frac{y_0 + z_0}{2}, \\ y(t) &= A \operatorname{sh} 2t + B \operatorname{ch} 2t + (y_0 - B), \\ z(t) &= -A \operatorname{sh} 2t - B \operatorname{ch} 2t + (z_0 + B). \end{aligned}$$

VERSION MATHÉMATICIENNE.—

La matrice du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X(X-2)(X+2)$. La matrice M est donc diagonalisable et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice inversible telle que

$$P^{-1}MP = \operatorname{Diag}(0, 2, -2).$$

Par conséquent, en posant $U_t = P^{-1}X_t$, on est ramené à

$$U'_t = \operatorname{Diag}(0, 2, -2).U_t$$

et il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$U_t = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$X_u = PU_t = \begin{pmatrix} K_1 + K_2e^{2t} + K_3e^{-2t} \\ -K_1 + K_2e^{2t} - K_3e^{-2t} \\ -K_1 - K_2e^{2t} + K_3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

On trouve bien les mêmes solutions, sous une forme un peu différente :

$$K_1 = -\frac{y_0 + z_0}{2}, \quad K_2 = \frac{A+B}{2}, \quad K_3 = \frac{A-B}{2}.$$

✍ *On peut vérifier que les intégrales premières du système correspondent aux vecteurs propres de la matrice* $M^\top$.

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, *on pose*

$$M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Démontrer que les matrices* $M(a, b, c)$ *commutent entre elles.*

2. *Démontrer que* J *est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$*. Préciser ses éléments propres.*

3. *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$*. Démontrer que* $M(a, b, c)$ *est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.*

1. Comme la sous-algèbre $\mathbb{C}[J]$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est commutative, les matrices $M(a, b, c)$ (qui sont toutes des polynômes en J) commutent entre elles.

✍ *Comme* $J^3 = I_3$*, alors* $\mathbb{C}[J] = \mathrm{Vect}(I_3, J, J^2)$*. Mais cela ne sert à rien pour répondre à la question !*

2. Comme $J^3 = I_3$ et que le polynôme annulateur

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice J est diagonalisable.

❧ Considérons une valeur propre λ de J et une colonne propre

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

associée à cette valeur propre. On a alors

$$JX = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc

$$b = \lambda a \quad \text{et} \quad c = \lambda b = \lambda^2 a.$$

✍ *On a aussi* $a = \lambda^3 a$ *sur la troisième ligne, mais comme* λ *est une racine cubique de l'unité, c'est sans importance !*

❧ Comme $j^4 = j$, les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de J associés respectivement aux valeurs propres 1, j et j^2.

❧ Comme $J \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes, ce sont des valeurs propres simples et les sous-espaces propres sont donc des droites.

Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(J - I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(J - jI_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(J - j^2 I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

3. D'après la question précédente, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

la matrice P est inversible et

$$P^{-1}JP = \mathrm{Diag}(1, j, j^2).$$

On en déduit que

$$P^{-1}J^2P = \mathrm{Diag}(1, j^2, j)$$

et donc que

$$P^{-1}M(a, b, c)P = \mathrm{Diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj).$$

Autrement dit, la base de vecteurs propres qu'on a trouvée pour J est une base de vecteurs propres pour chacune des matrices $M(a, b, c)$ et

$$\mathrm{Sp}\big(M(a, b, c)\big) = \big\{a + b + c,\ a + bj + cj^2,\ a + bj^2 + cj\big\}.$$

✍ *La même démarche peut s'appliquer en dimension n, avec les racines n-ièmes de l'unité (et toujours une matrice de Vandermonde en guise de matrice de passage vers une base de vecteurs propres).*

rms130-1142

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle\, f \,|\, g\,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

1. *Démontrer que $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur E.*

2. *On pose $f_0 = [t \mapsto 1]$ et $f_1 = [t \mapsto t]$ et on note F, le sous-espace de E engendré par f_0 et f_1.*

2. a. *Démontrer que* $\dim F = 2$.

2. b. *Calculer $\langle\, f_0 \,|\, f_1\,\rangle$.*

3. *L'application $g = [t \mapsto e^t]$ appartient-elle à F ?*

4. *Calculer le projeté orthogonal de g sur F.*

5. *En déduire*

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2\,dt.$$

1. Comme le produit fg est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, l'intégrale $\langle\, f \,|\, g\,\rangle$ est bien définie. Donc $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Cette application est évidemment symétrique et elle est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).

Si $f = g$, alors la fonction intégrande f^2 est positive. Comme les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle\, f \,|\, f\,\rangle$ est positive.

Si $\langle\, f \,|\, f\,\rangle = 0$, alors on a une fonction continue et positive dont l'intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. Donc $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et par conséquent $f = 0_E$.

L'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est donc un produit scalaire sur E.

2. a. Le sous-espace F est engendré par deux vecteurs, donc sa dimension est inférieure à 2.

Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre et par conséquent $\dim F = 2$.

2. b. Comme $f_0 f_1$ est une fonction continue et impaire, son intégrale sur le segment $[-1, 1]$ est nulle (ce segment admet l'origine pour centre de symétrie).

Les deux vecteurs f_0 et f_1 sont donc orthogonaux.

3. Toute fonction $f \in F$ est une fonction affine. En particulier, sa dérivée seconde est nulle. Comme la dérivée seconde de g n'est pas nulle, $g \notin F$.

4. Puisqu'on connaît une base orthogonale de F, le projeté de g sur F est le vecteur h défini par

$$h = \frac{\langle\, g \,|\, f_0\,\rangle}{\|f_0\|^2} \cdot f_0 + \frac{\langle\, g \,|\, f_1\,\rangle}{\|f_1\|^2} \cdot f_1.$$

Or

$$\|f_0\|^2 = 2, \quad \|f_1\|^2 = \frac{2}{3}, \quad \langle\, g \,|\, f_0\,\rangle = e - e^{-1}, \quad \langle\, g \,|\, f_1\,\rangle = 2e^{-1}$$

puisque

$$\int^x te^t\,dt = [te^t]^x - \int^x e^t\,dt = (x-1)e^x.$$

Ainsi, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$h(t) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t.$$

5. Il s'agit de calculer le minimum de

$$\|g - (af_0 + bf_1)\|^2.$$

On sait que ce minimum existe, qu'il est atteint seulement pour $af_0 + bf_1 = h$ et qu'il est égal à

$$\langle\, g - h \,|\, g\,\rangle = \|g\|^2 - \frac{e - e^{-1}}{2}\langle\, g \,|\, f_0\,\rangle - 3e^{-1}\langle\, g \,|\, f_1\,\rangle = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{(e - e^{-1})^2}{2} - 6e^{-2} = 1 - 7e^{-2}.$$

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. Étant donnés un vecteur unitaire a et un réel k, on définit l'application f en posant

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x + k \langle x \,|\, a \rangle \cdot a.$$

1. *Démontrer que f est un endomorphisme de E.*

2. *Démontrer que*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f(y) \rangle.$$

3. *Pour quels $k \in \mathbb{R}$ l'application f est-elle inversible ?*

4. *Exprimer $(f \circ f)(x)$ en fonction de $f(x)$ et de x.*

5. *Déterminer les éléments propres de f.*

1. L'application $[x \mapsto k \langle x \,|\, a \rangle \cdot a]$ est linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire) et c'est une application de E dans E. Comme l'identité $[x \mapsto x]$ est aussi un endomorphisme de E, on en déduit que f est un endomorphisme de E.

2. Soient x et y dans E.

Comme $k \langle x \,|\, a \rangle \in \mathbb{R}$ et que le produit scalaire est linéaire à gauche,

$$\langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, y \rangle + k \langle x \,|\, a \rangle \langle a \,|\, y \rangle.$$

De même, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle x \,|\, f(y) \rangle = \langle x \,|\, y \rangle + k \langle y \,|\, a \rangle \langle x \,|\, a \rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$k \langle y \,|\, a \rangle \langle x \,|\, a \rangle = k \langle a \,|\, y \rangle \langle x \,|\, a \rangle = k \langle x \,|\, a \rangle \langle a \,|\, y \rangle,$$

ce qui prouve que l'endomorphisme f est bien auto-adjoint.

3. Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que f est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$f(x) = x + k \langle x \,|\, a \rangle \cdot a = 0_E$$

donc $x = -k \langle x \,|\, a \rangle \cdot a$. On en déduit que le vecteur x est nécessairement colinéaire au vecteur a et donc que $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R} \cdot a$.

Or $f(a) = (1 + k\|a\|^2) \cdot a = (1 + k) \cdot a$ puisque a est un vecteur unitaire.

Deux cas se présentent :

— si $k = -1$, alors $a \in \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot a \neq \{0_E\}$;

— si $k \neq -1$, alors $a \notin \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Par conséquent, l'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $k \neq -1$.

4. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f\big(x + k \langle x \,|\, a \rangle \cdot a\big) \\ &= f(x) + k \langle x \,|\, a \rangle \cdot f(a) \\ &= f(x) + (1+k)\big[k \langle x \,|\, a \rangle \cdot a\big] \\ &= f(x) + (1+k)\big[f(x) - x\big] = (2+k) \cdot f(x) - (1+k) \cdot x.\end{aligned}$$

✍ *On déduit de cette relation que le polynôme*

$$X^2 - (2+k)X + (1+k) = (X-1)(X-1-k)$$

est un polynôme annulateur de f.

5. Comme f est symétrique, il est diagonalisable (Théorème spectral) et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

On a déjà remarqué que $f(a) = (1+k) \cdot a$, donc a est un vecteur propre (unitaire, donc *non nul*) associé à la valeur propre $(1+k)$.

Si x est orthogonal à a, alors $f(x) = x = 1 \cdot x$, donc 1 est aussi une valeur propre de f. On distingue à nouveau deux cas.

— Si $k = 0$, alors $f = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$.
— Si $k \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 1+k\}$ et les sous-espaces propres associés à 1 et à $(1+k)$ sont respectivement la droite $\mathbb{R} \cdot a$ et l'hyperplan $(\mathbb{R} \cdot a)^{\perp}$.

✍ *Un endomorphisme est inversible si, et seulement si, son spectre ne contient pas* 0*. On a ainsi retrouvé le fait que* f *était inversible si, et seulement si,* $k \neq -1$*.*

✍ *Comme* f *est diagonalisable et qu'il admet* 1 *et* $1+k$ *pour valeurs propres, on en déduit que, si* $k \neq 0$*, alors son polynôme minimal est égal à* $(X-1)(X-1-k)$*.*

Pour $k = 0$*, son polynôme minimal est évidemment* $X - 1$*.*

rms130-1284

1. *Déterminer les racines complexes du polynôme*

$$X^n - 1.$$

2. *En déduire la factorisation de* $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ *dans* $\mathbb{C}[X]$.

3. *En déduire que*

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

1. Les racines du polynôme $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \zeta_k = \exp \frac{2ik\pi}{n}.$$

On sait que ces n racines sont deux à deux distinctes et donc de multiplicité 1. Par conséquent,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \zeta_k).$$

2. D'après la formule de la somme géométrique,

$$X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$

et d'après la factorisation précédente,

$$\prod_{0 \leqslant k < n} (X - \zeta_k) = (X - \zeta_0)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$

donc, en simplifiant par $(X - \zeta_0)$,

$$\sum_{0 \leqslant k < n} X^k = \prod_{1 \leqslant k < n} (X - \zeta_k).$$

✍ *L'anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes étant intègre, on peut simplifier par n'importe quel polynôme différent du polynôme nul.*

3. En évaluant l'égalité précédente en 1, on obtient

$$n = \prod_{1 \leqslant k < n} (1 - \zeta_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{i0} - e^{ik\theta})$$

en posant $\theta = {}^{2\pi}/_{n}$. On factorise par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
n &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\theta/2} \Big(-2i \sin \frac{k\theta}{2} \Big) \\
&= (-2i)^{n-1} \exp\Big(i\pi \, \frac{1 + \cdots + (n-1)}{n} \Big) \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n} \\
&= (-2i)^{n-1} \exp\Big(\frac{i(n-1)\pi}{2} \Big) \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n} \\
&= (-2i)^{n-1} i^{n-1} \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Soit f*, l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *représenté par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. *On considère les vecteurs* $\varepsilon_1 = (1, 1)$ *et* $\varepsilon_2 = (2, 1)$.

1. a. *Démontrer que* $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

1. b. *Donner la matrice de passage* P *de la base canonique vers la base* $\mathscr{B}$.

1. c. *Quelle est la matrice de* f *dans la base* $\mathscr{B}$ *?*

2. *On suppose que l'endomorphisme* $g \in L(\mathbb{R}^2)$ *vérifie*

$$g \circ g = f.$$

2. a. *Démontrer que* $g \circ f = f \circ g$.

2. b. *Vérifier que*

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \textit{et que} \quad \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

2. c. *En déduire que la matrice de* g *relative à la base* $\mathscr{B}$ *est diagonale.*

3. *Résoudre l'équation* $M^2 = A$ *dont l'inconnue est une matrice* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. a. Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas proportionnels, donc la famille $\mathscr{B}$ est libre. En tant que famille libre de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension deux, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

1. b. Par définition, la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$ s'obtient en écrivant en colonne les décompositions des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base canonique, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. c. Il s'agit de calculer $f(\varepsilon_1)$ et $f(\varepsilon_2)$. Dans la base canonique,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que $f(\varepsilon_1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2$ et que $f(\varepsilon_2) = 0 \cdot \varepsilon_1 + 4 \cdot \varepsilon_2$. Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

✍ *D'après la formule de changement de base, on a aussi*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}AP.$$

Mais pour appliquer cette formule, il faut déjà calculer

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. a. D'après l'hypothèse sur g et la commutativité des itérés d'un endomorphisme,

$$f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f.$$

2. b. On travaille dans la base canonique :

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f - \operatorname{Id}) = A - I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f - 4\operatorname{Id}) = A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de rang 1. D'après le Théorème du rang, leurs noyaux sont des sous-espaces de dimension 1 et comme on sait que $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker}(f \operatorname{Id})$ et que $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$, on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1, \qquad \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

2. c. Il s'agit de calculer, autant que possible, les vecteurs $g(\varepsilon_1)$ et $g(\varepsilon_2)$ et plus précisément de vérifier que $g(\varepsilon_k)$ est proportionnel à ε_k pour $k \in \{1, 2\}$.

D'après la question précédente, il suffit de vérifier que

$$g(\varepsilon_1) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \quad \text{et que} \quad g(\varepsilon_2) \in \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}).$$

Or, comme f et g commutent,

$$\begin{aligned}(f - \operatorname{Id})\big[g(\varepsilon_1)\big] &= (f \circ g)(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1)\\ &= (g \circ f)(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) = g(1 \cdot \varepsilon_1) - g(\varepsilon_1)\\ &= 0_E\end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned}(f - 4\operatorname{Id})\big[g(\varepsilon_2)\big] &= (f \circ g)(\varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2)\\ &= (g \circ f)(\varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) = g(4 \cdot \varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2)\\ &= 0_E\end{aligned}$$

Cela prouve que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale.

✍ *Comme f et g commutent, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Comme ces sous-espaces propres sont des droites, les vecteurs qui dirigent ces droites sont nécessairement des vecteurs propres de g. La base $\mathscr{B}$ est donc une base de vecteurs propres pour f **et** pour g : ces endomorphismes sont dits* co-diagonalisables.

3. Si $M^2 = A$, alors l'endomorphisme g représenté dans la base canonique par la matrice M vérifie $g \circ g = f$. D'après ce qui précède, il existe α et β tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

et comme $g \circ g = f$, alors

$$\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

et donc $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 4$.

❧ Réciproquement, quels que soient les scalaires α et β tels que $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$,

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^2 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

ce qui prouve que l'endomorphisme g tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

vérifie $g \circ g = f$ et donc que

$$\left(P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}P^{-1}\right)^2 = A.$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement quatre solutions :

$$P\begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 2\end{pmatrix}P^{-1}$$

soit

$$\pm\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

✍ *Comme l'anneau $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas intègre, il est normal qu'une équation du second degré admette plus de deux solutions.*

rms130-1289

On considère l'application f *définie par*

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P - P'.$$

1. *Démontrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[X]$.

2. *Quelle est l'image de la base canonique de* $\mathbb{R}[X]$ *par* f ?

3. *Démontrer que* f *est un automorphisme de* $\mathbb{R}[X]$.

4. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, le sous-espace* $\mathbb{R}_n[X]$ *est stable par* f.

5. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

5. a. *Démontrer qu'il existe un unique polynôme*

$$P \in \mathbb{R}_n[X]$$

tel que $f(P) = Q$.

5. b. *Calculer* $f(P')$, $f(P'')$, ..., $f(P^{(n)})$ *en fonction de* P.

5. c. *En déduire le polynôme* Q.

1. Par linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$, l'application f est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Il est clair que $f(1) = 1$ (vecteur propre !) et que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad f(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est clair que $\deg f(X^k) = k$, donc la famille $\big(f(X^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (échelonnée en degré).

Comme l'image par f d'une base de $\mathbb{R}[X]$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, on peut conclure que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

4. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que $\deg(P') \leqslant \deg P$ et donc

$$\deg f(P) = \deg(P - P') \leqslant \deg P.$$

En particulier, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg f(P) \leqslant \deg P \leqslant n$$

donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui prouve que le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

5. a. On peut donc considérer f comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie. D'après la question précédente, cet endomorphisme est injectif et donc, d'après le Théorème du rang, il réalise une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un, et un seul, polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$.

✍ *Il serait bon d'évoquer ici l'endomorphisme* f_n *induit par restriction de* f *au sous-espace stable* $\mathbb{R}_n[X]$ — *car c'est bien de lui qu'on parle ici.*

La matrice de cet endomorphisme relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ *est une matrice triangulaire de* $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à* 1*. Cette matrice est donc inversible (ce qui n'est pas une surprise), mais elle n'est pas diagonalisable (car elle est distincte de* I_{n+1}*).*

5. b. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(P^{(k)}) = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

En particulier, comme $\deg P \leqslant n$, on a $f(P^{(n)}) = P^{(n)}$ et $f(P^{(k)}) = 0$ pour tout $k > n$.

5. c. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}
P &= P^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n} \big(P^{(k)} - P^{(k+1)}\big) && \text{(par télescopage)}\\
&= 0 + \sum_{k=0}^{n} f(P^{(k)}) && \text{(car } \deg P \leqslant n\text{)}\\
&= f\Big(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\Big) && \text{(par linéarité de } f\text{)}
\end{aligned}$$

Comme f est injective, on en déduit que l'unique antécédent de P par f est le polynôme

$$Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Quel est le rang de* M *?*

2. *La matrice* M *est-elle inversible ?*

3. *Quelle est la dimension du noyau de* M *? Donner une base de ce sous-espace.*

4. *Calculer* M^2 *et* M^3. *En déduire un polynôme annulateur de* M.

5. *Déterminer les éléments propres de* M. *La matrice* M *est-elle diagonalisable ?*

1. Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de M est au moins égal à 2. Les quatre premières colonnes sont égales, donc le rang de M est au plus égal à 2. Le rang de M est donc égal à 2.

2. On sait qu'une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son rang est égal au nombre de ses colonnes (Théorème du rang). D'après la question précédente, $\operatorname{rg} M < 5$, donc M n'est pas inversible.

3. D'après le Théorème du rang, le nombre de colonnes d'une matrice est la somme du rang de cette matrice et de la dimension de son noyau. Par conséquent,

$$\dim \operatorname{Ker} M = 5 - 2 = 3.$$

Il reste à trouver une famille libre de trois vecteurs dans $\operatorname{Ker} M$.

On connaît trois relations de liaison évidentes entre les colonnes de M :

$$C_1 - C_2 = C_2 - C_3 = C_3 - C_4 = 0.$$

Par conséquent, le noyau de M contient les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme ces trois vecteurs forment clairement une famille libre (les colonnes sont échelonnées), on a trouvé une base de $\operatorname{Ker} M$.

4. On trouve :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$M^3 - M^2 = 4M.$$

Autrement dit, la matrice M admet pour polynôme annulateur

$$X^3 - X^2 - 4X = X(X^2 - X - 4) = X(X - \alpha)(X - \beta)$$

avec

$$\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

✍ *Pour la matrice* M, *c'est un polynôme annulateur unitaire. D'après la matrice* M^2, *la matrice* M *n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur à 2, donc ce polynôme annulateur est en fait le polynôme minimal de* M.

5. La matrice M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

✍ *Par ailleurs, on a calculé son polynôme minimal, qui est bien scindé à racines simples.*

❧ Les valeurs propres de M sont les racines de son polynôme minimal, donc

$$\mathrm{Sp}(M) = \{0, \alpha, \beta\}$$

et on a déjà calculé une base du sous-espace propre $\operatorname{Ker} M$.
❧ Comme M est diagonalisable,

$$5 = \dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Ker}(M - \alpha I_5) + \dim \operatorname{Ker}(M - \beta I_5)$$

et comme α et β sont des valeurs propres de M,

$$\dim \operatorname{Ker}(M - \alpha I_5) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(M - \beta I_5) \geqslant 1.$$

Par conséquent, les deux sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(M - \alpha I_5)$ et $\operatorname{Ker}(M - \beta I_5)$ sont des droites vectorielles.
❧ Comme d'habitude en pareil cas, on va caractériser les deux sous-espaces propres par un seul calcul, puisqu'il sont dirigés par des vecteurs "conjugués".
Analyse — Pour $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(M - \lambda I_5)$$

équivaut à

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il **faut** donc que

$$x_5 = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \lambda x_4$$

c'est-à-dire qu'il existe un scalaire $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Synthèse — Comme λ est une valeur propre de M et que le sous-espace propre associé à λ est une droite, il est inutile d'aller plus loin ! Pour $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$,

$$\operatorname{Ker}(M - \lambda I_5) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

✍ *En exploitant la cinquième ligne de la matrice, on aurait obtenu la relation*

$$4 + \lambda = \lambda^2,$$

c'est exactement ce que dit le polynôme minimal de M !

✍ *La matrice M est symétrique réelle et le Théorème spectral nous assure que les sous-espaces propres de M sont deux à deux orthogonaux. On le vérifie facilement en tenant compte du fait que $\alpha\beta = -4$ (d'après le polynôme minimal).*

rms130-1320

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$*, une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien* E*. On suppose que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2.$$

1. *Démontrer que* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille orthogonale de* E*.*

2. *Soit* $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^{\perp}$*. Démontrer que* $x = 0_E$*.*

3. *Démontrer que* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de* E*.*

1. Prenons $x = e_j$: comme e_j est unitaire,

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2$$

et donc

$$\sum_{i \neq j} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle = 0.$$

La famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est donc orthogonale.

2. Si x est orthogonal au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, alors en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle = 0$$

et donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Par conséquent $x = 0_E$.

3. On sait maintenant que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthonormée, et donc libre.

Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

et on a démontré que $F^{\perp} = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = F$, ce qui prouve que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi une famille génératrice de E.

Finalement, la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.

✍ *On a démontré en particulier que* $\dim E = n$*.*

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A.A^\top.A = I_n$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Démontrer que* A *est symétrique.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Démontrer que* $A = I_n$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme A est une matrice carrée et que

$$A.(A^\top.A) = I_n,$$

la matrice A est inversible et $A^{-1} = A^\top.A$. En particulier, A^{-1} est une matrice symétrique, donc $A = (A^{-1})^{-1}$ est aussi une matrice symétrique.

✍ *On doit savoir que l'inverse d'une matrice inversible et symétrique est aussi une matrice symétrique.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ Comme A est symétrique, l'équation devient $A^3 = I_n$. La matrice A admet donc

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

pour polynôme annulateur. Mais la matrice A est symétrique et réelle, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles (Théorème spectral). En particulier, son polynôme minimal est un diviseur unitaire, scindé, à racines réelles simples du polynôme annulateur $X^3 - 1$: le polynôme minimal de A est donc $(X-1)$, ce qui prouve que $A = I_3$.

rms130-1332

> *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{R})$, *une matrice telle que*
> $$A^2 + A^\top = I_n.$$
> **1.** *Démontrer que* $A = I_n - (A^\top)^2$.
> **2.** *En déduire que*
> $$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n.$$
> **3.** *Démontrer que* $\det(I_n - A^\top) \neq 0$. *En déduire que* $(I_n - A)$ *est inversible.*
> **4.** *Démontrer que la matrice* A *est symétrique.*

1. On part de la relation donnée, qu'on transpose :

$$I_n = I_n^\top = (A^2)^\top + (A^\top)^\top = (A^\top)^2 + A.$$

2. On remplace $A^\top$ dans cette relation par $I_n - A^2$ (selon l'hypothèse de l'énoncé) :

$$I_n = (I_n - A^2)^2 + A$$

et, par différence, on en déduit que

$$\begin{aligned}
0_n &= (I_n - A^2)^2 + (A - I_n) \\
&= (I_n - A)^2(I_n + A)^2 - (I_n - A) && (\star) \\
&= (I_n - A)\big[(I_n - A)(I_n + A)^2 - I_n\big] \\
&= (I_n - A)(A^3 + A^2 - A) && (\star) \\
&= A(I_n - A)(A^2 + A - I_n) && (\star)
\end{aligned}$$

On a utilisé plusieurs fois $(\star)$ le fait que deux polynômes en A commutent toujours, ce qui permet de factoriser facilement ou d'appliquer la formule du binôme pour développer.

Comme la matrice A est supposée inversible, on en déduit que

$$(I_n - A)(A^2 + A - I_n) = 0_n.$$

✍ *L'anneau* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *des matrices carrées n'est pas intègre, il ne suffit pas que la matrice* A *soit distincte de* 0_n *pour simplfier l'égalité !*

3. Deux polynômes en $A^\top$ commutent toujours. On peut donc déduire de la première question que :

$$A = I_n - (A^\top)^2 = (I_n - A^\top)(I_n + A^\top).$$

Par conséquent, comme A est supposée inversible,

$$\det A = \det(I_n - A^\top)\det(I_n + A^\top) \neq 0,$$

ce qui prouve que $\det(I - A^\top) \neq 0$ et donc que $(I_n - A^\top)$ est inversible.

✍ *Il est utile de retenir une propriété un peu plus générale que celle qu'on vient d'établir :* si un produit de matrices carrées est inversible, alors chaque facteur est lui-même inversible.

❧ On sait qu'une matrice et sa transposée ont même rang. Or

$$(I_n - A^\top) = (I_n - A)^\top$$

(puisque la matrice I_n est symétrique). Comme $(I_n - A^\top)$ est inversible, on en déduit que $(I_n - A)$ est inversible.

✍ *Autrement dit : le scalaire* 1 *n'est pas une valeur propre de* A.

4. Comme la matrice $(I_n - A)$ est inversible et que

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n,$$

on en déduit que

$$A^2 + A - I_n = 0_n.$$

En comparant cette égalité avec l'hypothèse de départ,

$$A = I_n - A^2 = A^\top$$

donc la matrice A est bien symétrique.

✍ *La matrice A, symétrique à coefficients réels, est donc diagonalisable (Théorème spectral).*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

1. *Tracer l'allure du graphe de f_n.*

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum f_n(x)$ est-elle convergente ?*

3. *Démontrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que*

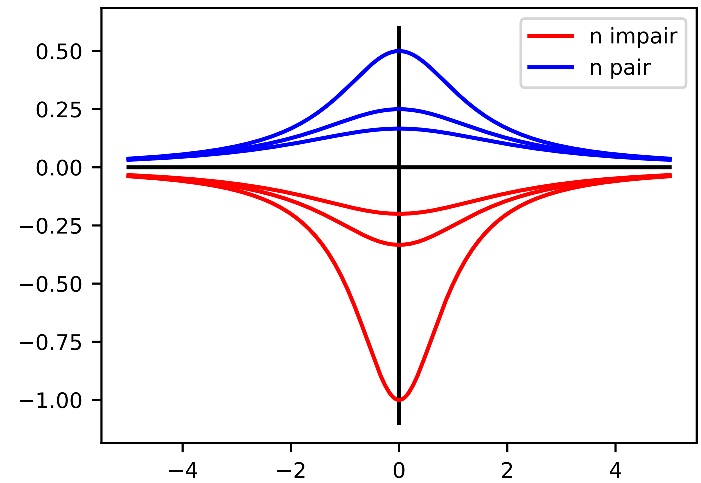
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon_n.$$

4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x)\right|.$$

Déduire M_n de l'étude des variations de f_n. La série $\sum M_n$ est-elle convergente ?

1. Pour n pair, la fonction f_n est paire et positive. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et admet une tangente horizontale en $t = 0$ (où elle atteint son maximum, égal à $1/n$).



Pour n impair, la fonction f_n est négative, mais l'allure globale de $-f_n$ est exactement celle de f_{2k}.

2. La série $\sum f_n(x)$ est alternée et $|f_n(x)|$ tend vers 0 en décroissant. D'après le Critète spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

✍ *La somme*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'application S est évidemment paire.

3. Puisque les hypothèses du Critère spécial des séries alternées sont vérifiées,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \left|f_{n+1}(x)\right| \leqslant \left|f_{n+1}(0)\right| = \frac{1}{n+1}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

✍ *Autrement dit, la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *et comme les fonctions* f_n *sont continues sur* $\mathbb{R}$*, on en déduit que la somme* S *est aussi une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*.*

4. D'après l'étude des variations de f_n, la fonction $|f_n|$ atteint son maximum en 0, donc

$$M_n = \left|f_n(0)\right| = \frac{1}{n}.$$

La série $\sum M_n$ est divergente (série harmonique).

✍ *La série de fonctions* $\sum f_n$ *ne converge donc pas normalement sur* $\mathbb{R}$ *(bien qu'elle converge uniformément sur* $\mathbb{R}$*).*

rms130-1362

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$\forall\, x > 0, \quad u_k(x) = \frac{x}{2^k} \ln \frac{x}{2^k}.$$

1. *Étudier les variations de la fonction*

$$g = [t \mapsto t \ln t]$$

et tracer l'allure de son graphe.

2. *Démontrer que, pour tout* $x > 0$, *la série* $\sum u_k(x)$ *est absolument convergente.*

3. *Pour tout* $x > 0$, *on pose*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

Simplifier l'expression $S(2x) - S(x)$.

4. *Soit* $A > 0$. *Démontrer qu'il existe un rang* $K_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall\, k \geqslant K_0,\ \forall\, x \in \,]0, A]\,, \quad \left|u_k(x)\right| \leqslant \left|u_k(A)\right|.$$

5. *On suppose que* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\forall\, x > 0, \qquad f(2x) = f(x) + x \ln x. \tag{E}$$

Exprimer f *en fonction de* $f(0)$ *et de* S. *Conclure.*

1. La fonction g est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, elle tend vers 0 au voisinage de 0 (forme indéterminée de référence). De plus,

$$\forall\, t > 0, \quad g'(t) = 1 + \ln t,$$

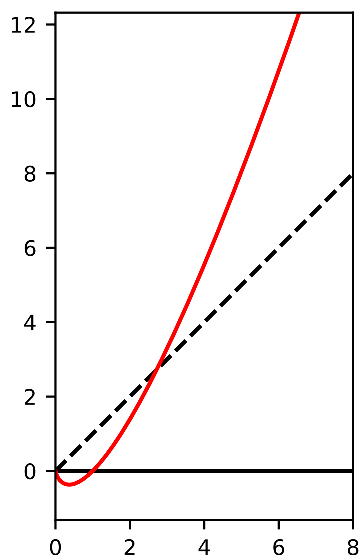
donc g est strictement décroissante sur $\left]0, e^{-1}\right]$ et strictement croissante sur $\left[e^{-1}, +\infty\right[$. Enfin,

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - 0}{t - 0} = -\infty$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty,$$

donc le graphe de g présente une tangente verticale à l'origine et une branche parabolique verticale au voisinage de l'infini.



2. Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k(x) = \frac{x}{2^k}(-k\ln 2 + \ln x)$$

donc

$$u_k(x) \underset{k\to+\infty}{\sim} \underbrace{(-x\ln 2)}_{C^{te}} \cdot \frac{k}{2^k}.$$

Par croissances comparées (de k^α avec 2^k), on en déduit que

$$u_k(x) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

et donc que la série $\sum u_k(x)$ est absolument convergente.

✍ *On peut aussi remarquer que*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} = 0 < 1$$

et conclure en appliquant la règle de D'Alembert.

3. On remarque que, pour tout $x > 0$ et tout $k \geqslant 2$,

$$u_k(2x) = g\left(\frac{2x}{2^k}\right) = g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = u_{k-1}(x).$$

Par conséquent,

$$S(2x) = u_1(2x) + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(2x) = u_1(2x) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(x) = x\ln x + S(x).$$

Donc

$$\forall\, x > 0, \qquad S(2x) - S(x) = x\ln x.$$

4. Pour $k \geqslant K_0$ (quel que soit cet entier K_0) et $0 < x \leqslant A$,

$$0 < \frac{x}{2^k} \leqslant \frac{A}{2^{K_0}} \quad \text{et} \quad |u_k(x)| = \left|g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|$$

On a étudié la fonction g plus haut : si $2^{-K_0}A \leqslant e^{-1}$, alors la fonction g est négative et décroissante sur $]0, 2^{-K_0}A]$, donc $-g$ est positive et croissante sur $]0, 2^{-K_0}A]$ et par conséquent

$$\forall\, k \geqslant K_0,\ \forall\, 0 < x \leqslant A, \quad |u_k(x)| = -g\left(\frac{x}{2^k}\right) \leqslant -g\left(\frac{A}{2^k}\right) = |u_k(A)|.$$

✍ *Comme la série $\sum u_k(A)$ est absolument convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $]0, A]$ (quel que soit $A > 0$). Les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la somme S est continue sur*

$$\bigcup_{A>0}]0, A] = \mathbb{R}_+^*.$$

De plus, toutes les fonctions u_k ont une limite finie au voisinage de 0 (cette limite est nulle), donc la convergence normale au voisinage de 0 prouve que la somme S admet elle aussi une limite finie au voisinage de 0 et que

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(Théorème d'interversion des limites).

5. D'après l'hypothèse faite sur f,

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = u_{k+1}(x)$$

et donc (sommation télescopique pour $0 \leqslant k < n$)

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x).$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0 et par composition de limites,

$$\forall\, x > 0,\quad f(x) - f(0) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x) = S(x)$$

puisque $2^{-n}x$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (le réel x restant fixé).

❧ On vient de démontrer que toute solution f continue sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation fonctionnelle (E) est nécessairement de la forme

$$\forall\, x > 0,\quad f(x) = f(0) + S(x).$$

❧ Réciproquement, quel que soit le réel C, la fonction f définie par $f(0) = C$ et par

$$\forall\, x > 0,\quad f(x) = C + S(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ (puisque S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 au voisinage de 0). De plus, cette fonction f vérifie la relation

$$\forall\, x > 0,\quad f(2x) = C + S(2x) = C + S(x) + x\,\ell n\, x = f(x) + x\,\ell n\, x,$$

donc f est bien une solution de (E) qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.

❧ On a ainsi démontré que f est une solution de (E) continue sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0,\quad f(x) = C + S(x).$$

(On rappelle que cette constante C est en fait égale à $f(0)$.)

On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt.$$

1. *Pour quels* $x \in \mathbb{R}$ *l'intégrale* $F(x)$ *est-elle bien définie ?*

2. *Calculer une primitive de*

$$\left[t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}\right]$$

en posant $t = u^2$.

3. *En déduire la valeur de* $F(1/2)$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$\varphi_x = \left[t \mapsto \frac{t^x}{1+t}\right]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

Pour $x < 0$, la fonction φ_x est continue seulement sur l'intervalle $]0,1[$. Lorsque t tend vers 0, on a $\varphi_x(t) \sim t^x$ et on sait que $[t \mapsto t^x]$ est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $x > -1$.

Par conséquent, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ au sens propre et pour tout $x > -1$ en tant qu'intégrale généralisée.

2. La fonction $u = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et avec $u = \sqrt{t}$, on a

$$du = d(\sqrt{t}) = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

D'après la formule du changement de variable, pour tout $z \in]0,+\infty[$,

$$\int^z \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt = \int^z \frac{2t}{1+t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int^{\sqrt{z}} \frac{2u^2}{1+u^2}\,du.$$

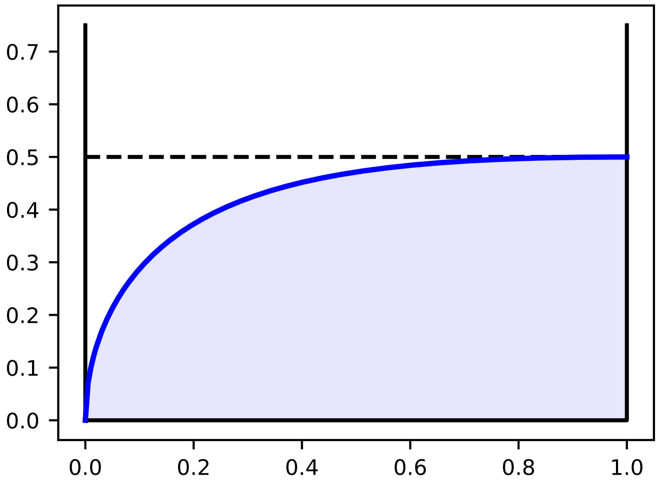
Appliquons l'Astuce taupinale :

$$\begin{aligned}\int^{\sqrt{z}} \frac{2u^2}{1+u^2}\,du = 2\int^{\sqrt{z}} \frac{(1+u^2)-1}{1+u^2}\,du &= 2\left(\int^{\sqrt{z}} du - \int^{\sqrt{z}} \frac{du}{1+u^2}\right)\\ &= 2\big(\sqrt{z} - \operatorname{Arctan}\sqrt{z}\big).\end{aligned}$$

3. Comme $\varphi_{1/2}$ est continue sur $[0,1]$,

$$F(1/2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\big[\sqrt{z} - \operatorname{Arctan}\sqrt{z}\big]_{z=\varepsilon}^{z=1} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

✍ *Comme* $\pi/2 \approx 1,57$*, la valeur de* $F(1/2)$ *est de l'ordre de* $0,43$*. Il est facile de vérifier que la fonction* $\varphi_{1/2}$ *est croissante sur* $[0,1]$ *et de voir que l'aire calculée est effectivement inférieure à* $1/2$ *et assez proche de* $1/2$*.*


0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

> *Démontrer que*
> $$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

La fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \qquad f(t) = \frac{\ell n\, t}{1+t^2}$$

est évidemment continue sur l'intervalle $]0,1]$. De plus, $f(t) \sim \ell n\, t$ lorsque t tend vers 0, donc la fonction f est intégrable au voisinage de 0 et donc sur l'intervalle $]0,1]$.

L'intégrale généralisée est donc bien définie.

✍ *On pourrait se contenter de définir la fonction f et d'observer qu'elle est continue sur l'intervalle $]0,1[$, en laissant au Théorème d'intégration terme à terme le soin de justifier l'intégrabilité de f. (Voir plus bas.)*

❧ Pour tout $t \in]0,1[$, il est clair que

$$f(t) = \ell n\, t \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \quad \text{où} \quad u_n(t) = (-1)^n t^{2n}\, \ell n\, t.$$

Les fonctions u_n sont continues sur l'intervalle $]0,1]$ et intégrables sur cet intervalle (puisque $u_n(t) = \mathcal{O}(\ell n\, t)$ au voisinage de $t = 0$). On a déjà observé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur l'intervalle $]0,1[$ et que sa somme, la fonction f, était continue sur $]0,1[$.

❧ En intégrant par parties pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^{2n}\, \ell n\, t\, dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, \ell n\, t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n}\, dt}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

✍ *On doit savoir justifier cette intégration par parties en détail sans la moindre hésitation (se ramener à un segment $[\varepsilon, 1]$, intégrer par parties sur ce segment et étudier clairement les limites).*

Quant à savoir s'il est judicieux de détailler systématiquement tous ces calculs, c'est une toute autre question !

❧ Comme la fonction u_n est de signe constant sur $]0,1[$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 \left|u_n(t)\right| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc que la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\, dt$ est convergente.

D'après le Théorème d'intégration terme à terme, la fonction f (= la somme de la série de fonctions) est intégrable sur $]0,1[$ (ce que nous avons déjà justifié de manière indépendante) et

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

On considère l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0. \tag{H}$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Donner une base de l'espace des solutions de* (H). *On cherchera des solutions de la forme* $[t \mapsto t^r]$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Résoudre l'équation différentielle*

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 1 + t^2. \tag{E}$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme (H) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre et que le facteur de $x''(t)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (H) est un sous-espace de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.

❧ La fonction $x = [t \mapsto t^r]$ est une solution de (H) si, et seulement si,

$$\forall\, t > 0, \quad t^2 \cdot r(r-1)t^{r-2} - 2t \cdot rt^{r-1} + 2t^r = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t > 0, \quad [r^2 - 3r + 2]t^r = 0$$

soit : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Les racines de cette équation sont 1 et 2. Par conséquent, les fonctions $[t \mapsto t]$ et $\left[t \mapsto t^2\right]$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

❧ Comme $\dim \mathcal{S} = 2$ et qu'on vient de trouver deux solutions non proportionnelles de (H), ces fonctions forment une famille libre (de *deux* vecteurs dans un espace de dimension *deux*), donc une base de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\left([t \mapsto t],\ \left[t \mapsto t^2\right]\right).$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ L'équation complète (E) se traduit sous forme vectorielle

$$\forall\, t \in I =]0, +\infty[, \quad X'_t = A_tX_t + B_t$$

avec

$$X_t = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad X'_t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 2/t \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 1/t^2 \end{pmatrix}.$$

On va chercher une solution particulière de la forme $X_t = M_t\Lambda_t$ où $[t \mapsto \Lambda_t]$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I, \qquad M_t = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\forall\, t \in I, \quad X'_t = M'_t\Lambda_t + M_t\Lambda'_t = A_tM_t\Lambda_t + M_t\Lambda'_t = A_tX_t + M_t\Lambda'_t.$$

L'équation (E) équivaut donc à

$$\forall\, t \in I, \quad M_t\Lambda'_t = B_t.$$

Comme la matrice M_t est inversible, cela revient à

$$\forall\, t \in I, \quad \Lambda'_t = M_t^{-1}B_t = \begin{pmatrix} -1 - 1/t^2 \\ 1/t + 1/t^3 \end{pmatrix}$$

et nous donne

$$\forall\, t \in I, \quad \Lambda_t = \Lambda_0 + \begin{pmatrix} -t + 1/t \\ \ell n\, t - 1/2t^2 \end{pmatrix}.$$

En choisissant (par exemple) $\Lambda_0 = 0$, on obtient une solution particulière

$$\forall\, t \in I, \quad X_t = M_t\Lambda_t = \begin{pmatrix} t^2\, \ell n\, t + 1/2 - t^2 \\ * \end{pmatrix}.$$

Comme $\left[t \mapsto t^2\right]$ est une solution de (H), on peut conserver comme solution particulière de (E) la fonction

$$x_0 = \left[t \mapsto t^2\, \ell n\, t + 1/2\right]$$

et en déduire que $x \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = t^2\, \ell n\, t + \frac{1}{2} + at + bt^2.$$

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de*

$$\frac{1}{x+i}.$$

2. *En déduire les solutions de l'équation*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \frac{1}{2(x+i)}y(x) = 0. \tag{E}$$

3. *Démontrer que l'intégrale*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. *Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.*

5. *En déduire que f est une solution de l'équation (E).*

6. *Démontrer que l'application*

$$J = \left[\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\right]$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer J en fonction de f et en déduire le signe de J.

1. Comme x est *réel*,

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{x-i}{1+x^2}$$

et donc

$$\mathfrak{Re}\,\frac{1}{x+i} = \frac{x}{1+x^2}, \qquad \mathfrak{Im}\,\frac{1}{x+i} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre : on connaît une formule pour cela !

D'après la question précédente, une primitive de $\frac{1}{x+i}$ est

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - i \operatorname{Arctan} x$$

donc y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda \exp\Big[\frac{-1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x\Big] = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1+x^2}} \exp\Big(\frac{i \operatorname{Arctan} x}{2}\Big).$$

✍ *On peut remarquer que $\lambda = y(0)$.*

3. Pour $x \in \Omega = \mathbb{R}$ et $t \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $x \in \Omega$, il est clair que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I ; que

$$\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t}) \quad \text{et que} \quad \varphi(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Par comparaison à des fonctions intégrables, on a démontré que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$ et donc que l'intégrale $f(x)$ était bien définie sur $\Omega = \mathbb{R}$.

4. Il est clair que, pour tout $t \in I$, l'application $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\forall (x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{ixt}e^{-t}.$$

Il est tout aussi clair que l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert I et que

$$\forall (x,t) \in \Omega \times I, \qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t}.$$

Le majorant étant une fonction intégrable de référence sur I (cf cours sur la fonction Γ), on en déduit que, pour tout $x \in \Omega$, l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I. Mieux, le majorant étant indépendant de $x \in \Omega$ (condition de domination), on peut appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{ixt}\,dt.$$

5. Nous allons intégrer par parties : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{i\sqrt{t}}{ix-1}\,e^{(ix-1)t}\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) + \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}.$$

L'expression

$$\left|\frac{i\sqrt{t}}{ix-1}\,e^{(ix-1)t}\right| = \sqrt{\frac{t}{1+x^2}}\,e^{-t}$$

tend vers 0 lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$. De plus, l'application $\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial (}x,t)\right]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}\,dt$$

est convergente et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 = f'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}\,dt = f'(x) + \frac{i}{2(ix-1)}f(x) = f'(x) + \frac{1}{2(x+i)}f(x).$$

La fonction f est bien une solution de (E).

❧ Le scalaire λ est égal à $f(0) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\,\exp\left(\frac{i\operatorname{Arctan} x}{2}\right).$$

6. Nous allons à nouveau appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Pour tout $t \in I =]0,+\infty[$ et tout $\alpha \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\psi(\alpha,t) = \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application $[t \mapsto \psi(\alpha,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I. Comme

$$\psi(\alpha,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-\alpha t}) \quad \text{et} \quad \psi(\alpha,t) \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t},$$

l'application $[t \mapsto \psi(\alpha,t)]$ est bien intégrable sur I et l'application J est donc bien définie sur I.

Avec le changement de variable affine $u = \alpha t$,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin(u/\alpha)}{\sqrt{u}}\,du$$

et par linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{I}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{Im}\big(f(1/\alpha)\big)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+\alpha^2}}\sin\frac{\operatorname{Arctan}(1/\alpha)}{2}.$$

Comme $0<\operatorname{Arctan}1/\alpha<\pi/2$, le sinus est positif et $\mathrm{I}(\alpha)$ est donc (strictement) positif pour tout $\alpha>0$.

✍ *On peut aussi exprimer* $\mathrm{I}(\alpha)$ *comme la somme d'une série convergente à l'aide de la relation de Chasles.*

$$\mathrm{I}(\alpha)=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-\alpha(u+k\pi)}\sin(u+k\pi)}{\sqrt{u+k\pi}}\,du=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-k\alpha\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-\alpha u}\sin u}{\sqrt{u+k\pi}}\,du.$$

On vérifie sans peine que

$$e^{-k\alpha\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-\alpha u}\sin u}{\sqrt{u+k\pi}}\,du$$

tend vers 0 *en décroissant quand* k *tend vers* $+\infty$. *Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées étant vérifiées, on sait que la somme* $\mathrm{I}(\alpha)$ *est du signe du premier terme et donc positive.*

rms130-1401

1. *Résoudre l'équation différentielle*

$$\forall\, t < 1, \quad (1-t)x'(t) - x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

2. *Démontrer que les solutions de* (E) *sont développables en série entière au voisinage de* 0.

3. *Comment trouver les coefficients du développement en série entière d'une solution de* (E) *?*

1.

2. La fonction x est une solution de l'équation homogène si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall\, t < 1, \qquad x(t) = \lambda \cdot \frac{1}{1-t}.$$

La fonction $x_0 = [t \mapsto K(t)x(t)]$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall\, t < 1, \qquad (1-t) \cdot \left[K'(t) \cdot \frac{1}{1-t}\right] = \frac{1}{1-t}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t < 1, \qquad K(t) = K_0 - \ell n(1-t).$$

La fonction x est donc solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe un réel K_0 tel que

$$\forall\, t < 1, \quad x(t) = \frac{K_0}{1-t} - \frac{\ell n(1-t)}{1-t}.$$

Comme $\frac{1}{1-t}$ et $\ell n(1-t)$ sont développables en série entière au voisinage de l'origine, alors toute solution de l'équation différentielle est développable en série entière au voisinage de l'origine (par produit et somme).

3. S'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que

$$\forall\, t \in]-r, r[, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k,$$

alors

$$\forall\, t \in]-r, r[, \quad x'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1} t^k$$

puisqu'on peut dériver terme à terme la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif.

L'équation (E) devient alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

c'est-à-dire (en ajoutant un terme nul dans la seconde somme)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big((k+1)a_{k+1} - (k+1)a_k\big)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.$$

pour tout $t \in]-r, r[$. Comme $r > 0$, on peut en déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)(a_{k+1} - a_k) = 1$$

par identification terme à terme.

Comme toutes les solutions de (E) sont développables en série entière, on en déduit (par télescopage) que x est solution de (E) si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

✍ *On retrouve ainsi que*

$$\forall\, t \in\,]-1,1[, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

en notant comme d'habitude les nombres harmoniques *:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On vérifie ainsi l'expression générale trouvée précédemment :

$$x(t) = a_0 \cdot \frac{1}{1-t} + \big(-\ell n(1-t)\big) \cdot \frac{1}{1-t}.$$

✍ *On aurait pu aussi bien tirer les coefficients du développement en série entière de $x(t)$ en appliquant le Théorème sur le produit de Cauchy : sachant que*

$$\forall\, t \in\,]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot t^n$$
$$-\ell n(1-t) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot t^n$$

et que $c_0 = 0 \times 1 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \times 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1 = H_n,$$

on a bien

$$\forall\, t \in\,]-1,1[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

Au passage, on a enfin prouvé ainsi que le rayon de convergence était égal à 1 (au moins égal à 1 avec les calculs qui précèdent, pas plus grand que 1 au vu de la somme de la série entière).

1. *Démontrer que*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = 0.$$

En déduire l'existence de l'application h *définie par*

$$\forall\, x > 0, \quad h(x) = \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t}\, dt.$$

2. *Démontrer que* $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$\forall\, x > 0, \quad x^2 y'(x) + y(x) = x \tag{E}$$

si, et seulement si, il existe un réel λ *tel que*

$$\forall\, x > 0, \quad y(x) = e^{1/x}h(x) + \lambda e^{1/x}.$$

3. *En effectuant le changement de variable* $t = \frac{x}{1+xu}$*, démontrer que*

$$\forall\, x > 0, \quad e^{1/x}h(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du.$$

4. *Démontrer que l'application* g *définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+$*.*

1. La fonction $f = \left[t \mapsto (e^{-1/t})/t\right]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, on sait que ue^{-u} tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$ et ${}^1/_t$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. Par conséquent, en posant $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale $h(x)$ est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et, d'après le Théorème fondamental, la fonction h ainsi définie est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$: c'est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. La méthode est bien connue.

❧ On vérifie sans peine que $y_0 = [x \mapsto \exp({}^1/_x)]$ est une solution de l'équation homogène sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et qu'une fonction y_H est une solution de cette équation si, et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in I, \qquad y_H(x) = C.y_0(x) = C.\exp({}^1/_x).$$

❧ On fait alors "varier la constante" : on cherche une solution de l'équation complète de la forme $y_p(x) = C(x).e^{1/x}$ où C est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Cette fonction y_p est solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \qquad x^2.C'(x)\exp({}^1/_x) = x$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in I, \qquad C'(x) = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{-1}{x}\right).$$

On déduit de la question précédente que la fonction y_p définie par

$$\forall\, x \in I, \qquad y_p(x) = h(x)e^{1/x}$$

est une solution particulière de l'équation complète.

❧ D'après le principe de superposition, une fonction $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x > 0, \qquad y(x) = y_p(x) + \lambda y_0(x) = h(x)e^{1/x} + \lambda e^{1/x}.$$

3. Comme $x > 0$, il est clair que la fonction

$$\psi = \left[u \mapsto t = \frac{x}{1+xu}\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'après le Théorème de la bijection monotone, l'application ψ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, x]$.

✍ *Il suffit de calculer $\psi(0)$ et la limite de ψ au voisinage de $+\infty$ pour déterminer l'intervalle image de cette bijection.*

On vérifie ensuite que

$$e^{1/x}e^{-1/t} = e^{1/x-1/t} = e^{-u} \quad \text{et que} \quad dt = \frac{-x^2\,du}{(1+xu)^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dt}{t} = \frac{-x\,du}{1+xu}.$$

D'après la formule du changement de variable,

$$e^{1/x}\int_0^x e^{-1/t}\,\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\frac{x\,du}{1+xu} = x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\,du.$$

4. Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x,u) = \frac{e^{-u}}{1+xu}.$$

Régularité —
Il est clair que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x,u)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et on vérifie par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(x,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,u) = \frac{(-1)^n n! u^n e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}}.$$

Domination —
Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,u)\right| = n! \cdot \frac{u^n e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}} \leqslant n \cdot u^n e^{-u}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *L'étude de la fonction Γ a montré que $[u \mapsto u^n e^{-u}]$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Intégrabilité —
Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,u)\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, d'après la propriété de Domination qu'on vient de justifier, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

❧ On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$, ce qui prouve que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}}\,du.$$

✍ *On a résolu l'équation différentielle complète sur $\mathbb{R}_+^*$.*
On déduit de ce qui précède que le produit $[x \mapsto xg(x) = h(x)e^{1/x}]$ est une solution de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) de l'équation complète.
Comme $e^{1/x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, on en déduit que cette fonction est la seule solution de l'équation complète qui soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et aussi la seule qui reste bornée au voisinage de 0.