ORAUX BLANCS 2025

> **1.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme P_n tel que*
>
> $$P_n\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$
>
> **2.** *Décomposer la fraction rationnelle $1/P_n$ en éléments simples.*

1. Il est clair que $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et comme

$$X^2 + \frac{1}{X^2} = \Big(X + \frac{1}{X}\Big)^2 - 2,$$

le polynôme $P_2 = X^2 - 2$ convient.

❧ Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q tels que

$$P\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = Q\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$

✍ *Même s'il est question ici de polynômes, il faut comprendre que cette égalité a un sens dans le corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles.*

On peut aussi considérer P et Q comme des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Dans ce contexte, on déduit de l'égalité précédente que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad P(2\cos\theta) = Q(2\cos\theta) = 2\cos n\theta \tag{$\star$}$$

(en substituant $e^{i\theta}$ à l'indéterminée X) et donc que l'application polynomiale $(P - Q)$ est identiquement nulle sur le segment $[-2, 2]$. Comme l'ensemble $[-2, 2]$ est infini, on en déduit que le polynôme $(P - Q)$ est le polynôme nul et donc que $P = Q$.

✍ *On a ainsi démontré l'unicité des polynômes P_n.*

❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on remarque facilement que

$$\Big(X^{n+2} + \frac{1}{X^{n+2}}\Big) = \Big(X + \frac{1}{X}\Big)\Big(X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}}\Big) - \Big(X^n + \frac{1}{X^n}\Big). \tag{$\dagger$}$$

On a constaté l'existence des polynômes P_0 et P_1. S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe deux polynômes P_n et P_{n+1} tels que

$$P_n\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = X^n + \frac{1}{X^n} \qquad \text{et} \qquad P_{n+1}\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}},$$

alors on déduit de $(\dagger)$ que le polynôme P_{n+2} défini par

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \tag{$\ddagger$}$$

vérifie bien

$$P_{n+2}\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = X^{n+2} + \frac{1}{X^{n+2}}$$

et le résultat est démontré grâce au principe de "récurrence forte".

✍ *On peut déduire de la relation de récurrence $(\ddagger)$ que le degré de P_n est égal à n (quel que soit $n \in \mathbb{N}$) et que le polynôme P_n est unitaire (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ mais pas pour $n = 0$).*

❧ *La propriété $(\star)$ relie le polynôme P_n au polynôme de Tchebychev T_n : comme $P_n(2\cos\theta) = 2T_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors $P_n = 2T_n(X/2)$.*

2. Pour $n \geqslant 1$, le degré de la fraction rationnelle $1/P_n$ est strictement négatif, donc la partie entière est nulle.

✍ *La méthode plutôt abstraite que nous allons utiliser pour décomposer la fraction en éléments simples est la seule disponible pour les fractions ayant n pôles – et elle n'a d'ailleurs d'intérêt pratique que pour ces fractions.*

❧ La relation $(\star)$ montre que le réel $2\cos\theta$ est une racine de P_n dès que $\cos n\theta = 0$, c'est-à-dire pour

$$\theta = \frac{\pi}{2n} \pmod{\pi/n}.$$

Pour tout entier $0 \leqslant k < n$, on pose

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \in]0, \pi[\qquad \text{et} \qquad x_k = 2\cos\theta_k \in]-2, 2[\,. \tag{$\star\star$}$$

Comme cos est injective sur $[0, \pi]$ (strictement décroissante), les réels x_k, $0 \leqslant k < n$, constituent n racines distinctes du polynôme P_n. Or $\deg P_n = n$, donc P_n est scindé à racines simples et comme P_n est unitaire ($n \geqslant 1$ ici), alors on sait factoriser le dénominateur de la fraction :

$$P_n = \prod_{0 \leqslant k < n} (X - x_k).$$

✍ ***Rappel !*** *Pour factoriser un polynôme scindé, il faut connaître 1/ ses racines ; 2/ leurs multiplicités respectives et 3/ son coefficient dominant.*

❧ La décomposition en éléments simples de la fraction $1/P_n$ est donc de la forme

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{0 \leqslant k < n} \frac{a_k}{X - x_k}$$

et puisque tous les pôles sont simples, on peut déterminer les "résidus" a_k par un calcul d'équivalent :

$$\frac{1}{P_n(t)} \underset{t \to x_k}{\sim} \frac{a_k}{t - x_k}.$$

✍ *La méthode pratique nous donne*

$$\frac{1}{P_n(t)} \underset{t \to x_k}{\sim} \frac{1}{(t - x_k)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

et il ne faut pas réfléchir bien longtemps pour constater qu'elle est inutilisable ici.

D'après la formule de Taylor, comme x_k est une racine de P_n,

$$P_n(t) \underset{t \to x_k}{=} (t - x_k)P_n'(x_k) + o(t - x_k)$$

et comme c'est une racine simple, le facteur $P_n'(x_k)$ n'est pas nul, d'où

$$P_n(t) \underset{t \to x_k}{\sim} (t - x_k)P_n'(x_k).$$

La décomposition en éléments simples de $1/P_n$ est donc

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{0 \leqslant k < n} \frac{1}{(X - x_k)P_n'(x_k)}.$$

❧ Revenons à la relation $(\star)$: elle est vérifiée pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui nous permet de la dériver.

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad -2\sin\theta \cdot P_n'(2\cos\theta) = -2n\sin(n\theta).$$

D'après $(\star\star)$, $\sin\theta_k > 0$ pour tout $0 \leqslant k < n$, ce qui nous donne

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \qquad P_n'(x_k) = P_n'(2\cos\theta_k) = \frac{n\sin(n\theta_k)}{\sin\theta_k} = \frac{(-1)^k n}{\sin\theta_k}$$

puisque $n\theta_k = k\pi + \pi/2$.

Finalement, la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \frac{(-1)^k \sin\theta_k}{X - 2\cos\theta_k} \qquad \text{où} \qquad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

> *Soient* A *et* B, *deux matrices de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que*
> $$\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0.$$
> *Démontrer que*
> $$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \det(xA+yB) = 0.$$

Supposons qu'il existe un vecteur $W \neq 0$ dans $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B$. Alors

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (xA+yB)W = xAW + yBW = 0$$

et donc $\det(xA+yB) = 0$.

✍ *D'après le Théorème du rang, le déterminant d'une matrice carrée est nul si, et seulement si, le noyau de cette matrice n'est pas réduit au vecteur nul.*

❧ Par hypothèse, il existe quatre vecteurs colonnes U, V, X et Y dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, tous distincts de la colonne nulle, tels que

$$AX = BY = 0, \qquad AU = BU \quad \text{et} \quad AV = -BV. \tag{$\star$}$$

Nous noterons f et g, les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices A et B.

❧ **Premier cas :** Supposons que deux des quatre vecteurs X, Y, U et V sont colinéaires. Nous allons montrer que $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B \neq \{0\}$ (ce qui permettra de conclure).

✍ *Il y a* $\binom{4}{2} = 6$ *choix possibles, qui se ramènent tous au même raisonnement. Nous allons donc présenter le raisonnement sous forme abstraite.*

On considère deux applications linéaires φ et ψ définies sur un espace vectoriel E et à valeurs dans un espace vectoriel F.

On suppose qu'il existe deux vecteurs colinéaires *non nuls* x et y tels que $\varphi(x) = \psi(y) = 0_F$.

Il existe donc deux scalaires α et β (non nuls) et un vecteur $u \in E$ (non nul) tels que $x = \alpha \cdot u$ et $y = \beta \cdot u$ et de plus $\varphi(u) = \psi(u) = 0_F$.

Par conséquent, pour toute application linéaire $T \in \operatorname{Vect}(\varphi, \psi)$, on a aussi $T(u) = 0_F$.

❧ En prenant deux matrices quelconques parmi A, B, $A+B$ et $A-B$, on a toujours une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(A, B)$.

On a ainsi démontré que les noyaux des matrices A et B avaient au moins un vecteur non nul en commun et ce vecteur appartient au noyau de toute combinaison linéaire $xA + yB$.

❧ **Deuxième cas :** On suppose dorénavant que les vecteurs X, Y, U et V sont deux à deux non colinéaires. En particulier, le couple (U, V) est une famille libre et nous supposons ici de plus que $X \in \operatorname{Vect}(U, V)$. Autrement dit, nous supposons qu'il existe deux scalaires α et β tels que

$$X = \alpha U + \beta V.$$

Comme les couples (X, U) et (X, V) sont libres, les scalaires α et β sont *tous les deux non nuls*.

Par hypothèse, $AX = 0$, donc

$$0 = \alpha AU + \beta AV$$

et comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, les colonnes AU et AV sont colinéaires : il existe une colonne W, *non nulle,* et deux scalaires λ et μ tels que $AU = \lambda W$ et $AV = \mu W$.

Par hypothèse, on a aussi $BU = AU = \lambda W$ et $BV = -AV = -\mu W$. Par conséquent,

$$(xA+yB)U = \lambda(x+y)W \qquad \text{et} \qquad (xA+yB)V = \mu(x-y)W.$$

Les deux vecteurs $(xA+yB)U$ et $(xA+yB)V$ sont donc proportionnels.

Le couple (U, V) est (par hypothèse) une famille libre et son image par $(xA+yB)$ est une famille liée. Le sous-espace $\operatorname{Vect}(U, V)$ contient donc un vecteur *non nul* du noyau de $(xA+yB)$.

✍ *Contrairement au cas précédent, on n'a pas démontré que les noyaux de* A *et de* B *avaient un vecteur non nul en commun. Et pour cause ! Les déterminants des quatre matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont tous nuls mais l'intersection $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B$ *est réduite au vecteur nul puisque* $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 0)$ *et* $\operatorname{Ker} B = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0)$.

❧ **Troisième (et dernier) cas :** Nous supposons pour finir que la famille (U, V, X) est libre. Il s'agit donc d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que, par hypothèse,

$$AU = BU, \quad AV = -BV, \quad AX = 0.$$

Il existe donc trois colonnes C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\begin{aligned} \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\big(AU, AV, AX\big) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\big(BU, BV, BX\big) = \begin{pmatrix} C_1 & -C_2 & C_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la combinaison linéaire $xA + yB$ est semblable à la matrice

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} (x+y)C_1 & (x-y)C_2 & yC_3 \end{pmatrix}.$$

❧ C'est le moment de se rappeler qu'il existe une colonne Y *non nulle* telle que $BY = 0$. Autrement dit, les colonnes de la matrice B forment une famille *liée*. Par conséquent, les colonnes de la matrice $M_{x,y}$ forment une famille liée elle aussi, ce qui prouve que la matrice $M_{x,y}$ n'est pas inversible.

Deux matrices semblables ont même rang, donc la matrice $xA + yB$ n'est pas inversible et son déterminant est donc nul.

> *Pour tout entier* $k \geqslant 2$*, on définit l'application* f_k *par*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = \frac{x^k}{k!}.$$
>
> *Pour tout entier* $n \geqslant 2$ *et tout réel* x*, on pose*
>
> $$D_n(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ f_2(x) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ f_{n-1}(x) & & \ddots & \ddots & f_0(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) & \cdots & f_2(x) & f_1(x) \end{vmatrix}$$
>
> *Démontrer que* D_n *est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire une expression simple de* $D_n(x)$*.*

Il est clair que f_k est une fonction dérivable et que $f'_k = f_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$. En outre, f'_0 est la fonction nulle.

❧ En notant $a_{i,j}(x)$, les coefficients de la matrice, la formule du déterminant nous donne

$$D_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)}(x) \cdots a_{n,\sigma(n)}(x).$$

La fonction D_n est une combinaison linéaire de produits de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, c'est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

❧ Notons $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$, les colonnes de la matrice. La formule de Leibniz pour la dérivation d'une forme n-linéaire nous dit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad D'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \det\big(C_1(x), \dots, C_{k-1}(x), C'_k(x), C_{k+1}(x), \dots, C_n(x)\big)$$

et on vérifie facilement que

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad C'_k(x) = C_{k+1}(x).$$

Comme le déterminant est une forme alternée, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad D'_n(x) &= \sum_{1 \leqslant k < n} \det\big(C_1(x), \dots, C_{k-1}(x), C_{k+1}(x), C_{k+1}(x), \dots, C_n(x)\big) \\ &\qquad + \det\big(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C'_n(x)\big) \\ &= \det\big(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), E_n\big) \end{aligned}$$

où E_n est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En développant par la dernière colonne, on trouve donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad D'_n(x) = D_{n-1}(x).$$

Il est clair que $D_2(x) = {}^{x^2}/_2$ (produit en croix) et que $D_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ (matrice triangulaire supérieure stricte). On en déduit par récurrence (= par primitivations successives) que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

rms128-648

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$*, une matrice non nulle telle que* $A^2 = 0_3$*. Déterminer la dimension de son* ***commutant*** *:*

$$C_A = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ AM = MA\}.$$

rms128-656

Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *telle que l'ensemble*

$$\left\{B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ B^2 = A\right\}$$

de leurs racines carrées soit fini. Que dire du cardinal de cet ensemble ?

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On étudie ici l'ensemble

$$E_A = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ AMA = 0_n\}.$$

1. *On suppose pour commencer que la matrice A est diagonalisable et que son rang est égal à r. Déterminer la dimension de E_A.*

2. *Même question dans le cas général.*

L'application $[M \mapsto AMA]$ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (par bilinéarité du produit matriciel), donc son noyau E_A est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✍ *Ce n'est pas parce que la question n'est pas posée qu'il ne faut pas y répondre !*

1. Si A est diagonalisable et si son rang est égal à r, alors il existe une matrice diagonale et inversible $D \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(D, 0_{n-r}).$$

L'équation $AMA = 0_n$ devient alors

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = 0_n$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = 0_n \quad \text{où} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits par blocs, on arrive à

$$\begin{pmatrix} DM_1D & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

et comme la matrice D est inversible, la matrice M appartient au sous-espace E_A si, et seulement si, le bloc M_1 est la matrice nulle.

Autrement dit, la matrice M appartient au sous-espace E_A si, et seulement si, il existe trois blocs $M_2 \in \mathfrak{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $M_3 \in \mathfrak{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $M_4 \in \mathfrak{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ tels que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0_r & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

L'application $[X \mapsto P^{-1}XP]$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc la dimension du sous-espace E_A est égale à $(n^2 - r^2)$.

✍ *Manifestement, c'est le rang de A qui compte et non le fait d'être diagonalisable ou non !*

2. Si le rang de A est égal à r, alors A est équivalente à la matrice J_r : il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

L'équation $AMA = 0_n$ devient cette fois

$$(Q^{-1}AP)(P^{-1}MQ)(Q^{-1}AP) = 0_n$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = 0_n \quad \text{où} \quad P^{-1}MQ = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

soit enfin : $M_1 = O_r$.

✍ *Les calculs sont encore plus simples que dans le cas diagonalisable !*

Comme les matrices P et Q sont inversibles, l'application $[X \mapsto P^{-1}XQ]$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et, comme dans le cas particulier précédent, la dimension du sous-espace E_A est égale à $(n^2 - r^2)$.

On considère une matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *et un entier* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Démontrer que* M *n'est pas diagonalisable.*

2. *Pour tout entier* $k \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \quad \textit{où} \quad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

2. a. *Démontrer qu'il existe une matrice* $P \in GL_2(\mathbb{C})$ *telle que*

$$P^{-1}MP = R_k.$$

2. b. *Démontrer qu'il existe une matrice* $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que*

$$Q^{-1}MQ = R_k.$$

1.

2. a.

2. b.

rms128-661

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *une matrice diagonalisable. On pose*

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^3 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n.$$

1. *Démontrer que* A *est un polynôme en* B *:* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{B}]$.

2. *Qu'en serait-il si* A *était une matrice à coefficients complexes ?*

1.

2.

$\boxed{1.}$ *Soient* E, *un espace vectoriel de dimension* n ; u *et* v, *des endomorphismes de* E.
On suppose que u *possède* n *valeurs propres distinctes et que* u *et* v *commutent :*

$$u \circ v = v \circ u.$$

Que peut-on en conclure sur v ?
$\boxed{2.}$ *Soit* E, *le sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *engendré par les fonctions* cos *et* sin.
$\boxed{2.\,a.}$ *Soit* $d \in L(E)$, *l'endomorphisme défini par*

$$\forall\, \varphi \in E, \quad d(\varphi) = \varphi'.$$

Démontrer qu'il existe $f \in L(E)$ *tel que* $f \circ f = d$.
$\boxed{2.\,b.}$ *Soit* $s \in L(E)$, *l'endomorphisme qui échange* cos *et* sin. *Quelle est la nature géométrique de* s ?
Existe-t-il $g \in L(E)$ *tel que* $g \circ g = s$?

$\boxed{1.}$ Comme u possède n valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{R} \cdot \varepsilon_k$$

Comme u et v commutent, les sous-espaces propres $\mathbb{R} \cdot e_k$ de u sont stables par v et une droite stable par v est dirigée par un vecteur propre de v.

La famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres pour u qui sont aussi des vecteurs propres pour v.

Dans cette base, les endomorphismes u et v sont représentés par des matrices diagonales.

$\boxed{2.\,a.}$ Les fonctions cos et sin ne sont pas proportionnelles, donc E est un plan vectoriel. On note $\mathscr{B} = (\sin, \cos)$, la base de référence de cet espace vectoriel.

La dérivation est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme $\sin' = \cos$ et que $\cos' = -\sin$, le sous-espace E est stable par dérivation et d est bien un endomorphisme de E.

✍ *L'application* d *est l'endomorphisme de* E *induit par restriction de la dérivation à ce sous-espace stable.*

La matrice de d relative à la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^2.$$

L'endomorphisme $f \in L(E)$ défini par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie donc $f \circ f = d$.

✍ *Pour trouver* f *sans trop d'effort, il faut interpréter* d *comme la rotation plane d'angle* $\pi/2$ *: une "racine carrée" de* d *est la rotation d'angle* $\pi/4$.

$\boxed{2.\,b.}$ Comme $\mathscr{B} = (\sin, \cos)$ est une base de E, il existe un, et un seul, endomorphisme de E tel que $s(\sin) = \cos$ et $s(\cos) = \sin$ (Théorème de caractérisation des applications linéaires).

❧ Cet endomorphisme est un automorphisme (l'image d'une base de E est encore une base de E) et c'est en fait une symétrie car $s \circ s = I_E$:

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$s(\sin + \cos) = \sin + \cos \qquad \text{et que} \qquad s(\sin - \cos) = -(\sin - \cos)$$

donc la matrice de s dans la base $\mathscr{C} = (\sin + \cos, \sin - \cos)$ est diagonale :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Toute symétrie est diagonalisable car elle admet un polynôme annulateur* $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ *scindé à racines simples.*
❧ *Les deux vecteurs* $\sin + \cos$ *et* $\sin - \cos$ *sont distincts du vecteur nul (puisque* $\mathscr{B}$ *est une famille libre). Ce sont donc des vecteurs propres de* s *associés à deux valeurs propres distinctes et ils constituent à ce titre une famille* libre.

❧ Supposons qu'il existe un endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $g \circ g = s$. Alors g et s commutent (s est un polynôme en g) et s est diagonalisable avec deux valeurs propres distinctes.

D'après la première question, la base $\mathscr{C}$ est donc une base de vecteurs propres pour g également. On doit donc avoir deux <u>réels</u> a et b tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(g \circ c) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(s).$$

L'équation $b^2 = -1$ n'a pas de solution réelle, donc il n'existe pas d'endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $g \circ g = s$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable et que $P'(A)$ soit inversible. Démontrer que A est diagonalisable.

Comme la matrice $P(A)$ est diagonalisable, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $Q\big(P(A)\big) = 0_n$. Autrement dit : $(Q \circ P)$ est un polynôme annulateur de A.

✍ *En particulier, toutes les valeurs propres de A sont des racines de $(Q \circ P)$.*
Comme Q est à racines simples, ce n'est pas le polynôme nul. Et comme $P'(A)$ est inversible, alors P n'est pas un polynôme constant. De ce fait, la composée $Q \circ P$ n'est pas un polynôme constant.

❧ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A.
Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$, donc $P(\lambda)$ est une racine de Q et comme les racines de Q sont simples, alors

$$Q'\big(P(\lambda)\big) \neq 0.$$

De plus, il existe donc un vecteur non nul X tel que $AX = \lambda X$.

✍ *Pas de valeur propre sans vecteur propre !*

On en déduit que $P'(A)X = P'(\lambda)X$ et comme la matrice $P'(A)$ est inversible par hypothèse, son noyau est réduit au vecteur nul. Ainsi,

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad P'(\lambda) \neq 0.$$

❧ Comme $(Q \circ P)' = (Q' \circ P) \cdot P'$, on déduire des remarques précédentes que

$$(Q \circ P)'(\lambda) = Q'\big(P(\lambda)\big).P'(\lambda) \neq 0.$$

❧ Le polynôme $Q \circ P$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (Théorème de D'Alembert-Gauss). On a remarqué que toutes les valeurs propres de A étaient des racines de $Q \circ P$ et on a démontré que c'était des racines simples.
On peut donc factoriser $Q \circ P$ de la manière suivante :

$$Q \circ P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) \times \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)^{m_k},$$

aucun des scalaires μ_k n'étant une valeur propre de la matrice A.
Par conséquent, la matrice

$$\prod_{k=1}^{r} (A - \mu_k I_n)^{m_k}$$

est inversible (en tant que produit de matrices inversibles) et comme $(Q \circ P)(A) = 0_n$, on en déduit que

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (A - \lambda I_n) = 0_n.$$

On a démontré qu'il existait un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable.

Soit n, un entier supérieur à 2. Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la matrice PA soit diagonalisable, quelle que soit la matrice inversible P.

Comme la matrice I_n est inversible, il faut que la matrice A soit diagonalisable.

❧ Si $a \neq 0$, en posant

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{on obtient} \qquad P_0A_0 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et comme $a \neq 0$, le produit P_0A_0 n'est pas diagonalisable.

Ainsi, si A admet au moins une valeur propre non nulle de multiplicité supérieure à 2, alors il existe une matrice inversible P telle que PA n'est pas diagonalisable.

✍ *Plus précisément, on suppose qu'il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(a, a, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$. La matrice P définie par $Q^{-1}PQ = \mathrm{Diag}(P_0, I_{n-2})$ est inversible (diagonale par blocs et les blocs diagonaux sont inversibles) et*

$$Q^{-1}PAQ = (Q^{-1}PQ)(Q^{-1}AQ) = \mathrm{Diag}\big(P_0A_0, \mathrm{Diag}(\lambda_3, \dots, \lambda_n)\big).$$

Comme $Q^{-1}(PA)Q$ n'est pas diagonalisable, la matrice PA n'est pas diagonalisable.

❧ Si a et b sont deux nombres complexes distincts non nuls, alors en posant

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \text{on obtient} \qquad P_0A_0 = \begin{pmatrix} ab & b \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

et comme $b \neq 0$, le produit P_0A_0 n'est pas diagonalisable.

On en déduit comme plus haut que : si A admet au moins deux valeurs propres distinctes et non nulles, alors il existe une matrice inversible P telle que PA n'est pas diagonalisable.

❧ Supposons donc que la matrice A soit diagonalisable et qu'elle admette une valeur propre non nulle de multiplicité 1. Il s'agit donc d'une matrice dont le rang est égal à 1 et il existe donc une ligne L et une colonne C, toutes deux non nulles, telles que $A = C.L$.

Tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image, donc tout vecteur propre est proportionnel à la colonne C et comme

$$AC = (C.L)C = C.(LC) = (LC).C \qquad \text{(LC est un scalaire !)}$$

on en déduit que la valeur propre non nulle de A est le scalaire LC.

Quelles que soient L et C, il existe une matrice inversible P telle que $LPC = 0$.

Comme P est inversible, le produit PA est encore une matrice dont le rang est égal à 1 et comme cette matrice est supposée diagonalisable, on en déduit comme plus haut que la valeur propre *non nulle* de PA est le scalaire LPC, ce qui est contradictoire.

Encore raté !

✍ *D'après le Théorème de la base incomplète, quels que soient les vecteurs* ***non nuls*** *u et v d'un espace vectoriel E de dimension finie, il existe un automorphisme φ de E tel que $\varphi(u) = v$.*

❧ *En effet, comme u et v ne sont pas nuls, il existe deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E de la forme*

$$\mathscr{B} = (u, e_2, \dots, e_n) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C} = (v, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n).$$

D'après le Théorème de caractérisation, il existe une, et une seule application linéaire φ de E dans E telle que

$$\varphi(u) = v \qquad \text{et que} \qquad \forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad \varphi(e_k) = \varepsilon_k.$$

Comme l'image par φ de la base $\mathscr{B}$ est encore une base, cet endomorphisme est en fait un automorphisme.

❧ *On dit que le groupe linéaire* ***opère transitivement*** *sur l'ensemble des vecteurs non nuls de E.*

❧ Finalement, il ne reste plus que la matrice nulle.

L'ensemble E des applications continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est muni de la topologie de la convergence uniforme. On note respectivement I, S et B, les sous-ensembles de E constitués des applications injectives, surjectives et bijectives.

1. *Démontrer que l'ensemble I n'est ni ouvert, ni fermé.*

2. *L'ensemble B est-il ouvert ? fermé ?*

3. *L'ensemble S est-il ouvert ? fermé ?*

1. L'application $g = [x \mapsto x]$ appartient à B, donc à I et à S. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on considère l'application g_ε définie par

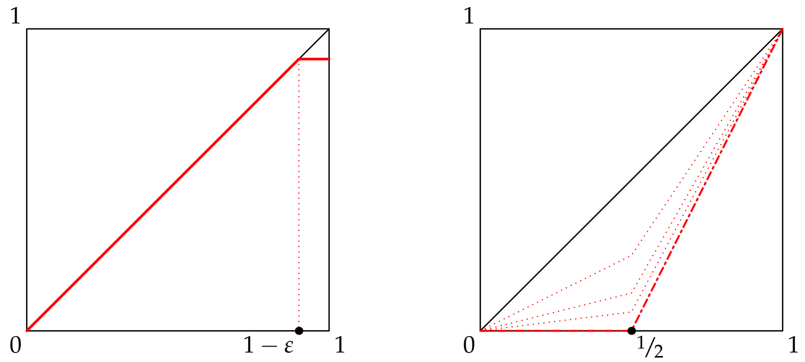
$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon, \quad g_\varepsilon(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1, \quad g_\varepsilon(x) = 1-\varepsilon.$$

Il est clair que l'application g_ε appartient à E, mais elle n'est ni injective, ni surjective.

✍ *Et pas non plus bijective !*

Cependant, $\|g - g_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$ (figure de gauche ci-dessous). Par conséquent, tout voisinage de g contient au moins une fonction de E qui n'est pas dans I (ni dans S, ni dans B).

On a ainsi démontré que I n'était pas ouvert.



❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application continue et affine par morceaux h_n définie par

$$h_n(0) = 0, \qquad h_n(1/2) = 2^{-(n+1)}, \qquad h_n(1) = 1.$$

Il est clair que h_n est injective sur $[0,1]$ et qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction continue et affine par morceaux h définie par

$$h(0) = 0, \qquad h(1/2) = 0, \qquad h(1) = 1$$

puisque $\|h - h_n\|_\infty = h_n(1/2) = 2^{-(n+1)}$ (figure de droite ci-dessus).

Comme la fonction h n'est pas injective, l'ensemble I n'est pas fermé.

✍ *Comme les fonctions h_n appartiennent à B et que h n'appartient pas à B, on a également démontré que B n'était pas fermé.*

2. On a déjà démontré que B n'était ni ouvert, ni fermé.

3. On a déjà démontré que S n'était pas ouvert.

❧ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'applications de S qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction (continue) $f \in E$. Nous allons démontrer que l'application f est surjective.

Soit $y \in [0,1]$. Comme chaque fonction f_n est surjective, il existe au moins un réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = y$. On dispose ainsi d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du compact $[0,1]$. Il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in [0,1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left|f(\ell) - y\right| = \left|f(\ell) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})\right| &\leqslant \left|f(\ell) - f(x_{\varphi(k)})\right| + \left|f(x_{\varphi(k)}) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})\right| \\ &\leqslant \left|f(\ell) - f(x_{\varphi(k)})\right| + \|f - f_{\varphi(k)}\|_\infty \end{aligned}$$

et le majorant tend vers 0 : le premier terme par continuité de f au point ℓ et le second terme par convergence uniforme. On a donc $f(\ell) = y$, ce qui prouve que f est surjective.

L'ensemble des applications continues et surjectives de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est donc fermé.

Soit E, l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_2$.

1. *Démontrer que toute matrice $M \in E$ est diagonalisable.*

2. *Déterminer l'adhérence de E dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.*

1. Le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples (= les racines p-ièmes de l'unité) et c'est un polynôme annulateur de M, donc M est diagonalisable.

2. Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs, donc E est invariant par conjugaison :

$$\forall\, M \in E,\ \forall\, P \in GL_2(\mathbb{C}), \qquad P^{-1}MP \in E$$

et comme la conjugaison $[M \mapsto P^{-1}MP]$ est continue (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie), l'adhérence de E est également invariante par conjugaison : si la suite des matrices $M_n \in E$ converge vers la matrice D, alors la suite des matrices $PM_nP^{-1} \in E$ converge vers la matrice PDP^{-1}.

❧ Soient λ et μ, deux éléments de $\mathbb{U}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites rationnelles $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} e^{2ir_n\pi} \qquad \text{et} \qquad \mu = \lim_{n\to+\infty} e^{2it_n\pi}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_np_n \in \mathbb{N}$ et $t_np_n \in \mathbb{N}$, donc la matrice $M_n = \operatorname{Diag}(e^{2ir_n\pi}, e^{2it_n\pi})$ vérifie bien

$$M_n^{p_n} = \operatorname{Diag}(1,1) = I_2.$$

❧ On a donc démontré que les matrices $\operatorname{Diag}(\lambda,\mu)$ étaient dans l'adhérence de E, quels que soient les complexes λ et μ dans $\mathbb{U}$.

Comme l'adhérence de E est invariante par conjugaison, toute matrice diagonalisable dont les valeurs propres appartiennent à $\mathbb{U}$ est dans l'adhérence de E.

✍ ***Rappel :*** *Si le spectre de la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est réduit au singleton $\{\lambda\}$ et si $M \neq \lambda I_2$, alors la matrice M est semblable à la matrice*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

❧ Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{pmatrix} 1+i\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-i\varepsilon \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i\varepsilon \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

et on vérifie sans peine que

$$E \ni P_\varepsilon^{-1}A_\varepsilon P_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{pmatrix} 3+i\varepsilon & 2+2i\varepsilon \\ -2 & -1-i\varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme le spectre de la matrice limite est réduit à $\{1\}$ et que cette matrice n'est (visiblement) par la matrice I_2, cette matrice limite est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ D'après la première partie, les matrices A_ε appartiennent à l'adhérence de E. Comme l'adhérence de E est une partie fermée et stable par conjugaison, la matrice B appartient à l'adhérence de E.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $e^{i\theta}B$ est semblable à

$$B_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

et nous avons ainsi démontré que toute matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ dont le spectre est contenu dans $\mathbb{U}$ appartient à l'adhérence de E (que cette matrice M soit diagonalisable ou non).

❧ Réciproquement, on considère une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de E en supposant qu'elle converge vers une matrice $M \in GL_2(\mathbb{C})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme caractéristique χ_n de M_n est de la forme

$$\chi_n = X^2 - (\lambda_n + \mu_n)X + \lambda_n\mu_n$$

où λ_n et μ_n appartiennent au cercle unité $\mathbb{U}$.

✍ *On a commencé par démontrer que les valeurs propres de $M \in E$ étaient des racines de l'unité.*

D'après le Théorème de D'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de la matrice limite M est scindé :

$$\chi = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

Le terme constant $\lambda_n\mu_n$ de χ_n appartient à $\mathbb{U}$ (= groupe multiplicatif) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme le polynôme caractéristique χ_n converge vers χ, on en déduit que le produit $\alpha\beta$ appartient à $\mathbb{U}$ (= partie fermée).

✍ *La continuité du polynôme caractéristique vu comme une fonction de la matrice est détaillée au* *128-533.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le scalaire $\lambda_n \in \mathbb{U}$ est une valeur propre de M_n, donc il existe une colonne $X_n \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ de norme 1 (et donc en particulier *non nulle*) telle que $M_nX_n = \lambda_nX_n$.

✍ *Comme $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur cet espace sont équivalentes et il n'importe pas de préciser quelle norme on a choisie.*

Cela étant, le choix de cette norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ définit une norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et la convergence de M_n vers M peut alors se traduire par le fait que $|||M_n - M|||$ tend vers 0.

Comme $\mathbb{U}$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$ et que la sphère unité de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ est une partie compacte elle aussi, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_{\varphi(k)} = \lambda \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} X_{\varphi(k)} = X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad \|X\| = 1.$$

Par continuité du produit matriciel, on en déduit que

$$\lambda X = \lim_{k\to+\infty} \lambda_{\varphi(k)}X_{\varphi(k)} = \lim_{k\to+\infty} M_{\varphi(k)}X_{\varphi(k)} = MX.$$

✍ *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on sait que $M_{\varphi(k)}X_{\varphi(k)} = \lambda_{\varphi(k)}X_{\varphi(k)}$ et donc*

$$\begin{aligned}\|MX - \lambda X\| &\leqslant \|MX - MX_{\varphi(k)}\| + \|MX_{\varphi(k)} - M_{\varphi(k)}X_{\varphi(k)}\| \\ &\qquad + \|\lambda_{\varphi(k)}X_{\varphi(k)} - \lambda X_{\varphi(k)}\| + \|\lambda X_{\varphi(k)} - \lambda X\| \\ &\leqslant |||M||| \cdot \|X - X_{\varphi(k)}\| + |||M - M_{\varphi(k)}||| \cdot 1 + |\lambda| \cdot \|X_{\varphi(k)} - X\|\end{aligned}$$

où chaque terme du majorant tend vers 0.

Comme la colonne X n'est pas la colonne nulle (sa norme est égale à 1), c'est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{U}$.

La matrice M possède deux valeurs propres α et β (non nécessairement distinctes) dont le produit appartient à $\mathbb{U}$ et l'une de ces valeurs propres appartient à $\mathbb{U}$. Par conséquent, les deux valeurs propres α et β appartiennent à $\mathbb{U}$.

❧ On a démontré qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ était dans l'adhérence de E si, et seulement si, son spectre était contenu dans le cercle unité $\mathbb{U}$.

*La **classe de similitude** d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble $S(A)$ défini par*

$$S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

1. *Démontrer que l'application $[M \mapsto \chi_M]$ est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*
2. *On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable. Démontrer que la classe de similitude de A est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*
3. a. *On suppose que la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. Démontrer que la matrice nulle 0_n appartient à l'adhérence de la classe de similitude $S(A)$.*
3. b. *Étudier la réciproque.*
4. *On suppose que la matrice A n'est pas diagonalisable. Démontrer que sa classe de similitude $S(A)$ n'est pas fermée.*
5. *Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'intérieur de la classe de similitude $S(A)$ est vide.*
6. *Caractériser les matrices A dont la classe de similitude $S(A)$ est bornée.*

1. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique χ_M est un polynôme unitaire de degré n. On considère donc une application d'un espace vectoriel de dimension finie : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans un autre espace vectoriel de dimension finie : $\mathbb{C}_n[X]$. Il suffit donc de démontrer que les coordonnées de χ_M relatives à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions continues des coordonnées de M relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ pour pouvoir conclure que $[M \mapsto \chi_M]$ est une fonction continue.
❧ Par définition du déterminant, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_M(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

où $b_{i,i} = (x - m_{i,i})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $b_{i,j} = -m_{i,j}$ pour tous $i \neq j$. On en déduit que les coordonnées de χ_M relatives à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions polynomiales (et donc continues) des coordonnées de M relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Considérons une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices semblables à A et supposons que cette suite de matrices converge vers une matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
❧ Comme A est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples μ. Comme des matrices semblables ont mêmes polynômes annulateurs, on en déduit que $\mu(B_k) = 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(L) = 0_n$.

✍ *Toute application polynomiale est continue sur l'algèbre de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

On a ainsi démontré que L était diagonalisable.
❧ Des matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de chaque matrice B_k est en fait celui de la matrice A. Par continuité, le polynôme caractéristique de L est aussi celui de la matrice A.
❧ On sait ainsi que L et A sont deux matrices diagonalisables et que leurs polynômes caractéristiques sont égaux, donc L et A sont semblables.

✍ *La première partie de la démonstration a montré que μ était un polynôme annulateur de L, elle ne permet pas de démontrer qu'il s'agit du polynôme minimal de L !*
Et même si on savait qu'il s'agissait du polynôme minimal de L, on ne pourrait toujours pas conclure, car le polynôme minimal ne donne aucune indication sur la dimension des sous-espaces propres !
❧ *Par ailleurs, il ne suffit pas de savoir que A et L ont même polynôme caractéristique, car la connaissance du polynôme χ_L ne permet pas de savoir si L est diagonalisable (à moins que le polynôme caractéristique ne soit scindé à racines simples).*

3. a. Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Considérons donc une matrice triangulaire supérieure stricte $N = (n_{k,\ell}) \in S(A)$ et, pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}_+^*$, la matrice de passage

$$P_t = \operatorname{Diag}(t, t^2, \ldots, t^n) \in GL_n(\mathbb{C}).$$

La matrice $N_t = P_t^{-1}NP_t = (n_{k,\ell}^t)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ est semblable à N, donc elle est semblable à A et

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad n_{k,\ell}^t = t^{\ell-k} n_{k,\ell}.$$

✍ *En multipliant à droite par N_t, on multiplie la ℓ-ième colonne de N par t^ℓ.*
En multipliant à gauche par $N_t^{-1} = \mathrm{Diag}(t^{-1}, \dots, t^{-n})$, on multiplie la k-ième ligne de N par t^{-k}.
Par conséquent, $n_{k,\ell}^t = t^{-k} n_{k,\ell} t^\ell$.

Comme $n_{k,\ell} = 0$ pour $k \geqslant \ell$, c'est-à-dire pour $\ell - k \leqslant 0$, on en déduit que
— si t tend vers 0, alors $t^{\ell-k}$ tend vers 0 pour $k < \ell$ et $n_{k,\ell}^t$ tend vers 0 quels que soient k et ℓ (même pour $k \geqslant \ell$) ;
— si t tend vers $+\infty$, alors $t^{\ell-k}$ tend vers $+\infty$ pour $k < \ell$ et $n_{k,\ell}^t$ tend vers l'infini pour tout couple (k, ℓ) tel que $n_{k,\ell} \neq 0$.

❧ Ainsi, si t tend vers 0, la matrice $N_t \in S(A)$ tend vers la matrice nulle, ce qui prouve que la matrice nulle appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.

✍ *À l'opposé, si A est nilpotente non nulle, alors $N \neq 0_n$ et si t tend vers $+\infty$, alors $\|N_t\|_\infty$ tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la classe de similitude de A n'est pas bornée.*

3. b. Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices appartenant à $S(A)$ et supposons qu'elle converge vers une matrice B.

Toutes les matrices A_k sont semblables à A, donc leur polynôme caractéristique est toujours celui de A. Par continuité (cf. première question), le polynôme caractéristique de B est aussi celui de A.

Si B est la matrice nulle, alors le polynôme caractéristique de A est X^n et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, la matrice A est nilpotente.

4. Comme la matrice A est complexe, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(B_1, \dots, B_r)$ où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice d'homothétie $\lambda_k I$ et d'une matrice nilpotente N_k.

Si A n'est pas diagonalisable, alors l'un des blocs nilpotents N_k n'est pas nul.

✍ *Cela signifie que λ_k n'est pas une racine simple du polynôme minimal de A.*

Supposons par commodité que ce soit $N_1 \in \mathfrak{M}_{d_1}(\mathbb{C})$. Il existe (d'après ce qui précède) une suite $(P_{1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que

$$\lim_{\ell\to+\infty} P_{1,\ell}^{-1} N_1 P_{1,\ell} = 0_{d_1}.$$

En posant $P_\ell = \mathrm{Diag}(P_{1,\ell}, I_{d_2}, \dots, I_{d_r}) \in GL_n(\mathbb{C})$, on obtient

$$\lim_{\ell\to+\infty} P_\ell^{-1} A P_\ell = A' = \mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, B_2, \dots, B_r).$$

Dans ces conditions, λ_1 est une racine simple du polynôme minimal de A' et comme, par hypothèse, λ_1 n'est pas une racine simple du polynôme minimal de A, on en déduit que A' n'est pas semblable à A.

Ainsi, la classe de similitude d'une matrice non diagonalisable n'est pas fermée.

5. Toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : il existe une matrice triangulaire $T \in S(A)$ et, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$,

$$\big\|(T + \varepsilon I_n) - T\big\| = |\varepsilon| \cdot \|I_n\| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(T + \varepsilon) = \mathrm{tr}\, T + n\varepsilon \neq \mathrm{tr}\, T = \mathrm{tr}\, A.$$

Par conséquent, toute boule de rayon strictement positif centrée en $T \in S(A)$ contient au moins une matrice qui n'est pas semblable à A et le point T n'appartient donc pas à l'intérieur de $S(A)$.

✍ *Toute boule de rayon strictement positif et centrée en T contient en fait une infinité de matrices qui ne sont pas semblables à A (puisque leur trace est différente de celle de A).*

❧ Considérons maintenant une matrice $M_0 \in S(A)$.

Mais la matrice M_0 est semblable à la matrice triangulaire T, donc il existe une matrice inversible P telle que $M_0 = PTP^{-1}$: la matrice T est donc un antécédent de la matrice M_0 par l'application continue $\Phi = \big[M \mapsto PMP^{-1}\big]$ (= un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie).

✍ *La conjugaison $\Phi = [M \mapsto PMP^{-1}]$ est en fait un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et la matrice T est donc l'antécédent de M_0 par Φ. C'est ici sans importance.*

Si la matrice M_0 appartenait à l'intérieur de $S(A)$, alors $S(A)$ serait un voisinage de M_0. Par continuité de la conjugaison Φ, l'image réciproque par Φ de $S(A)$, voisinage de M_0, serait donc un voisinage de T. Mais la classe de similitude $S(A)$ est globalement invariant par conjugaison, donc $S(A)$ serait un voisinage de T et on a démontré que ce n'était pas le cas.

✍ *Dire que la classe de similitude est "invariante par conjugaison" signifie seulement qu'une matrice M est semblable à A si, et seulement si, elle est semblable à une matrice semblable à A !*

❧ Ainsi, la classe de similitude $S(A)$ n'est un voisinage d'aucun de ses points, c'est une partie d'intérieur vide.

✍ *Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.*

6. On a démontré que la classe de similitude d'une matrice nilpotente non nulle n'était pas bornée.
❧ Si la matrice A n'est pas diagonalisable, il en va de même. (La matrice A est, comme on l'a vu, semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une homothétie et d'un bloc nilpotent, l'un de ces blocs nilpotents n'étant pas nul.)
❧ Il reste donc à envisager le cas des matrices diagonalisables.
❧ Considérons deux complexes distincts a et b, ainsi qu'un réel $\varepsilon > 0$. En posant

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \qquad \text{on obtient} \qquad P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon = \begin{pmatrix} * & \frac{b-a}{\varepsilon} \\ * & * \end{pmatrix}$$

et comme $a \neq b$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon\|_\infty = +\infty.$$

La classe de similitude de D n'est donc pas bornée.

✍ *On retrouve dans ce calcul l'idée générale de l'exercice : si deux vecteurs propres se rapprochent indéfiniment, les conséquences sont visibles lors du changement de base.*

❧ On en déduit plus généralement que : si A est une matrice diagonalisable qui admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors la classe de similitude de A n'est pas bornée.
❧ Finalement, la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, la matrice A est une matrice d'homothétie, auquel cas la classe de similitude $S(A)$ est réduite à $\{A\}$.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{Arccos}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big) - \frac{\pi}{6}.$$

On étudie ici une série numérique de terme général

$$u_n = f\Big(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)$$

où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$.

✍ *Il n'y a pas lieu de faire du zèle : peu importe pour quelles valeurs de n le terme u_n est défini, il suffit de savoir que u_n est défini à partir d'un certain rang.*

On sait que la fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$ et comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \in \,]-1, 1[\,,$$

le terme général u_n est bien défini à partir d'un certain rang.

❧ D'après la formule de Taylor,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + o(x^2),$$

donc $u_n = v_n + w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec

$$v_n = f'(0)\cdot\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad\text{et}\quad w_n \underset{n\to+\infty}{=} f''(0)\cdot\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\Big(\frac{1}{n^{2\alpha}}\Big).$$

❧ Pour x voisin de 0,

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - 4\sqrt{3}x - 4x^2}} \qquad\text{et}\qquad f''(x) = \frac{-4(\sqrt{3} + 2x)}{\big(1 - 4\sqrt{3}x - 4x^2\big)^{3/2}}$$

donc $f'(0) = -2$ et $f''(0) = -4\sqrt{3}$.

✍ *Il n'est toujours pas utile de s'intéresser à l'ensemble de définition de f, il suffit ici de savoir que f est dérivable sur un voisinage de 0.*

❧ Nous pouvons maintenant être plus précis :
— la série de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}2}{n^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha > 0$ (Critère spécial des séries alternées) et (grossièrement) divergente pour $\alpha \leqslant 0$;
— comme

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}$$

et que le second membre est de signe constant (négatif), les deux séries sont de même nature et la série $\sum w_n$ est convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$ (comparaison à une série de Riemann).

✍ *Il faut ici bien prendre soin de préciser que le signe du terme général est constant pour conclure.*

En effet, si $x_n \sim y_n$, alors la série $\sum x_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum y_n$ est absolument convergente (Théorème de comparaison par équivalence).

Si le terme général y_n est de signe constant, alors le terme général x_n est lui aussi de signe constant et, dans ces conditions, la convergence de la série équivaut à la convergence absolue.

❧ En conclusion :

— si $\alpha \leqslant 0$, alors $u_n \sim v_n$ et la série $\sum v_n$ diverge grossièrement, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;

— si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, alors la série alternée $\sum v_n$ converge et la série $\sum w_n$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge ;

— si $\alpha > 1/2$, alors la série alternée $\sum v_n$ converge et la série $\sum w_n$ converge absolument, donc la série $\sum u_n$ converge.

✍ *Comme $u_n \sim v_n$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ (comparaison à une série de Riemann).*

Soit E*, l'espace vectoriel des applications continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui ont une limite finie au voisinage de* $+\infty$*. On considère l'endomorphisme* T *de* E *défini par*

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer les éléments propres de T*.*

rms128-693

Soit f*, une fonction continue et positive sur* $[a, b]$ *(où* $a < b$*). Calculer la limite de la suite de terme général*

$$u_n = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^n \, dt \right)^{1/n}.$$

rms128-694

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite de nombres réels strictement positifs qui décroît vers* 0*. Pour tout* $x > 0$*, on pose*

$$N(x) = \#\{n \in \mathbb{N} \,:\, a_n \geqslant x\}.$$

Démontrer que la fonction N *est intégrable sur* $]0, +\infty[$ *si, et seulement si, la série* $\sum a_n$ *converge et que, dans ce cas,*

$$\int_0^{+\infty} N(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

On étudie la fonction f *définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \textit{où} \quad u_n(x) = \ell n(1 + e^{-nx}).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition* I *de la fonction* f.
2. *Démontrer que* f *est continue et strictement décroissante sur* I.
3. *Démontrer que* f *admet une limite au voisinage de* $+\infty$ *et calculer cette limite.*
4. *Trouver un équivalent de* f *au voisinage de* 0. *On* ***admettra*** *que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

1. Si $x > 0$, alors e^{-nx} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $u_n(x) \sim (e^{-x})^n$. Comme $0 < e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ est absolument convergente et la série $\sum u_n(x)$ aussi.
Si $x \leqslant 0$, alors $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Le réel $f(x)$ est donc défini si, et seulement si, $x > 0$.

✍ *Telle qu'elle est posée, la question appelle une condition nécessaire et suffisante de convergence.*

2. Il est clair que chaque fonction u_n est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est strictement décroissante.

✍ *La fonction* u_0 *est constante !*

❧ Si $0 < x < y$, alors

$$f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\big[u_n(x) - u_n(y)\big]}_{<0} < 0.$$

✍ *Il faut avoir justifié la convergence des deux séries pour utiliser la linéarité de la somme.*

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I.
❧ Pour $a > 0$, la décroissance de chaque fonction u_n nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a).$$

Et comme $a > 0$, la série (de terme général positif) $\sum u_n(a)$ est convergente. Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série absolument convergente, on a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Comme chaque fonction u_n est continue, on en déduit que la somme f est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$.
La fonction f est donc continue sur l'union de ces intervalles, c'est-à-dire sur $I =]0, +\infty[$.

✍ *Si la série de fonctions* $\sum u_n$ *convergeait uniformément sur* $]0, +\infty[$*, alors on pourrait appliquer le Théorème d'interversion des limites, qui affirme en particulier que la série de terme général*

$$\ell_n = \lim_{x \to 0} u_n(x) = \ell n\, 2$$

est convergente. Comme la série $\sum \ell_n$ *diverge grossièrement, la série de fonctions* $\sum u_n$ *n'est pas uniformément convergente sur* $]0, +\infty[$.

3. La fonction f est décroissante et positive (les fonctions u_n sont toutes positives), donc elle tend vers une limite finie (positive) au voisinage de $+\infty$.
❧ Chaque fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$ (limite nulle pour tout $n \geqslant 1$; égale à $\ell n\, 2$ pour $n = 0$). La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle

$[212, +\infty[$ (qui est un voisinage de $+\infty$), donc la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ (merci, on savait déjà) ; la série des limites $\sum \ell_n$ converge (merci, on avait remarqué) et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = \ell n\, 2.$$

✍ *Pour les mêmes raisons, la fonction f tend vers une limite, finie ou infinie, au voisinage de 0. Comme les fonctions u_n sont positives,*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0, \quad f(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$$

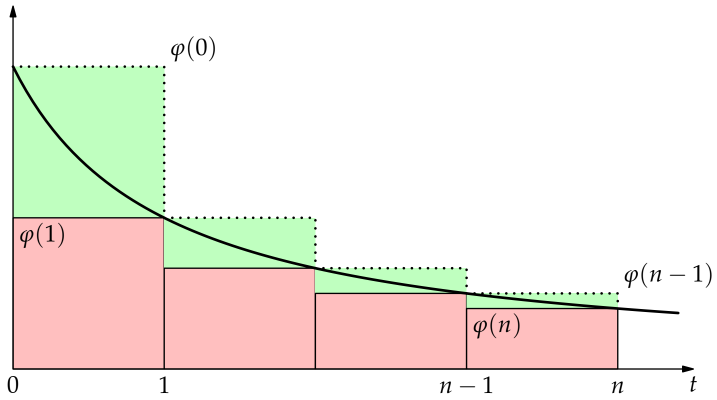
et comme l'existence des limites lorsque x tend vers 0 est assurée,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \to 0} f(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(0) = (N+1)\, \ell n\, 2.$$

On en déduit que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

4. Soit $x > 0$. La fonction $\varphi = [t \mapsto \ell n(1 + e^{-tx})]$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. En comparant sommes et intégrale, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \leqslant \int_0^n \varphi(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x). \tag{†}$$



La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente à e^{-xt} lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et on peut donc passer à la limite dans (†).

$$f(x) - u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt \leqslant f(x) \tag{‡}$$

❧ On effectue d'abord le changement de variable affine $s = xt$.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \ell n(1 + e^{-s})\, ds.$$

✍ *Ce changement de variable est possible car $x > 0$.*

❧ On effectue ensuite le changement de variable usuel $u = e^{-s}$.

$$\int_0^{+\infty} \ell n(1 + e^{-s})\, ds = \int_0^1 \frac{\ell n(1+u)}{u}\, du.$$

✍ *L'application $[s \mapsto e^{-s}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ sur l'intervalle $J =]0, 1]$ et on a déjà établi l'intégrabilité de $[s \mapsto \ell n(1 + e^{-s})]$ sur I.*

❧ Le développement en série entière de $\ell n(1+u)$ nous donne

$$\forall\, 0 < u < 1, \qquad \frac{\ell n(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n+1}.$$

On reconnaît ici une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1.

Les fonctions $a_n = [u \mapsto (-u)^n/(n+1)]$ sont continues sur le segment $[0,1]$ (et donc intégrables) ; la série de fonctions $\sum a_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et sa somme est continue (en tant que somme d'une série entière sur un intervalle contenu dans l'intervalle ouvert de convergence) ; enfin, la série de terme général

$$\int_0^1 |a_n(u)|\, du = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1}\, du = \frac{1}{(n+1)^2}$$

est convergente.

D'après le Théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ell n(1+u)}{u}\, du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(u)\, du = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(u)\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

et finalement

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\pi}{12x}.$$

✍ *La borne supérieure de l'intervalle d'intégration n'appartient pas à l'intervalle ouvert de convergence de la série entière ($1 \notin]-1,1[$), donc on ne peut ici se contenter d'indiquer qu'on intègre une série entière pour justifier l'intégration terme à terme.*

Il est prudent à ce propos de parler de primitivation terme à terme *pour les séries entières (on intègre terme à terme sur un segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence).*

Décomposer en série entière l'application f *définie par*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

La fonction rationnelle définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (ses pôles sont complexes : j et j^2) et $\varphi(t) \sim {}^1\!/\!_{t^2}$ au voisinage de $-\infty$, donc φ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty, x]$ pour tout réel x et l'application f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

✍ *Comme* φ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, la fonction* f *est en fait la primitive de* φ *qui tend vers* 0 *au voisinage de* $-\infty$ *(Théorème fondamental).*

❧ D'après la relation de Chasles et l'Astuce taupinale,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-1,1[, \qquad f(x) &= f(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} \\ &= f(0) + \int_0^x \frac{1-t}{1-t^3}\,dt = f(0) + \int_0^x (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n}\,dt.\end{aligned}$$

Le rayon de convergence des deux séries entières $\sum t^{3n}$ et $\sum t^{3n+1}$ est évidemment égal à 1.

✍ *Le terme général est borné pour* $|t| \leqslant 1$ *et non borné pour* $|t| > 1$.

Une série entière converge normalement sur tout segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence, donc les deux séries convergent normalement sur le segment $[0 \leftrightarrow x] \subset\,]-1,1[$. On peut donc intégrer terme à terme et en déduire que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \qquad f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}.$$

✍ *Cela prouve que* f *est développable en série entière et que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à* 1.

On a remarqué plus haut que $f' = \varphi$ *et la théorie des séries entières nous assure que le rayon de convergence du développement de* f *est égal au rayon de convergence du développement de* φ*. Or la décomposition en éléments simples*

$$\forall\, t \in \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}, \qquad \varphi(t) = \frac{a}{j-t} + \frac{\overline{a}}{j^2-t}$$

montre que le rayon de convergence du développement de φ *est égal à* 1.

❧ Il reste à calculer $f(0)$ en se rappelant d'une formule bien utile :

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}.$$

Il suffit donc de remarquer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t+t^2} = \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4} = \frac{1}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

pour en déduire que

$$f(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+{}^1\!/\!_2)\Big)\Big]_{-\infty}^{0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Soient a et b, deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\forall\, t \in I, \quad x^p(t)\big(x'(t) + a(t)x(t)\big) = b(t) \tag{E}$$

et un couple $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 pour lequel l'équation (E) admet une, et une seule, solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur I_0 et telle que $x(t_0) = x_0$.

Si une fonction x est solution de l'équation différentielle (E) sur un intervalle I, alors la fonction $y = x^{p+1}$ est solution de l'équation différentielle *linéaire*

$$\forall\, t \in I, \quad \frac{1}{p+1}\, y'(t) + a(t)y(t) = b(t). \tag{E'}$$

Comme $x(t_0) = x_0$, alors $y(t_0) = x_0^{p+1}$ et on sait alors résoudre l'équation (E') : en notant A, la primitive de a qui s'annule en 0,

$$\forall\, t \in I, \quad y(t) = x_0^{p+1} \exp\big(-(p+1)A(t)\big) + \int_0^t b(s) \exp\big(-(p+1)\big[A(t) - A(s)\big]\big)\, ds. \tag{†}$$

✍ *Comme a est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur cet intervalles et parmi ces primitives, une seule s'annule en $t = 0$.*

Comme $x_0 > 0$, alors $y(0) > 0$, donc $y(t)$ reste strictement positive pour t assez proche de 0 et (toujours par continuité) $x(t)$ reste strictement positive pour t assez proche de 0. En notant I_0, un intervalle voisinage de 0 sur lequel la fonction x et la fonction y définie par (†) restent strictement positives, on a

$$\forall\, t \in I_0, \quad x(t) = \sqrt[p+1]{x_0^{p+1} \exp\big(-(p+1)A(t)\big) + \int_0^t b(s) \exp\big(-(p+1)\big[A(t) - A(s)\big]\big)\, ds}. \tag{‡}$$

❧ On vient ainsi de démontrer qu'il existait au plus une solution de (E) définie sur un intervalle I_0 voisinage de 0 donné.

Réciproquement, les calculs qui précèdent prouvent que la fonction x définie sur un intervalle I_0 voisinage de 0 par $(\star)$ est bien une solution de (E).

✍ *La théorie de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires montre que toutes les solutions sont définies sur l'intervalle qui figure dans l'équation.*

L'équation (E) n'est pas linéaire et, pour ce type d'équation, on ne peut savoir a priori *si toutes les solutions sont définies sur l'intervalle I tout entier ou seulement sur un sous-intervalle de I.*

> *On pose* $H(0,0) = 0$ *et*
> $$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad H(x,y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}.$$
> **1.** *Démontrer que* H *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et continue sur* $\mathbb{R}^2$.
> **2.** *L'application* H *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

1. La fonction H est une fonction rationnelle dont l'unique pôle est $(0,0)$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

✍ *Toute partie finie est fermée, donc* U *est une partie ouverte (en tant que complémentaire d'une partie fermée).*

❧ Pour étudier la continuité de H en $(0,0)$, on peut se restreindre au disque unité $D = [x^2+y^2 \leqslant 1]$. Sur ce disque, $|x| \leqslant 1$ donc

$$\forall\,(x,y) \in D, \qquad 0 \leqslant x^4 + y^2 \leqslant x^4 + y^4$$

et donc

$$\forall\,(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}, \qquad \big|H(x,y) - H(0,0)\big| = \big|H(x,y)\big| \leqslant \frac{x^4|y|}{x^4+y^4} = r \cdot \frac{\cos^4\theta\,|\sin\theta|}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

✍ *Comme* $\mathbb{R}^2$ *est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur* $\mathbb{R}^2$ *définissent la même topologie. On peut donc choisir la norme euclidienne canonique (= "passer en coordonnées polaires") pour étudier la continuité de* H.

Il est clair que $\cos^4\theta\,|\sin\theta| \leqslant 1$. Par ailleurs, le dénominateur est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, donc elle est bornée et atteint un minimum.

✍ *Étudier une fonction continue et périodique de période* $T > 0$*, c'est en fait étudier une fonction continue sur le segment* $[0,T]$.

Or $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne s'annulent pas en même temps, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos^4\theta + \sin^4\theta \geqslant \cos^4\alpha + \sin^4\alpha > 0.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\,(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}, \qquad \big|H(x,y) - H(0,0)\big| \leqslant \frac{\big\|(x,y) - (0,0)\big\|_2}{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}$$

ce qui prouve que la fonction H est continue en particulier au point $(0,0)$ et par conséquent qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

✍ *Cette question n'était pas posée dans l'énoncé original.*

2. On vérifie sans peine que les deux dérivées partielles de H sont bien définies en $(0,0)$ et que

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial H}{\partial y}(0,0) = 0.$$

On a justifié plus haut que les dérivées partielles de H étaient bien définies sur l'ouvert U. En particulier,

$$\forall\,(x,y) \in U, \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4(x^4 - y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$

❧ Pour tout réel α, si x tend vers 0, alors $(x, \alpha x^2)$ tend vers $(0,0)$.

✍ *On tend vers l'origine en se déplaçant sur la parabole d'équation* $y = \alpha x^2$.

Et comme

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(x, \alpha x^2) = \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$$

on constate que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial H}{\partial y}(x, \alpha x^2) \neq 0 = \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0),$$

ce qui prouve que la dérivée partielle par rapport à y n'est pas continue au point $(0, 0)$.

✍ *Une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, ses dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et continues en chaque point de $\mathbb{R}^2$.*

La fonction H n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

rms128-722

1. *Soit X, une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que*

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

2. *On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise et on note X_N, le plus grand des numéros tirés.*

2. a. *Calculer $\mathbf{E}(X_N)$. (On ne cherchera pas à simplifier l'expression trouvée.)*

2. b. *Calculer un équivalent de $\mathbf{E}(X_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.*

1. Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série (de terme général *positif*) $\sum k\,\mathbf{P}(X = k)$ est (absolument) convergente.

En particulier, comme pour toute série convergente, la suite des restes converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell\,\mathbf{P}(X = \ell) = 0. \tag{$\star$}$$

❧ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on décompose l'évènement $[X > k]$ dans le système complet d'évènements associé à X :

$$[X > k] = \bigsqcup_{\ell=k+1}^{+\infty} [X = \ell].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par σ-additivité de **P**,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) &= \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{\ell=k+1}^{n} \mathbf{P}(X = \ell) + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell)\Big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=0}^{\ell-1} \mathbf{P}(X = \ell) + (n+1)\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \ell\,\mathbf{P}(X = \ell) + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1)\,\mathbf{P}(X = \ell).
\end{aligned}$$

❧ Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell\,\mathbf{P}(X = \ell) - \sum_{\ell=1}^{n} \ell\,\mathbf{P}(X = \ell) - \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1)\,\mathbf{P}(X = \ell) \\
&= \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell\,\mathbf{P}(X = \ell) - \underbrace{\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1)\,\mathbf{P}(X = \ell)}_{\geqslant 0} \\
&= \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \underbrace{[\ell - (n+1)]}_{\geqslant 0}\,\mathbf{P}(X = \ell)
\end{aligned}$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \mathbf{E}(X) - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) \leqslant \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell\,\mathbf{P}(X = \ell).$$

❧ On peut alors déduire de $(\star)$ et du théorème d'encadrement que la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est convergente et que

$$\mathbf{E}(X) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

✍ *Cette analyse est assez fine, puisqu'on a démontré au passage que*

$$\sum_{\ell=n+1}^{+\infty}(n+1)\,\mathbf{P}(X=\ell)=(n+1)\,\mathbf{P}(X\geqslant n+1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

alors que la célèbre inégalité de Markov nous assure seulement (sous la même hypothèse d'intégrabilité de X) que

$$\mathbf{P}(X\geqslant n+1)\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(1/n).$$

❧ *Au passage, la réciproque est vraie (elle se déduit facilement des calculs qui précèdent) et ces deux propriétés font partie du cours.*

2. a. Commençons par mettre les choses au net !

On considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ et des variables aléatoires $U_1,\ldots,U_n$ définies sur cet espace, indépendantes (tirages successifs avec remise) et suivant toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,N]\!]$.

On étudie ici

$$X_N=\max\{U_1,\ldots,U_n\},$$

qui est bien une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

✍ *Toute fonction d'une famille finie de variables aléatoires discrètes est encore une variable aléatoire discrète.*

❧ Comme X_N ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

✍ *Toute variable aléatoire presque sûrement bornée admet des moments de tout ordre.*

❧ Il est clair que

$$\forall\,\omega\in\Omega,\quad X_N(\omega)\leqslant k\iff\forall\,1\leqslant i\leqslant n,\quad U_i(\omega)\leqslant k.$$

Autrement dit,

$$[X_N\leqslant k]=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}[U_i\leqslant k]\in\mathcal{A}$$

et comme les variables aléatoires U_i sont supposées indépendantes et de loi uniforme,

$$\forall\,1\leqslant k<N,\quad \mathbf{P}(X_n>k)=1-\mathbf{P}(X\leqslant k)=1-\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbf{P}(U_i\leqslant k)=1-(k/N)^n.$$

✍ *Pour $k\geqslant N$, les évènements $[U_i\leqslant k]$ sont certains et $[X_n>k]$ est impossible :* $\mathbf{P}(X_n>k)=0$.

❧ On déduit alors de la question précédente que

$$\mathbf{E}(X_N)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X_N>k)=\sum_{k=0}^{N-1}\big[1-(k/N)^n\big].$$

2. b. On reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{1}{N}\,\mathbf{E}(X_N)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\big[1-(k/N)^n\big]\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1 1-x^n\,dx$$

puisque la fonction $[x\mapsto 1-x^n]$ est continue sur le segment $[0,1]$.

On en déduit enfin que

$$\mathbf{E}(X_N)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{n+1}\cdot N.$$

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise. On note X_k, le numéro de la k-ième boule tirée.
On dit qu'il y a un ***record*** *lors du k-ième tirage si*

$$X_k > \max\{X_1, \dots, X_{k-1}\}.$$

Par convention, il y a un record lors du premier tirage.
On note S_n, le nombre de records au cours des n tirages.

1. *Déterminer $\mathbf{P}(S_n = 1)$ et $\mathbf{P}(S_n = n)$.*

2. *Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on note T_k, l'indicatrice d'un record lors du k-ième tirage.*

2. a. *Déterminer la loi des variables aléatoires T_k.*

2. b. *En déduire l'espérance de S_n.*

Commençons par mettre cet énoncé d'aplomb...

Il s'agit de vider une urne en retirant une à une les boules qu'elle contient initialement. Autrement dit, le résultat d'une "expérience" est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, l'entier $\sigma(k)$ désigne le numéro de la k-ième boule tirée.

❧ Nous allons donc considérer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire U définie sur cet espace, qui suit la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

❧ Les applications $X_k : \Omega \to [\![1, n]\!]$ qui décrivent les résultats des tirages successifs sont des fonctions de U, ce sont donc des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, \omega \in \Omega, \quad X_k(\omega) = U(\omega)(k) = \pi_k\big(U(\omega)\big)$$

où $\pi_k : \mathfrak{S}_n \to [\![1, n]\!]$ est l'évaluation $[\sigma \mapsto \sigma(k)]$.

❧ Les applications T_k sont aussi des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ pour les mêmes raisons : l'application

$$T_k = \mathbb{1}_{[X_k > X_1, \dots, X_k > X_{k-1}]} = \mathbb{1}_{[X_k > X_1] \cap \dots \cap [X_k > X_{k-1}]}$$

est une variable aléatoire de Bernoulli en tant qu'indicatrice d'un évènement :

$$[X_k > X_1] \cap \dots \cap [X_k > X_{k-1}] \in \mathcal{A}$$

(puisque les $X_1, \dots, X_k$ sont des variables aléatoires et qu'une tribu est stable par intersection).

❧ Enfin, le nombre S_n de records est aussi une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en tant que somme de variables aléatoires :

$$S_n = T_1 + \dots + T_n.$$

1. On a démontré que S_n était une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, donc $[S_n = 1]$ et $[S_n = n]$ sont bien des évènements.

❧ Par convention, il y a un record au premier tirage. Par conséquent, s'il n'y a qu'un seul record au cours de l'expérience (ce que signifie $[S_n = 1]$), c'est qu'on a commencé par tirer la boule n et

$$[S_n = 1] = \bigsqcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \\ \sigma(1) = n}} [U = \sigma].$$

Comme U suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ (= un ensemble fini de cardinal $n!$), on en déduit que

$$\mathbf{P}(S_n = 1) = \frac{\#\big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ :\ \sigma(1) = n\big\}}{n!} = \frac{1}{n}.$$

✍ *Les permutations σ telles que $\sigma(1) = n$ correspondent aux bijections de $[\![2, n]\!]$ sur $[\![1, n-1]\!]$. Il y en a donc autant que de permutations dans $\mathfrak{S}_{n-1}$, c'est-à-dire $(n-1)!$.*

❧ Il y a n records en tirages si, et seulement si, chaque tirage amène une boule d'un numéro supérieur aux numéros précédents, c'est-à-dire si on vide l'urne en tirant les boules par ordre croissant de numéros :

$$[S_n = n] = \bigsqcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \\ \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)}} [U = \sigma] = [U = I]$$

donc
$$\mathbf{P}(S_n = n) = \frac{1}{n!}.$$

2. a. On a démontré que les T_k étaient bien des variables aléatoires et comme ce sont des indicatrices, ce sont des variables aléatoires de Bernoulli. Leur loi est caractérisée par leur paramètre, égal à $\mathbf{P}(T_k = 1)$.

❧ Par convention, il y a un record lors du premier tirage, donc $\mathbf{P}(T_1 = 1) = 1$.

❧ On analyse l'évènement $[T_k = 1]$ comme les précédents. Pour $2 \leqslant k \leqslant n$,
$$\begin{aligned}[T_k = 1] &= [X_k > X_1, \dots, X_k > X_{k-1}] \\ &= \bigsqcup_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\ :\\ \sigma(1)<\sigma(k),\dots,\sigma(k-1)<\sigma(k)}} [U = \sigma]\end{aligned}$$
et donc
$$\mathbf{P}(T_k = 1) = \frac{\#\big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n\ :\ \sigma(1) < \sigma(k), \dots, \sigma(k-1) < \sigma(k)\big\}}{n!}.$$
Pour dénombrer cette partie de $\mathfrak{S}_n$, nous allons discuter sur les valeurs possibles de $\sigma(k)$: cet entier est compris entre k et n.

❧ Si $\sigma(k) = \ell$, on doit choisir les valeurs de $\sigma(1)$, ..., $\sigma(k-1)$ dans $[\![1, \ell-1]\!]$ (donc $\binom{\ell-1}{k-1}$ choix possibles), leur assigner un ordre (donc $(k-1)!$ permutations possibles) et enfin assigner un ordre aux $(n-k)$ valeurs restantes (donc $(n-k)!$ permutations possibles).

Ainsi,
$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(T_k = 1) = \frac{1}{n!}\sum_{\ell=k}^{n}\binom{\ell-1}{k-1}(k-1)!(n-k)! = \frac{1}{k\binom{n}{k}}\sum_{\ell=k}^{n}\binom{\ell-1}{k-1} = \frac{1}{k}$$
d'après la formule généralisée du triangle de Pascal.

✍ *Profitons de l'occasion pour un rappel utile.*

Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir une partie de cardinal k dans un ensemble de cardinal n.

Considérons qu'on choisisse k entiers dans l'intervalle $[\![1, n]\!]$. Le plus grand entier choisi, que nous noterons ℓ, est donc compris entre k (au cas où on choisirait les entiers $1, 2, \dots, k$) et n.

Ce plus grand entier étant choisi, il reste à choisir $(k-1)$ entiers dans l'intervalle restant $[\![1, \ell[\![= [\![1, \ell-1]\!]$ et il y a $\binom{\ell-1}{k-1}$ choix pour cela.

Ainsi
$$\binom{n}{k} = \sum_{\ell=k}^{n}\binom{\ell-1}{k-1}.$$

✍ *On a remarqué en commençant que*
$$\mathbf{P}(S_n = n) = \frac{1}{n}!$$
c'est-à-dire
$$\mathbf{P}(T_1 = 1, T_2 = 1, \dots, T_n = 1) = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(T_k = 1).$$
Cela ne prouve pas que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ soient indépendantes !

2. b. La variable aléatoire S_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance est bien définie.

Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}(S_n) = \mathbf{E}(T_1 + \cdots + T_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(T_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

On considère une famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *de variables aléatoires indépendates définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes d'espérance finie et on considère la variable aléatoire*

$$A : \Omega \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad A(\omega) = \big(a_{i,j}(\omega)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

1. *Démontrer que* $\det A$ *est une variable aléatoire d'espérance finie et que*

$$\mathbf{E}(\det A) = \det\big(\mathbf{E}(a_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

2. *On suppose que les variables aléatoires* $a_{i,j}$ *suivent toutes la même loi. Calculer* $\mathbf{E}[\chi_A(x)]$ *en fonction de* $x \in \mathbb{R}$.

1. Par définition du déterminant,

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Comme les $a_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance finie et que les couples $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ sont deux à deux distincts, chaque produit

$$a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}(a_{k,\sigma(k)}).$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\det A$ est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(\det A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \mathbf{E}(a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}(a_{k,\sigma(k)}) = \det\big(\mathbf{E}(a_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

2. Si les $a_{i,j}$ suivent toutes la même loi, elles ont en particulier la même espérance, que nous noterons m.

En appliquant ce qui précède à la matrice $B = xI_n - A$,

$$\mathbf{E}[\chi_A(x)] = \det\big(\mathbf{E}(b_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où $b_{i,j} = -a_{i,j}$ pour $i \neq j$ et $b_{i,i} = x - a_{i,i}$. Par conséquent,

$$\big(\mathbf{E}(b_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = xI_n - mJ_n$$

où $J_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

❧ Le rang de J_n est égal à 1, donc 0 est une valeur propre de J_n dont la multiplicité est au moins égale à $(n-1)$. La matrice J_n est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et sa trace, égale à n, est égale à la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité).

Ainsi, les valeurs propres de mJ_n sont 0 (de multiplicité exactement $(n-1)$) et nm (valeur propre simple), donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}[\chi_A(x)] = \det(xI_n - mJ_n) = x^{n-1}(x - nm).$$

> *Soient* A *et* B*, deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*, qui suivent toutes deux la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$*.*
> *Calculer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle*
>
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + \big(A(\omega) - 1\big)x'(t) + B(\omega)x(t) = 0 \tag{E_ω}$$
>
> *tendent vers* 0 *lorsque* t *tend vers* $+\infty$*.*

Fixons $\omega \in \Omega$.
❧ Pour calculer les solutions de (E_ω), il faut connaître les solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + \big(A(\omega) - 1\big)\lambda + B(\omega) = 0.$$

❧ Si le discriminant $[A(\omega)-1]^2-4B$ est strictement positif, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, dont le produit est égal à $B(\omega)$ et donc strictement positif.

✍ *Comme* B *suit une loi géométrique, toutes les valeurs de* B *sont supérieures à* 1*.*

Les deux racines sont donc de même signe et ce signe est celui de leur somme, c'est-à-dire le signe de $1 - A(\omega) < 0$.

✍ *Même remarque sur* A *! Et comme le discriminant est ici supposé strictement positif,* $A(\omega)$ *ne peut être égal à* 1*.*

Comme les racines λ_1 et λ_2 sont strictement négatives et que la solution générale de (E_ω) est de la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t},$$

toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.
❧ Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est nul, alors l'équation caractéristique possède une racine double $\lambda = \frac{1-A(\omega)}{2} \leqslant 0$.
Si $A(\omega) > 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}$$

et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (puisque $\lambda < 0$).
Si $A(\omega) = 1$, alors la solution générale est une fonction affine :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \alpha + \beta t$$

et seule la solution identiquement nulle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
❧ Si le discriminant $[A(\omega)-1]^2-4B$ est strictement négatif, alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $\lambda \pm i\mu$.
La somme des racines est connue : $2\lambda = 1 - A(\omega) \leqslant 0$ et nous retrouvons la même discussion.
Si $A(\omega) > 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \alpha e^{\lambda t}\cos(\mu t + \varphi)$$

et comme $\lambda < 0$, toutes les solutions tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
Si $A(\omega) = 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \alpha\cos(\mu t + \varphi)$$

et seule la solution identiquement nulle tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
❧ En conclusion, toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $A(\omega) > 1$.
❧ Comme A suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, la probabilité pour que toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$ est égale à

$$\mathbf{P}(A > 1) = 1 - \mathbf{P}(A = 1) = 1 - p.$$

Soit N, une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. On lance N fois de suite une pièce équilibrée et on note X, le nombre de fois où Pile est apparu.

1. *Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N=n]$.*

2. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On définit une fonction f_k en posant*

$$f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

2. a. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière.*

2. b. *Calculer l'expression de $f_k(x)$ dans l'intervalle ouvert de convergence.*

2. c. *Déterminer la loi de X.*

3. *Calculer l'espérance de X.*

Il est bon de préciser le modèle dans lequel nous allons effectuer les calculs.

❧ On considère ici une famille $(N; X_1, X_2, \dots)$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en supposant que N suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ et que les X_i suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$.

❧ L'application X étudiée ici est définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega),$$

ce qui a bien un sens puisque la variable aléatoire N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Il est également clair que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

❧ Montrons que cette application X est effectivement une variable aléatoire.

❧ Comme N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, la famille $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad [X=k] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big([X=k] \cap [N=n]\big) \tag{†}$$

et

$$\forall\, (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \qquad [X=k] \cap [N=n] = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right] \cap [N=n]. \tag{‡}$$

❧ Comme les X_i sont des variables aléatoires, alors $X_1+\cdots+X_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$) et comme N est aussi une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad [N=n] \in \mathcal{A}.$$

Une tribu est stable par intersection et par union dénombrable, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad [X=k] \in \mathcal{A},$$

ce qui prouve que X est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

✍ *Maintenant, on peut y aller sereinement.*

1. Il s'agit ici de calculer $\mathbf{P}(X=k \mid N=n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❧ D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires N et $X_1+\cdots+X_n$ sont indépendantes. En tant que somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$, la variable aléatoire $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$. D'après (‡),

$$\mathbf{P}\big([X=k]\cap[N=n]\big) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\mathbf{P}(N=n).$$

Cette probabilité est donc nulle pour tout entier $k > n$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X = k \mid N = n) = \frac{\mathbf{P}\big([X = k] \cap [N = n]\big)}{\mathbf{P}(N = n)} = \binom{k}{n}\frac{1}{2^n}. \qquad (\star)$$

2. a. Pour $x > 0$ et $n \geqslant k$,

$$\frac{\binom{n+1}{k}x^{n+1}}{\binom{n}{k}x^n} = \frac{(n+1)}{(n+1-k)} \cdot x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x.$$

Par conséquent, la série converge absolument pour $0 < x < 1$ et diverge grossièrement pour $x > 1$ et le rayon de convergence est donc égal à 1.

2. b. Écrivons $f_k(x)$ sous une forme plus claire :

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k}.$$

On reconnaît au second membre la dérivée k-ième de x^n. Or, sur son intervalle ouvert de convergence, la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et ses dérivées peuvent être calculées en dérivant terme à terme. On en déduit que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad f_k(x) = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
$$= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. c. D'après la formule des probabilités totales (†) et la loi conditionnelle ($\star$),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n)$$
$$= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \cdot pq^{n-1} = \frac{p}{q}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{q}{2}\right)^n.$$

On déduit de la question précédente que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{2p}{q^2}\left(\frac{q}{2-q}\right)^{k+1} = \frac{2p}{q^2}\left(\frac{q}{1+p}\right)^{k+1}.$$

✍ *La formule littérale (†) est vraie pour $n = 0$ aussi, mais l'application "numérique" qu'on vient d'en donner n'est vraie que pour $n \geqslant 1$ puisque $\mathbf{P}(N = 0) = 0$ (et non pas p/q, qui pourrait être une valeur strictement supérieure à 1).*

De même,

$$\mathbf{P}(X = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 0 \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \cdot pq^{n-1} = \frac{p}{1+q}.$$

✍ *Il est intéressant de vérifier les calculs précédents par des simulations.*

❧ On commence par réaliser des échantillons de la variable aléatoire X.

```
import numpy.random as rd

def X(p):
    N = rd.geometric(p)
    return rd.binomial(N, .5)

def echantillon(p, N):
    return np.array([X(p) for _ in range(N)])
```

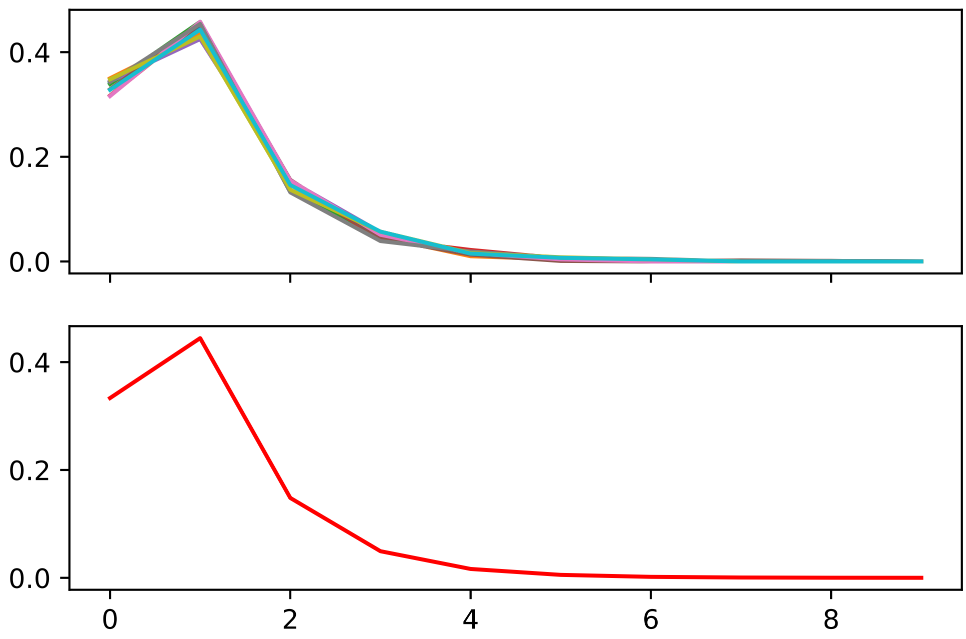
❧ On continue en analysant les valeurs de l'échantillon (= on calcule la fréquence des valeurs observées) pour les comparer aux probabilités calculées (= la "loi théorique").

```
def analyse_echantillon(ech):
    L = []
    for k in range(10):
        L.append(np.mean(ech==k))
    return L

def loi_theorique(p):
    q = 1-p
    K = np.arange(10)
    P = 2*p/q**2*(q/(2-q))**(K+1)
    P[0] = p/(2-q)
    return K, P
```

❧ On compare graphiquement et on constate que les simulations sont tout à fait cohérentes avec les calculs qui précèdent.

```
p = 0.5
K, P = loi_theorique(p)
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2)
plt.subplot(211)
for _ in range(10):
    ech = echantillon(p, 1000)
    plt.plot(K, analyse_echantillon(ech))
plt.subplot(212)
plt.plot(K, P, 'r')
for ax in (ax1,ax2):
    ax.label_outer()
```



3. La variable aléatoire X est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum k\,\mathbf{P}(X=k)$ est convergente. Or $0 < \frac{q}{1+p} < 1$, donc cette série converge bien et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X=k) = \frac{2p}{q^2}\frac{q^2}{(1+p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\Big(\frac{q}{1+p}\Big)^{k-1} = \frac{1}{2p}.$$

✍ *On a utilisé la propriété suivante*

$$\forall\, x \in \,]-1, 1[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et procédé à quelques simplifications.

❧ *Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.*

❧ Une fois de plus, il est intéressant de vérifier les calculs au moyen d'une simulation.

```
def moy_empirique(p):
    ech = echantillon(p, 10000)
    freq = analyse_echantillon(ech)
    valeurs = np.array(list(range(len(freq))))
    return np.dot(freq, valeurs), 1/(2*p)
```

En prenant différentes valeurs de p, on constate la cohérence de l'expression théorique de l'espérance avec les valeurs calculées lors des simulations.

On dispose de $(p+1)$ urnes $U_0, \dots, U_p$ contenant chacune p boules : l'urne i contient i boules blanches et $(p-i)$ boules noires.
On choisit une urne aléatoirement et on effectue ensuite n tirages successifs avec remise dans cette urne.
On note alors N_p, la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. *Déterminer la probabilité conditionnelle de $[N_p = k]$ sachant qu'on a choisi l'urne i.*

2. *Calculer l'espérance de N_p.*

Une fois de plus, il faut commencer par poser le cadre des calculs probabilistes.

❧ On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une famille de variables aléatoires $(U, X_1, \dots, X_n)$ définies sur cet espace.

❧ On suppose que la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\![0, p]\!]$: cette variable modélise le choix de l'urne.

❧ On suppose ensuite que, pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant p$, sous la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[U=i]}$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$$\forall\, (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \{0;1\}^n, \quad \mathbf{P}_{[U=i]}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{[U=i]}(X_k = \varepsilon_k)$$

et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(i/p)$ (hypothèse d'équiprobabilité) :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}_{[U=i]}(X_k = 1) = \frac{i}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{[U=i]}(X_k = 0) = 1 - \frac{i}{p}.$$

❧ L'application $N_p = X_1 + \cdots + X_n$ est donc une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (en tant que somme des variables aléatoires discrètes).

1. Par hypothèse, pour la mesure conditionnelle $\mathbf{P}_{[U=i]}$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(i/p)$. Par conséquent, leur somme N_p suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, i/p)$.

2. La variable aléatoire N_p prend des valeurs comprises entre 0 et n, donc c'est une variable d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(N_p) = \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbf{P}(N_p = k).$$

Le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire U nous permet d'appliquer la formule des probabilités totales :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(N_p = k) = \sum_{i=0}^{p} \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k)\, \mathbf{P}(U = i) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N_p) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k) \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k) && \text{(permutation des sommes)} \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} n \cdot \frac{i}{p} && \text{(espérance de la loi } \mathscr{B}(n, i/p)\text{)} \\
&= \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

✍ *Sur l'ensemble des urnes, il y a autant de boules noires que de boules blanches et comme on choisit l'urne "au hasard", on n'est pas très étonné que le nombre moyen de boules blanches tirées au cours de n tirages soit $n/2$.*

Soient $X_1, \dots, X_n$, des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et qu'elle suivent toutes la loi de Rademacher centrée :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = 1/2.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdot + X_n$ et on fixe un réel $\varepsilon > 0$.

1. *Majorer la probabilité*

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big).$$

2. *Démontrer que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{tS_n}) = \operatorname{ch}^n t.$$

3. *Démontrer que*

$$\forall\, t > 0, \quad \operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}.$$

4. *Démontrer que*

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \exp\Big(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\Big).$$

5. *En déduire que*

$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \exp\Big(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\Big).$$

1. Il est clair que les variables aléatoires X_k sont centrées. Par linéarité de l'espérance, la variable aléatoire S_n est centrée elle aussi.

Comme elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire S_n est aussi une variable aléatoire de variance finie.

✍ *Une variable aléatoire presque sûrement bornée admet des moments de tout ordre.*

Comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) = n\,\mathbf{V}(X_1).$$

Comme X_1 est centrée (formule de Koenig-Huyghens),

$$\mathbf{V}(S_n) = n\,\mathbf{E}(X_1^2) = n$$

et donc $\mathbf{V}(S_n/n) = 1/n$.

On déduit alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}\Big[\frac{S_n}{n}\Big]\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

2. Comme les variables aléatoires X_k ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, les variables aléatoires e^{tX_k} sont des variables aléatoires d'espérance finie.

✍ *L'image d'une variable aléatoire discrète par une fonction quelconque est toujours une variable aléatoire discrète.*

Comme les X_k sont indépendantes, les e^{tX_k} sont indépendantes (lemme des coalitions) et on sait qu'un produit de variables aléatoires d'espérance finie indépendantes est encore une variable aléatoire d'espérance finie. De plus, comme les X_k sont des variables aléatoires de même loi,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}(e^{tX_k}) = \big[\mathbf{E}(e^{tX_1})\big]^n = \Big(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\Big)^n$$

(formule de transfert). On a ainsi démontré que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}(e^{tS_n}) = \operatorname{ch}^n t.$$

3. On connaît les développements en série entière de exp et de ch : quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \cdots \qquad \exp \frac{t^2}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \cdots .$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$(2n)! = n! \times (n+1)(n+2)\cdots(n+n) \geqslant n! \cdot 3^n > 2^n \cdot n! > 0.$$

Par conséquent,

$$\forall\, t > 0, \quad \operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}.$$

4. Comme $t > 0$, la fonction $[x \mapsto e^{tx}]$ est strictement croissante, donc

$$\left[\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right] = [e^{tS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}]$$

et on déduit de l'inégalité de Markov que

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}[e^{tS_n}]}{e^{nt\varepsilon}} \leqslant e^{nt^2/2} \cdot e^{-nt\varepsilon}.$$

5. On a établi l'inégalité précédente pour tout $t > 0$ alors que le membre de gauche est *indépendant* du paramètre t. On peut donc passer à la borne inférieure.

✍ *C'est tout l'intérêt de la méthode employée ! On introduit un paramètre pour obtenir une majoration plus fine que ce qu'on aurait obtenu en appliquant directement l'inégalité de Markov — alors qu'en fait, on ne fait qu'appliquer l'inégalité de Markov !*

L'expression $\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$ est minimale pour $t = \varepsilon$ et donc minorée par $-\varepsilon^2/2$.

✍ *L'expression $at^2 + bt + c$ polynomiale de degré 2 (soit $a \neq 0$) atteint un extremum global en $t = \frac{-b}{2a}$. La nature de cet extremum dépend du signe de a : c'est un maximum pour $a < 0$ et un minimum pour $a > 0$.*

On a ainsi démontré l'inégalité de Chernoff :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

rms128-198

> *Soit G, un sous-groupe du groupes des fonctions affines (non constantes) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que toute fonction de G possède un point fixe.*
> *Démontrer qu'il existe un réel ω qui est fixe pour tous les éléments de G.*

Considérons $f \in G$: il existe un réel $a \neq 0$ et un réel b tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b.$$

Si $a = 1$, alors :
- ou bien $b = 0$ et tous les réels sont fixes par $f = I_{\mathbb{R}}$;
- ou bien $b \neq 0$ et f n'a pas de point fixe, ce qui contredit l'hypothèse $f \in G$.

Si $a \neq 1$, alors f admet un, et un seul, point fixe $\alpha = \frac{b}{1-a}$.

✍ *Une application affine non constante réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il faut donc comprendre que la loi de composition interne considérée ici est le produit de composition $\circ$.*

Si $f(x) = ax + b$ (avec $a = 0$), alors la bijection réciproque de f s'exprime : $f^{-1}(x) = x/a - b/a$.

Si on adjoint les fonctions constantes à G, l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de groupe pour l'addition des fonctions.

❧ Considérons deux éléments f et g de G, distincts de $I_{\mathbb{R}}$ (en supposant que le groupe G n'est pas réduit au neutre : $G \neq \{I_{\mathbb{R}}\}$). Il existe donc quatre réels $a \notin \{0, 1\}$, b, $c \notin \{0, 1\}$ et d tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b \quad \text{et} \quad g(x) = cx + d.$$

Comme G est un groupe pour $\circ$, on en déduit que le **commutateur** $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$ appartient aussi à G. Or

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad (f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g)(x) = x + \frac{ad - d + b - bc}{ac}.$$

D'après la discussion initiale, cette fonction affine appartient à G si, et seulement si,

$$ad - d + b - bc = 0$$

ce qui revient à supposer que

$$\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$$

ou encore à supposer que f et g ont même point fixe.

❧ On a ainsi démontré que : si f et g sont deux éléments de G qui ont des points fixes distincts, alors $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$ est un élément de G qui n'a pas de point fixe — ce qui contredit l'hypothèse sur G.

Autrement dit, deux éléments quelconques de G distincts de l'élément neutre $I_{\mathbb{R}}$ ont même point fixe. Il existe donc un réel ω tel que

$$\forall\, f \in G, \qquad f(\omega) = \omega.$$

✍ *Réciproquement, considérons un réel ω quelconque et notons G_ω, l'ensemble des fonctions affines non constantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\omega) = \omega$.*

De la sorte, une fonction f appartient à G_ω si, et seulement si, il existe un réel $a \neq 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \omega + a(x - \omega)$$

et on vérifie sans peine que l'application

$$[a \mapsto [x \mapsto \omega + a(x - \omega)]]$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur $(G_\omega, \circ)$. (En particulier, G_ω est nécessairement un groupe commutatif.)

Les groupes $(G, \circ)$ étudiés ici sont donc isomorphes à un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

> *Démontrer qu'il existe une fonction continue*
> $$f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$
> *qui s'annule sur l'ensemble des matrices trigonalisables sans être identiquement nulle sur* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

La fonction *partie positive* $[x \mapsto x^+]$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, la fonction *partie négative* $[x \mapsto x^-]$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$.

De plus, ces deux fonctions sont caractérisées par les deux identités suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^+ + x^- = |x| \quad \text{et} \quad x^+ - x^- = x.$$

En particulier,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

donc la fonction *partie négative* est continue sur $\mathbb{R}$.

✍ *Il faut connaître les graphes de ces deux fonctions !*

❧ Le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

est égal à $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$ et la matrice A est trigonalisable (en tant que matrice réelle) si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire si, et seulement si, le discriminant de ce polynôme est positif ou nul.

Or le discriminant du polynôme caractéristique est égal à $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$.

Ainsi, la matrice A est trigonalisable si, et seulement si, $(a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$f(A) = \big((a-d)^2 + 4bc\big)^- = 0.$$

❧ L'application f ainsi définie est à valeurs positives ; elle est nulle sur l'ensemble des matrices trigonalisables et seulement sur cet ensemble. Enfin, elle est continue comme composée d'une fonction polynomiale des coefficients de A et de la fonction continue $[x \mapsto x^-]$.

‖ *Une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ admet-elle nécessairement une limite ?*

✍ *Pour une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire pour une* suite*!), on ne peut envisager de limite qu'au voisinage de $+\infty$.*

Une suite d'entiers qui converge est stationnaire (à partir d'un certain rang, tous les termes sont égaux à la limite), ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'injectivité.

La vraie question est donc : une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tend-elle nécessairement vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$?

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application injective. Considérons un entier $A \in \mathbb{N}^*$. La propriété

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N, \qquad \varphi(n) \in [\![0, A]\!]$$

signifie que φ prend une infinité de fois une valeur dans l'ensemble fini $[\![0, A]\!]$, ce qui contredit l'injectivité de φ.

Par conséquent,

$$\exists\, N_A \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_A, \qquad \varphi(n) > A.$$

Autrement dit, la fonction φ tend vers $+\infty$.

rms128-435

Soient G *et* H*, deux groupes cycliques. À quelle condition le groupe produit* $\mathsf{G} \times \mathsf{H}$ *est-il cyclique ?*

‖ *On note φ, l'indicatrice d'Euler. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varphi(n)$ divise n.*

On sait exprimer $\varphi(n)$ au moyen de la décomposition de n en produit de facteurs premiers : s'il existe des nombres premiers
$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$$
et des entiers naturels non nuls
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$
tels que
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$
alors
$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{\alpha_1 - 1}(p_2 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots (p_r - 1)p_r^{\alpha_r - 1}.$$
On a donc
$$n = p_1 \cdots p_r \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k - 1} \quad \text{et} \quad \varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1) \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k - 1}$$
et par conséquent $\varphi(n)$ divise n si, et seulement si, le produit
$$(p_1 - 1) \cdots (p_r - 1) \qquad \text{divise} \qquad p_1 \cdots p_r.$$

❧ En particulier, si $\varphi(n)$ divise n, il faut que $(p_1 - 1)$ divise le produit $p_1 \cdots p_r$.

Or $1 \leqslant p_1 - 1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ où les p_k sont des nombres premiers, donc $(p_1 - 1)$ est premier à tous les p_k et donc premier au produit $p_1 \cdots p_r$.

Il n'y a qu'une seule possibilité : $p_1 - 1 = 1$, c'est-à-dire $p_1 = 2$.

❧ Reprenons : $\varphi(n)$ divise n si, et seulement si, le produit
$$(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1) \qquad \text{divise} \qquad 2p_2 \cdots p_r.$$
Or, pour $k \geqslant 2$, les p_k sont des nombres premiers strictement supérieurs à $p_1 = 2$, donc des nombres *impairs* et les facteurs $(p_k - 1)$ sont tous pairs.

Au second membre, la valuation de 2 est égale à 1 (puisque les p_k sont impairs pour tout $k \geqslant 2$). Il faut donc que $r \leqslant 2$!

❧ Si $r = 2$, alors il faut que $(p_2 - 1)$ divise $2p_2$. Comme $(p_2 - 1)$ et p_2 sont premiers entre eux, il faut donc que $p_2 - 1$ divise 2 et donc que $p_2 = 3$.

✍ *L'astuce taupinale* $1 \times p_2 - 1 \times (p_2 - 1) = 1$ *s'interprète ici comme la relation de Bézout !*

❧ Réciproquement, si $n = 2^\alpha$, alors $\varphi(n) = (2 - 1).2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}$ divise effectivement n et si $n = 2^\alpha.3^\beta$, alors $\varphi(n) = (1.2^{\alpha-1}).(2.3^{\beta-1}) = 2^\alpha.3^{\beta-1}$ divise effectivement n.

Les entiers n tels que $\varphi(n)$ sont donc les entiers qui se factorisent sous la forme 2^α ou $2^\alpha.3^\beta$.

> *Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que leurs déterminants, respectivement notés a et b, sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices U et V dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que*
>
> $$AU + BV = I_n.$$

Comme les coefficients de la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont des entiers relatifs, son déterminant

$$a = \det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

est également un entier relatif.

Pour les mêmes raisons, les coefficients des comatrices $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ sont des entiers relatifs.

❧ D'après la propriété de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

D'après les formules de Cramer,

$$A.[\mathrm{Com}(A)]^\top = a \cdot I_n \quad \text{et} \quad B.[\mathrm{Com}(B)]^\top = b \cdot I_n$$

donc

$$A.\big(u[\mathrm{Com}(A)]^\top\big) + B.\big(v[\mathrm{Com}(B)]^\top\big) = I_n.$$

rms128-460

Soient E*, un espace vectoriel de dimension finie sur le corps* $\mathbb{K}$ *et* u*, un endomorphisme de* E*.*
Démontrer que

$$\mathsf{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$$

si, et seulement si, l'endomorphisme u *appartient au sous-espace* $\operatorname{Vect}(u^k,\ k \geqslant 2)$.

rms128-461

Soit G*, un sous-groupe fini de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$\forall\, g \in \mathsf{G}, \qquad g^2 = I_n\,.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Démontrer que* G *est abélien.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Démontrer que le cardinal de* G *est une puissance de* 2*. Quel est le cardinal maximal d'un tel sous-groupe ?*

$\boxed{\textbf{3.}}$ *On suppose que les groupes* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *sont isomorphes. Que peut-on en déduire sur les entiers* m *et* n *?*

$\boxed{\textbf{1.}}$

$\boxed{\textbf{2.}}$

$\boxed{\textbf{3.}}$

rms128-466

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *une matrice de rang* 2. *Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de* $\operatorname{tr} A$ *et de* $\operatorname{tr}(A^2)$.

rms128-465

Existe-t-il une forme linéaire Φ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\Phi(A) \in \mathrm{Sp}(A)$ *pour toute matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

rms128-466

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*, une matrice de rang* 2*. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de* $\operatorname{tr} A$ *et de* $\operatorname{tr}(A^2)$.

rms128-480

Trouver deux matrices A *et* B *de* $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ *qui ne sont pas semblables, alors qu'elles ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal.*

rms128-482

Soient E, *un espace vectoriel réel de dimension finie et* $u \in L(E)$. *On note*

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{r-1} X^{r-1} + X^r$$

le polynôme minimal de u *et on pose*

$$p = \min\{0 \leqslant k \leqslant r \;:\; a_k \neq 0\}.$$

Démontrer que

$$E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$$

et que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u^k$ *et* $\operatorname{Im} u^k$ *ne sont pas supplémentaires dans* E *lorsque* $1 \leqslant k < p$.