Quelles méthodes employer pour démontrer qu'une application est une bijection ? Certaines sont-elles plus efficaces que d'autres ? Dans quel contexte : numérique ? abstrait ?

Matrices inversibles

Commençons par rappeler que toute matrice inversible est une matrice carrée.

Q 1. *Quelle est, en général, la méthode la plus efficace pour montrer qu'une matrice est inversible ?*
R 1. La matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n et le rang d'une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ peut être facilement calculé par des opérations de pivot sur les lignes et les colonnes.
Avec un peu d'habitude, ce calcul peut même devenir très rapide (deux opérations de pivot suffisent pour une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$).

Q 2. *Y a-t-il un inconvénient à justifier l'inversibilité de M en calculant son rang ?*
R 2. Le calcul du rang ne donne que le rang... Si on a besoin de calculer l'inverse de la matrice, le calcul du rang est une perte de temps !

Q 3. *Peut-on démontrer qu'une matrice est inversible en calculant son inverse ?*
R 3. Oui, il suffit d'appliquer (une des innombrables variantes de) l'algorithme du pivot : la matrice est inversible si, et seulement si, l'algorithme parvient à son terme normal.
On peut aussi exploiter un polynôme annulateur.

Q 4. *Est-il efficace d'appliquer l'algorithme du pivot ?*
R 4. Si on cherche effectivement l'expression de la matrice inverse M^{-1}, l'algorithme du pivot est une bonne méthode.
Si on cherche seulement à vérifier l'inversibilité, c'est du temps perdu et de la fatigue inutile : le calcul du rang est bien plus simple !

Q 5. *Est-il intéressant de poser un système de la forme*

$$MX = B \qquad ?$$

R 5. Pour rassurer les débutants, oui.
Pour ceux qui ont assimilé le calcul matriciel, c'est une lourdeur inutile, il vaut mieux appliquer l'algorithme du pivot (sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice, selon les occasions) que de poser un système et le résoudre en s'obligeant à écrire toutes les inconnues un grand nombre de fois.

Q 6. *Peut-on démontrer qu'une matrice est inversible* sans calcul ?

R 6. Oui ! Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, chaque coefficient diagonal est différent de 0.
(Inutile d'invoquer les valeurs propres ou le déterminant en pareil cas, ce serait une faute de goût.)

VARIANTE.— Si la matrice P est la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{C}$, alors cette matrice est inversible.
Évidemment, il aura bien fallu faire quelques calculs au préalable !

– Démontrer que la famille $\mathscr{C}$ est une famille libre (resp. génératrice) de même cardinal que $\mathscr{B}$.
– Construire $\mathscr{C}$ en réunissant des bases des différents sous-espaces propres d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et en vérifiant que le cardinal de $\mathscr{C}$ est égal à n.

Q 7. *Le calcul de l'inverse d'une matrice de passage est-il facile ?*

R 7. En général, non, mais on peut avoir de bonnes surprises.
Cela dit, dans le cadre de la réduction des endomorphismes (diagonalisation/trigonalisation), le calcul de P^{-1} est rarement nécessaire.

Q 8. *Peut-on lire sur les colonnes (resp. les lignes) de la matrice M qu'elle est inversible ?*

R 8. Bien sûr ! Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, la famille de ses colonnes (resp. de ses lignes) est une famille libre et plus la matrice est proche d'une matrice triangulaire, plus cette propriété est facile à voir.
C'est d'ailleurs cette caractérisation qui permet de conclure rapidement quand on calcule le rang d'une matrice par l'algorithme du pivot : toutes les matrices calculées ont même rang que la matrice initiale et plus vite on sait reconnaître une famille libre de colonnes (ou de lignes), plus vite on peut conclure.

Q 9. *Peut-on démontrer* facilement *qu'une matrice est inversible **et** calculer son inverse* facilement ?

R 9. Oui ! Il est facile de vérifier si une matrice

$$M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est orthogonale :

$${}^tMM \stackrel{?}{=} I_n$$

et si c'est bien le cas, la matrice M est inversible et

$$M^{-1} = {}^tM.$$

Q 10. *La connaissance d'un polynôme annulateur de M peut-elle être utile pour étudier l'inversibilité de M ?*

R 10. La connaissance d'un polynôme annulateur est TOUJOURS utile.
La matrice M est inversible si, et seulement si, le coefficient constant de son polynôme minimal (resp. caractéristique) n'est pas nul.
Plus simple : s'il existe un polynôme annulateur de M dont le coefficient constant n'est pas nul :

$$P = \underbrace{a_0}_{\neq 0} + a_1 X + \cdots + a_d X^d$$

alors M est inversible et de plus

$$M^{-1} = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{-a_k}{a_0} \cdot M^k.$$

Plus le degré d est bas, plus le calcul de M^{-1} est facile (cas optimal = P est le polynôme minimal de M).

Q 11. *Est-il intéressant de calculer le déterminant pour prouver l'inversibilité d'une matrice ?*

R 11. Le déterminant apporte deux informations intéressantes en elles-même : son signe (qui donne l'orientation de la matrice) et sa valeur absolue (qui indique l'action de la matrice sur les volumes).
Ces informations sont superflues s'il s'agit de reconnaître une matrice inversible, puisque la question posée est seulement

$$\det M \stackrel{?}{=} 0.$$

Le calcul pratique d'un déterminant (pivot sur les lignes et colonnes, puis développement par une ligne ou une colonne et ainsi de suite) est une opération fastidieuse, précisément parce que le résultat est riche en informations : si on n'a pas besoin de ces informations, autant se passer du déterminant.
Au contraire, dans cadre abstrait, il arrive qu'on puisse prouver que $\det M \neq 0$ sans calculer réellement le déterminant, par exemple en faisant usage de la relation

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

Q 12. *Les valeurs propres de la matrice peuvent-elles nous renseigner ?*

R 12. Oui : la matrice M est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre.
Mais, de ce point de vue, la connaissance des autres valeurs propres est sans aucun intérêt !
On ne pensera donc aux valeurs propres de M pour étudier son inversibilité que si on connaît *déjà* le spectre de M.

Q 13. *Est-il utile de s'intéresser au noyau de la matrice pour démontrer son inversibilité ?*
R 13. En théorie, oui : une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit à la colonne nulle. Exemple classique : les matrices à diagonale fortement dominante.
En pratique, non : les opérations de pivot qui permettent de caractériser le noyau d'une matrice sont celles qui permettent de calculer son rang, mais comme il faut les appliquer à une matrice de $\mathfrak{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$, on arrive moins vite au résultat.

Q 14. *À quoi servent les formules de Cramer et la comatrice ?*
R 14. Pratiquement, à rien. Au-delà de la dimension 3, ces formules sont trop complexes pour être utiles.
En revanche, d'un point de vue théorique, ces formules sont précieuses, puisqu'elles donnent la forme de l'inverse au moyen d'une formule mal commode mais *explicite*.

Applications linéaires bijectives

On considère ici une application linéaire

$$f \in L(E, F).$$

Q 15. *Y a-t-il une méthode générale pour démontrer que f est bijective ?*
R 15. Oui. On revient à la définition : f est bijective si, et seulement si, elle est surjective et injective ; et on prend en compte la linéarité de f : elle est injective si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

$$\begin{cases} f(x) = 0_F \\ x \in E \end{cases} \iff x = 0_E.$$

Q 16. *La méthode générale est-elle efficace ?*
R 16. Réponse habituelle : une méthode générale est efficace en général — comme un couteau suisse.
Si on cherche vraiment l'efficacité, il faut trouver une méthode adaptée aux circonstances, c'est-à-dire qu'il faut étudier ici le contexte dans lequel se trouve l'application f.

Q 17. *Quelle est la première propriété à étudier pour être efficace ?*
R 17. La dimension des espaces E et F !
Si $\dim E \neq \dim F$, l'application f ne peut pas être bijective.

Q 18. *Comment tirer parti de la propriété « $\dim E$ est finie » pour démontrer que f est bijective ?*
R 18. Si on connaît une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F (ou si on peut déterminer facilement ces bases), l'application f est bijective si, et seulement si, sa matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.
Si $\dim E = \dim F$, il suffit de vérifier que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ ou que f est surjective (Théorème du rang).

Q 19. *En dimension finie, l'application linéaire f est bijective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0_E\}$. Vrai ou faux ?*
R 19. Faux !
Le Théorème du rang exige que $\dim E = \dim F$ et *travailler en dimension finie* ne signifie pas que tous les espaces vectoriels ont même dimension...
Bien sûr, l'égalité des dimensions est automatique dans le cas où $E = F$ et l'étude prolongée des endomorphismes peut rendre paresseux... ou naïf.

Q 20. *Y a-t-il une méthode qui s'applique aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie ?*
R 20. Oui ! Certaines applications linéaires ont un polynôme minimal même en dimension infinie (les projecteurs et les symétries entre autres).
On rappelle donc : Si f admet un polynôme minimal μ, alors f est inversible si, et seulement si, le terme constant $\mu(0)$ est non nul.

Q 21. *Quelle différence entre* application bijective *et* application inversible *?*
R 21. C'est assez subtil et c'est pour cela qu'on confond ces deux notions.
La bijectivité est une propriété de *fonctions* : pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée F, il existe un, et un seul, antécédent par f dans l'ensemble de départ E.
L'inversibilité est une propriété d'un *élément d'une structure algébrique* :
- dans un groupe, tous les éléments sont inversibles ;
- dans un corps, tous les éléments *non nuls* sont inversibles ;
- dans un anneau, seuls certains éléments sont inversibles et ce sont parfois les éléments les plus utiles (c'est le cas de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ou de $L(E)$), parfois les éléments les moins intéressants qui soient (cas de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$).

Voilà pourquoi il est légitime de parler de *matrice inversible* ou d'*endomorphisme inversible*, mais pas d'*application linéaire inversible* (si $E \neq F$, l'ensemble $L(E, F)$ n'est pas muni d'une structure d'anneau, ce n'est qu'un espace vectoriel).

Applications non linéaires

On considère maintenant une application *non* linéaire

$$f : \Omega \longrightarrow F$$

où $\Omega \subset E$.

Q 22. *Pourquoi est-il absurde de dire « f est bijective » ?*
R 22. La bijectivité signifie : pour chaque élément y de l'ensemble d'arrivée, il existe exactement un élément x dans l'ensemble de départ tel que $y = f(x)$.
Par conséquent, parler de bijectivité sans préciser quels sont au juste les ensembles de départ et d'arrivée n'a pas de sens.
On doit donc prendre soin de dire que « f est bijective de ¡tel ensemble¿ sur ¡tel autre ensemble¿ » ou que « $f : \Omega \longrightarrow F$ est bijective » (le diagramme sagittal précisant les ensembles de départ et d'arrivée).

Q 23. *Comment démontrer que $f : \Omega \longrightarrow F$ est bijective ?*
R 23. Deux possibilités !
Certains théorèmes prouvent qu'une fonction est bijective : il suffit de pouvoir appliquer un tel théorème (en vérifiant soigneusement chacune des conditions d'application).
Si aucun de ces théorèmes ne peut être appliqué, on procède en deux temps :
- injectivité : pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in \Omega$;
- surjectivité : pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution $x \in \Omega$.

Q 24. *Je confonds* injectivité *et* surjectivité*. C'est grave ?*
R 24. Au début, non... En fin de Spé, oui !

Q 25. *La surjectivité est toujours difficile à démontrer. Vrai ou faux ?*
R 25. Souvent, oui ! Mais pas toujours.
Pour les changements de variables, on se contente de justifier l'injectivité de f sur Ω et on conclut immédiatement que f est bijective de Ω sur $f_*(\Omega) \subset F$. En substituant l'image de f à l'ensemble d'arrivée F, on rend automatiquement f surjective !
Raison de plus pour toujours préciser qu'une application est « bijective de ¡tel ensemble¿ sur ¡tel autre ensemble¿ ».
Évidemment, un tel tour de passe-passe a un coût caché : on sait que f est bijective à moindres frais, mais il est parfois bien difficile d'identifier exactement l'ensemble $f_*(\Omega)$...

Q 26. *Peut-on prouver la bijectivité de f par un simple calcul, comme dans le cas linéaire ?*
R 26. Oui, mais c'est très rare ! Cela arrive lorsqu'on peut résoudre l'équation $y = f(x)$ où $y \in F$ est donné et $x \in \Omega$ est l'inconnue.
Et lorsque ce calcul est possible, ce n'est pas forcément une bonne idée. Considérons par exemple le passage en coordonnées polaires.

$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r > 0 \\ -\pi < \theta < \pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y2}+x} \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [x \leqslant 0, y = 0] \end{array}\right.$$

L'expression de θ est trop compliquée pour être vraiment utile !
Il faudra donc recourir très souvent à des arguments théoriques pour justifier la bijectivité d'une application non linéaire.

Q 27. *Une différence majeure avec le cas linéaire ?*
R 27. Comme l'application f n'est pas linéaire, elle n'a pas de noyau ! Pour établir l'injectivité de f, nous devons poser l'équation

$$f(x) = f(y)$$

d'inconnues $x \in \Omega$ et $y \in \Omega$ et justifier que $x = y$.

Q 28. *Comment établir la bijectivité d'une fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ?$$

R 28. En général, on applique le Théorème de la bijection (sous la forme $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, ..., $\mathscr{C}^\infty$ – selon le but visé).
Il faut être très soigneux !
– Quel est l'*intervalle* de départ $I \subset \mathbb{R}$?
– Justifier que f est *strictement* monotone sur l'intervalle I (et pas seulement monotone).
– L'image est connue par des arguments théoriques (intervalle dont on connaît le type, bornes de cet intervalle), qu'il convient de citer et d'appliquer précisément.

Q 29. *Est-ce que la bijectivité se voit sur le tableau de variations ?*
R 29. Oui, elle se *voit*. Mais le tableau de variations *ne démontre rien* : c'est au Théorème de la bijection de faire ce travail, grâce au support concret du tableau de variations qui vous guide pour appliquer le théorème.

Q 30. *Existe-t-il une version du Théorème de la bijection pour les fonctions de plusieurs variables ?*

R 30. Oui et ce théorème, très utile pour les changements de variables, est en fait au fondement même de la théorie des surfaces.

Il y a plusieurs versions de ce théorème : Théorème d'inversion locale, Théorème d'inversion globale, etc (cf Wikipedia).

Mise en garde

Les réponses qui précèdent sont des réponses *générales*. Souvenez-vous de la théorie du couteau suisse et en toutes circonstances, faites attention au contexte particulier dans lequel vous vous trouvez : ce qui est utile en général ne vous sera peut-être que d'une aide médiocre ou insuffisante. Restez intelligents !