Devoir de Mathématiques

Distribué le 3 avril 2020 – Facultatif

❖ Problème ❖

On définit deux fonctions

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

en posant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$$
$$g(x,y) = (x+y,\ x-y)$$

1. Démontrer que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Écrire la matrice jacobienne de f et de g en (x,y).
3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire

$$d(f \circ g)[(x,y)]$$

en utilisant les deux méthodes suivantes :
3. a. En calculant $f \circ g$;
3. b. En utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Extraits du rapport du jury (CCP 2017 MP)

Manque de maîtrise très marqué... Assez élémentaire pour le candidat ayant travaillé le chapître du calcul différentiel...

Citer tous les théorèmes utilisés. Rappeler toutes les hypothèses utiles lors de l'utilisation d'un théorème, mêmes si elles figurent quatre lignes plus haut ou à la question précédente.

La jacobienne de f n'est pas toujours au bon format. De nombreux candidats déduisent la différentiabilité de l'existence des dérivées partielles, alors que cette condition n'assure même pas toujours la continuité.

La plupart des candidats se trompent sur l'image d'un vecteur par la différentielle en un point. Confusions entre (x,y) et (u,v).

Solution ❀ Matrices jacobiennes

J'ai respecté scrupuleusement l'énoncé original, avec tous ses défauts...

Dans ce corrigé, je prendrai l'initiative de modifier quelques notations et surtout quelques façons de présenter les choses.

1. En tant que composée d'une fonction polynomiale par la fonction sin, qui est $\mathscr{C}^\infty$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^1$).

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-y^2 & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

L'application g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et, comme toute application linéaire, elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est en particulier différentiable sur $\mathbb{R}^2$, donc f et g sont différentiables en tout point $M=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Remarque.— J'estime utile de considérer les éléments de l'ensemble de définition d'une fonction différentiable comme des *points* (éléments d'un espace affine) et non comme des *vecteurs* (éléments d'un espace vectoriel).

2. Comme f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, l'application linéaire tangente $df(M)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac} f(M) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)\end{pmatrix} \\ &= 2\cos(x^2-y^2)\cdot\begin{pmatrix} x & -y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec $M=(x,y)$.

Comme g est une application *linéaire*, on sait que

$$\forall\, M\in\mathbb{R}^2,\qquad dg(M)=g$$

et par conséquent

$$\forall\, M=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \operatorname{Jac} g(M)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

3. a. On va traiter l'application g pour ce qu'elle est : un changement de variables !

Nous allons donc adopter les notations suivantes. On considère deux *points*

$$\begin{aligned} M_0 &= (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ M_1 &= (s,t)=g(x,y)=g(M_0)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

et un *vecteur* (déplacement)

$$\mathbf{h}=(u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Nous conservons la notation $g=g(x,y)$ et nous imposons

$$f=f(s,t)$$

afin de clarifier la composition des applications.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) & & \\ & & =(s,t) & \longmapsto & f(s,t)=(f\circ g)(x,y)\end{array}$$

❧ Comme $(s,t)=(x+y,x-y)$,

$$(f\circ g)(x,y)=\sin 4xy$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}(f\circ g)(M_0) &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial[f\circ g]}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial[f\circ g]}{\partial y}(M_0)\end{pmatrix}\\ &= 4\cos 4xy\cdot\begin{pmatrix} y & x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

❧ L'image du vecteur $\mathbf{h}=(u,v)\in\mathbb{R}^2$ par l'application linéaire tangente $d(f\circ g)(M_0)\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est le scalaire réel égal à

$$d(f\circ g)(M_0)(\mathbf{h})$$

c'est-à-dire à

$$\operatorname{Jac}(f\circ g)(M_0)\times\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=4(vx+uy)\cos 4xy.$$

3. b. On reprend les notations précédentes.

❧ D'après le théorème de différentiation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} d(f\circ g)(M_0) &= df\big[g(M_0)\big]\circ dg(M_0)\\ &= df(M_1)\circ dg(M_0)\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Matriciellement, cette relation fait apparaître le produit des matrices jacobiennes :

$$\operatorname{Jac}(f\circ g)(M_0)=\operatorname{Jac}(f)(M_1)\times\operatorname{Jac}(g)(M_0)\in\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

❧ Or nous savons d'une part que, en adaptant les notations du **2.**,

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}(f)(M_1) &= 2\cos(s^2-t^2)\cdot\begin{pmatrix}s & -t\end{pmatrix}\\ &= 2\cos 4xy\cdot\begin{pmatrix}x+y & -x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

puisque $(s,t)=(x+y,x-y)$ (autrement dit : $M_1=g(M_0)$) et d'autre part que

$$\operatorname{Jac}(g)(M_0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

donc

$$\operatorname{Jac}(f\circ g)(M_0)=4\cos 4xy\cdot\begin{pmatrix}y & x\end{pmatrix}.$$

On retrouve la *même* expression qu'à la question précédente pour la matrice jacobienne de $(f\circ g)$. Heureusement !