► La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ en tant que fonction rationnelle dont l'unique pôle est l'origine O.

L'ensemble de définition U est un ouvert en tant que complémentaire du fermé $\{O\}$ (tout singleton et, plus généralement, tout ensemble fini est fermé).

Plus généralement encore, toute fonction rationnelle est définie sur un ouvert car l'ensemble de ses pôles est un fermé. En effet, une fonction rationnelle s'exprime sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$$

où P et Q sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$.

En tant que fonctions polynomiales, P et Q sont des applications continues sur $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des pôles de f :

$$\pi(f) = [Q(x_1, \dots, x_n) = 0]$$

est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application continue Q.

L'ensemble de définition de f est donc ouvert en tant que complémentaire d'une partie fermée :

$$U = [\pi(f)]^c$$

et f est continue sur U en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule en aucun point de U.

► Pour $\mathbf{h} = (x, y) \neq O$, en coordonnées polaires (c'est-à-dire en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique),

$$\left|f(O + \mathbf{h})\right| = \left|f(x, y)\right| = r\,|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leqslant 2r = 2\|\mathbf{h}\|.$$

Cela prouve bien que $f(\mathbf{h}) = \mathcal{O}(\mathbf{h})$ au voisinage de O.

En particulier, cela implique que $f(\mathbf{h})$ tend vers 0 lorsque $\mathbf{h}$ tend vers O et qu'on peut donc prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$f(O) = 0.$$

► L'hypothèse faite sur f signifie que f, une fois prolongée par continuité, serait différentiable au point O et que φ serait son application linéaire tangente.

$$df(O) = \varphi$$

On sait **[Chap.19 - 25]** alors que

$$\varphi(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(0, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Or, pour tout $x \neq 0$ et pour tout $y \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1$$

donc f admet des dérivées partielles au point O avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = -1.$$

Donc, $\boxed{\textbf{si}}$ f est différentiable au point O, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}\big(df(O)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, y) = x - y.$$

► Pour $(x,y) \neq O$,

$$f(x,y) - \varphi(x,y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} = r \cdot \underbrace{\sin\theta\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)}_{\text{expression bornée}}.$$

Il est donc clair que

$$f(O+\mathbf{h}) = f(O) + \varphi(\mathbf{h}) + \mathcal{O}(\mathbf{h})$$

lorsque $\mathbf{h}$ tend vers 0.

Cependant, le quotient

$$\frac{\big|f(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{h})\big|}{\|\mathbf{h}\|}$$

est **indépendant de** $r = \|\mathbf{h}\|$ sans être identiquement nul (on peut prendre $\theta = \pi/6$ ou $\theta = -\pi/4$ par exemple), donc **[12.1]** ce quotient ne tend pas vers 0 lorsque r tend vers 0.

Par conséquent, $f(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{h}) \neq o(\mathbf{h})$, ce qui prouve que f *n'est pas* différentiable au point O (bien que f soit continue au point O et admette des dérivées partielles en ce point — ce sont les dérivées partielles de f qui ne sont pas continues au point O).