Déterminants — mai 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1

Si une matrice n'est pas inversible, alors son déterminant est nul.

❍ Vrai ● Faux

Si A est une matrice carrée, *elle est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Autrement dit, elle n'est pas inversible si, et seulement si, son déterminant est nul.*
Mais si la matrice A n'est pas carrée, elle n'est pas inversible et comme elle n'a pas de déterminant, il est absurde d'affirmer qu'il est nul.

2

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.a. $\det(-A) = -\det(A)$

❍ Vrai ● Faux

Par n-linéarité, $\det(-A) = (-1)^n . \det(A)$, *donc*

$$\det(-A) = -\det(A)$$

seulement si n est impair.

2.b. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$.

● Vrai ❍ Faux

Le déterminant sert entre autres à caractériser les matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.c. Le déterminant de A est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

❍ Vrai ● Faux

Pour une matrice triangulaire (éventuellement diagonale), le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux. Mais en général c'est faux comme le montre le contre-exemple suivant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

2.d. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

❏ $\det(\lambda A) = \det A$

❏ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

✔ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

❏ Aucune de ces formules n'est vraie.

Par n-linéarité,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda A) = \lambda^n . \det(A).$$

2.e. Pour toute matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$\det(PA) = \det(AP).$$

✔ Oui

❏ Oui, mais seulement si A et P commutent

✔ Oui, même si P n'est pas inversible

❏ Euh... faut voir...

Quelles que soient les matrices A et P de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, les deux produits AP et PA sont des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\det(PA) = \det P.\det A = \det A.\det P = \det(AP)$$

(puisque la multiplication des scalaires est commutative).

2.f. Si A est à coefficients réels, alors

$$\det({}^tAA) \geqslant 0.$$

● Vrai ❍ Faux

Comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\det({}^tA) = \det(A).$$

D'après la formule de morphisme,

$$\det({}^tAA) = \det({}^tA).\det(A) = [\det A]^2 \geqslant 0.$$

2.g. Si les coefficients de A sont tous des réels positifs, alors $\det A$ est un réel positif.

❍ Vrai ● Faux

Contre-exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$$

2.h. Si les coefficients de A sont des fonctions polynomiales de x, alors $\det A$ est une fonction polynomiale de x.

● Vrai ❍ Faux

On sait que

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Les $\varepsilon(\sigma)$ sont égaux à ± 1 et, par hypothèse, les $a_{i,j}$ sont des fonctions polynomiales de x. Comme un produit de fonctions polynomiales est encore une fonction polynomiale et qu'une combinaison linéaire de fonctions polynomiales est encore une fonction polynomiale, on en déduit que $\det A$ *est aussi une fonction polynomiale de x.*

REMARQUE.— *On peut bien sûr remplacer* fonction polynomiale *par* fonction continue, *par* fonction de classe $\mathscr{C}^1$, *par* fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$*...*

3

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3.a. Si $\det A = 2$ et $\det B = 3$, alors $\det(A+B)$

❏ est égal à 5

❏ n'est pas nul

✔ On n'en sait rien !

Le déterminant de $(A+B)$ est indépendant de $\det A$ et de $\det B$! Le contre-exemple suivant montre que ce déterminant peut prendre toutes les valeurs possibles.

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = 10 - xy$$

3.b. Si $\det A = 2$ et $\det B = -2$, alors $\det(AB)$

✔ est égal à -4

❏ est nul

❏ On n'en sait rien !

D'après la propriété de morphisme,

$$\det(AB) = \det A.\det B = -4.$$

3.c. Si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$, alors $\det A = \det B$.

❍ Vrai ● Faux

Si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B < n$, on a bien

$$\det A = \det B = 0.$$

En revanche, si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$, alors A et B sont inversibles, leurs déterminants sont tous les deux différents de 0, mais ils n'ont aucune raison d'être égaux (sinon toutes les matrices inversibles auraient le même déterminant).

3.d. Si A et B sont semblables, alors

$$\det A = \det B.$$

● Vrai ❍ Faux

Si A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On déduit de la formule de morphisme que

$$\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}$$

et donc que

$$\begin{aligned} \det B &= \det(P^{-1}).\det A.\det P = \det A.\frac{\det P}{\det P} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

3.e. Si A et B sont équivalentes, alors

$$\det A = \det B.$$

❍ Vrai ● Faux

Les matrices A et B sont équivalentes si, et seulement si, leurs rangs sont égaux. On a vu au **[3.c.]** *que cela n'assure pas l'égalité des déterminants.*

3.f. Si $\det A = \det B$, alors les matrices A et B sont semblables.

❍ Vrai ● Faux

Ces deux matrices

❏ sont équivalentes parce que semblables

❏ sont équivalentes quoiqu'elles ne soient pas semblables

✔ n'ont aucune raison d'être équivalentes

Les matrices carrées qui ne sont pas inversibles ont toutes le même déterminant (zéro) alors qu'elles ne sont pas toutes semblables, et même pas toutes équivalentes.
Par exemple, les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement égaux à 0, 1 et 2 (ce qui prouve que ces matrices ne sont pas équivalentes), alors que leurs déterminants sont nuls.

3.g. S'il existe deux matrices inversibles

$$P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$$

telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

alors $\det A = \det B$.

❍ Vrai ● Faux

D'après la propriété de morphisme,

$$\det B = \det A \cdot \frac{\det P}{\det Q}$$

et comme on l'a rappelé au **[3.c.]** *les matrices inversibles n'ont pas toutes le même déterminant.*
Pour un contre-exemple explicite, il suffit de choisir

$$A = P = I_n \quad \textit{et} \quad Q = 2I_n$$

et de remarquer que

$$\det B = 1 \cdot \frac{1}{2^n} \neq 1 = \det A.$$

4

On considère une matrice à coefficients *entiers*.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$$

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ Soit g, le pgcd de a et b. Le déterminant $\det A$ est divisible par g.

● Vrai ❍ Faux

Comme le pgcd est un diviseur commun, il existe deux entiers α et β tels que

$$a = g.\alpha \quad \textit{et} \quad b = g.\beta.$$

On en déduit que

$$\det A = ad - bc = g \underbrace{(\alpha.d - \beta.c)}_{\in \mathbb{Z}}$$

et donc que $\det A$ *est divisible par* g.

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ Si $\det A = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

● Vrai ❍ Faux

Comme $-c$ *et* d *sont des entiers tels que*

$$a \times d + b \times (-c) = 1,$$

alors les entiers a *et* b *sont premiers entre eux (Théorème de Bézout).*

$\boxed{\textbf{4.c.}}$ Si a et b sont premiers entre eux, alors

$$\det A = 1.$$

❍ Vrai ● Faux

On sait que $a = 1$ *et* $b = 2$ *sont premiers entre eux et pourtant le déterminant de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas égal à 1 *(il est nul).*

5

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est égal à

✔ $+1$

❏ -1

❏ 0

❏ une autre valeur

On développe par la première ligne (ou la première colonne) et on trouve

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \end{aligned}$$

6

Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est égal à 5.

● Vrai ❍ Faux

✔ C'est clair

❏ Il faut poser le calcul

La matrice est triangulaire par blocs (et même diagonale par blocs, mais c'est sans importance), donc son déterminant est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux. Donc

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

7

Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à -1.

❏ Oui, bien sûr !

✔ Non, bien sûr !

❏ Il faudrait développer par la première colonne

❏ Il faudrait appliquer la règle de Sarrus

❧ D'abord, on rappelle que la règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$!
❧ Ensuite, si on devait développer ce déterminant, il serait beaucoup judicieux de développer par la deuxième colonne ou par la troisième ligne !
❧ La méthode la plus rapide consiste à remarquer que la matrice est triangulaire par blocs. Son déterminant est donc le produit des déterminants des deux blocs diagonaux et comme ces blocs diagonaux sont eux-mêmes triangulaires, le calcul est vite terminé !

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

8

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

8.a. Le déterminant de A est un entier relatif.

● Vrai ❍ Faux

Si tous les $a_{i,j}$ sont des entiers relatifs, alors il est clair que

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=\pm 1} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

est aussi un entier relatif.

8.b. S'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$AB = I_n,$$

alors

$$\det A = \det(B) = \pm 1.$$

● Vrai ❍ Faux

D'après la propriété de morphisme,

$$\underbrace{\det(A)}_{\in \mathbb{Z}} . \underbrace{\det(B)}_{\in \mathbb{Z}} = \det(I_n) = 1$$

donc $\det A = \det B = \pm 1$.

$\boxed{\textbf{8.c.}}$ Si $\det A = 1$, alors il existe une matrice

$$B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$$

telle que

$$AB = I_n.$$

● Vrai ❍ Faux

Si $\det A \neq 0$*, alors la matrice* A *est inversible (en tant que matrice à coefficients réels) et son inverse est égale à*

$$\frac{1}{\det A} \cdot {}^t[\mathrm{Com}(A)] = {}^t[\mathrm{Com}(A)].$$

Comme les coefficients de A *sont tous des entiers, les cofacteurs de* A *sont également des entiers et par conséquent la matrice* A^{-1} *est aussi une matrice à coefficients entiers.*
Il suffit alors de prendre $B = A^{-1}$ *pour conclure.*