Couplages dans un graphe bipartis

09 janvier 2025

1 Le cas général

Définition 1. *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On appelle couplage de G un sous-ensemble $C \subset A$ tel que pour tous $(a, b) \in C^2, a \cap b = \emptyset$, c'est-à-dire un sous-ensemble d'arêtes qui n'ont pas de sommets en commun.*

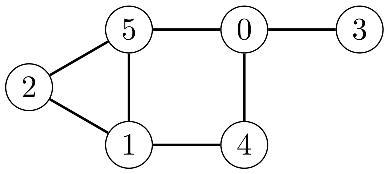
Un couplage C est dit maximal si pour toute arête $a \notin C, C \cup \{a\}$ n'est pas un couplage.

Un couplage C est dit maximum si son cardinal est le maximum parmi tous les couplages de G.

Si un sommet $s \in S$ apparaît dans l'une des arêtes de C, il est dit apparié pour C. Sinon, il est dit libre pour C.

Un couplage C est dit parfait s'il n'existe aucun sommet libre pour C.

Considérons l'exemple suivant :



Théorème 1. *Un couplage maximum est un couplage maximal.*

Définition 2. *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et $C \subset A$ un couplage de G. On appelle :*

- *chemin alternant un chemin* ***élémentaire*** *de longueur non-nulle dont les arêtes sont alternativement dans C et $A \setminus C$.*
- *chemin augmentant un chemin alternant qui commence et termine par des sommets libres.*

Théorème 2. *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et C un couplage de G alors C est un couplage maximum de G si et seulement s'il n'existe pas de chemin augmentant pour C.*

On en déduit l'algorithme suivant :
$C \leftarrow \emptyset$
tant qu'il existe un chemin augmentant pour C :
trouver ca un chemin augmentant pour C.
$C \leftarrow C\Delta ca$

Cet algorithme est incomplet puisque trouver un chemin augmentant n'a aucune raison d'être facile.

2 Graphes bipartis

Définition 3. *Un graphe $G = (S, A)$ est dit biparti s'il existe une partition de ses sommets en deux ensembles S_1 et S_2 telle que les arêtes de G ne sont qu'entre un sommet de S_1 et un sommet de S_2.*

Définition 4. *Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti avec $S = S_1 \cup S_2$. Soit C un couplage de G. On définit le graphe orienté associé à C par $G_C = (S', A')$ où :*
— $S' = S \cup \{s, t\}$
— *pour tout sommet $x \in S_1$ on met l'arête (s, x) ssi x est libre dans C.*
— *pour tout sommet $x \in S_2$ on met l'arête (x, t) ssi x est libre dans C.*
— *on oriente les arêtes de A de la façon suivante : de S_1 vers S_2 pour les arêtes qui ne sont pas dans C et de S_2 vers S_1 pour celles qui y sont.*

Exemple :

Théorème 3. *Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti, C un couplage et G_C le graphe orienté associé à C.*
G possède un chemin augmentant pour C ssi il existe un chemin de s à t dans G_C. S'il existe un tel chemin noté $(s, s_1, \ldots, s_k, t)$ alors $(s_1, \ldots, s_k)$ est un chemin augmentant pour C.

Conclusion : on peut trouver un chemin augmentant de G en cherchant un chemin de s à t dans G_C ce que l'on peut faire par exemple avec un parcours en largeur. On obtient alors un algorithme de recherche de couplage maximum de complexité $O(|A|.|S|)$.