Exercices de physique-chimie
MPSI 2024-2025

Quentin Roveillo

25 décembre 2024

Table des matières

Première partie

Signaux

Liste des chapitres Signaux

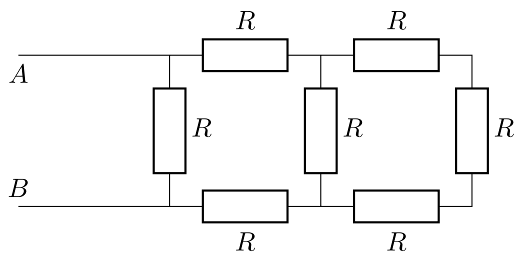
Signaux 1 : Lois de l'électrocinétique

Exercice 1 : Association de résistances

Q.1 Démontrer que deux résistances en séries sont équivalentes à une unique résistance dont on donnera l'expression.

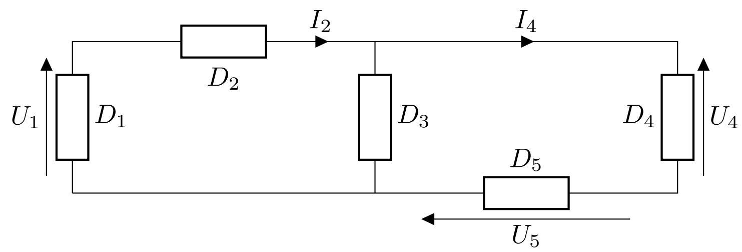
Q.2 Démontrer que deux résistances en parallèle sont équivalentes à une unique résistance dont on donnera l'expression.

Q.3 Calculer la résistance équivalente du circuit ci-dessous :



Exercice 2 : Caractère récepteur ou générateur de dipôles inconnus

Dans le circuit ci-dessous, on donne $U_1 = -2\,\mathrm{V}$, $U_4 = -3\,\mathrm{V}$, $U_5 = 1\,\mathrm{V}$, $I_2 = -1\,\mathrm{mA}$ et $I_4 = 1\,\mathrm{mA}$.



Q.1 Reproduire le schéma en représentant toutes les tensions et tous les courants inconnus.

Q.2 Déduire la valeur de ces courants et tensions.

Q.3 Calculer la puissance reçue pour chacun des dipôles.

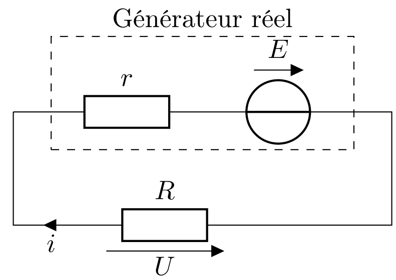
Q.4 En déduire le caractère générateur ou récepteur de chacun des dipôles.

Exercice 3 : Résistance de sortie d'un générateur

Prenons un générateur réel pour alimenter une résistance de charge R, on note U la tension à ses bornes. La tension commandée est la tension E. La résistance interne r est appelée «résistance de sortie du générateur».

Q.1 Exprimer la tension mesurée U en fonction des résistances et de la tension commandée E.

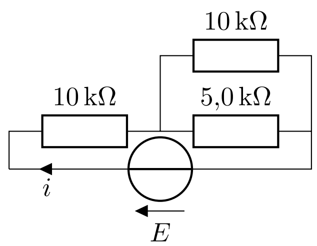
Q.2 Quelle condition sur la résistance de charge R par rapport à la résistance interne pour que la tension U soit égale à la tension de commande E ?



Générateur de tension réel débitant sur une résistance.

Exercice 4 : Détermination d'un courant

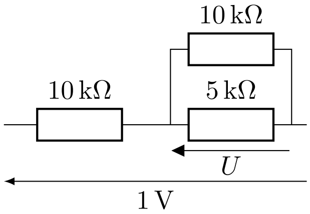
Q.1 Déterminer le courant i dans le circuit avec $E_0 = 1\,\mathrm{V}$.



Exercice 5 : Ponts diviseurs

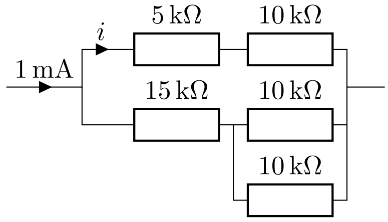
Q.1 Démontrer la formule du pont diviseur de tension.

Q.2 Combien vaut la tension U dans le circuit ci-dessous ?



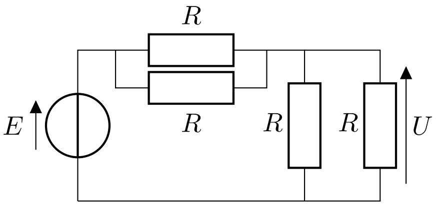
Q.3 Démontrer la formule du pont diviseur de courant.

Q.4 Combien vaut le courant i dans le circuit ci-dessous ?

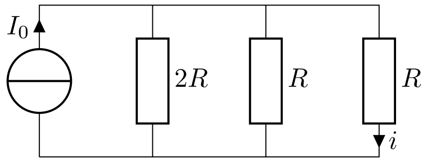


Exercice 6 : Ponts diviseurs

Q.1 Calculer U dans le montage suivant :

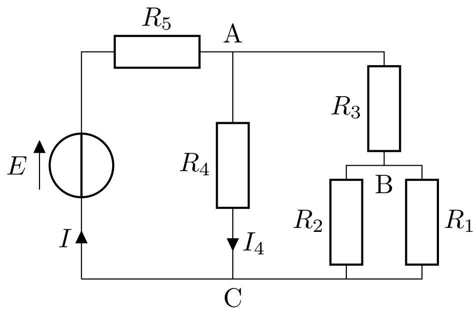


Q.2 Calculer i dans le montage suivant :



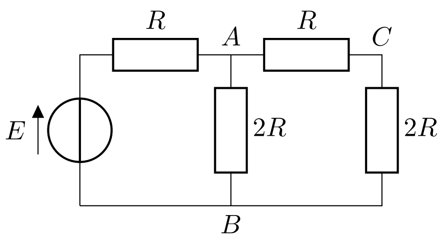
Exercice 7 : Étude de circuits résistifs

Dans le circuit ci-contre, calculer U_{AC}, U_{BC}, I et I_4. On précise $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 40\,\Omega$, $R_5 = 50\,\Omega$ et $E = 10\,\text{V}$



Exercice 8 : Double pont diviseur de tension

Dans ce circuit les valeurs des composants on a : $R = 10\,\Omega$ et $E = 5\,\text{V}$



Q.1 Calculer la résistance équivalente R_{AB} (R_2, R_3, R_4) entre les points A et B.

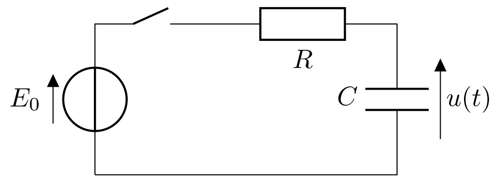
Q.2 En utilisant deux fois la formule du diviseur de tension calculer U_{CB}.

Signaux 2 : Circuits linéaires du premier ordre

Exercice 1 : Charge d'un condensateur

On étudie théoriquement le montage électrique ci-contre :

- la tension E_0 est une fonction constante ;
- l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.



Q.1 Sans établir d'équation différentielle, indiquer la valeur de la tension u_∞ après un temps très long.

Q.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

Q.3 Donner en la justifiant la vleur de $u(t = 0^+)$ juste après la fermeture de l'interrupteur et résoudre l'équation différentielle.

Q.4 Tracer le graphe de la tension $u(t)$.

Q.5 Calculer $i(t)$ et commenter sa valeur en $t = 0$.

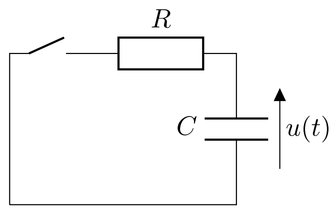
Q.6 Réaliser un bilan de puissance du système et l'interpréter.

Q.7 Calculer les différentes énergies fournies ou reçues au cours de toute la charge.

Exercice 2 : Décharge d'un condensateur

Une fois que le condensateur est chargé depuis longtemps, on ouvre l'interrupteur puis on arrête le générateur et on ferme l'interrupteur. Cela revient à étudier le montage électrique ci-contre :

- l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$;
- le condensateur est initialement chargé à la tension E_0.



Q.1 Sans établir d'équation différentielle, indiquer la valeur de la tension u_∞ après un temps très long.

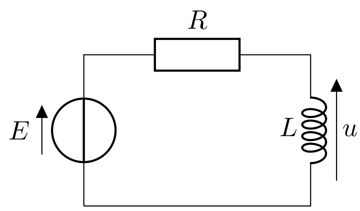
Q.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

Q.3 Résoudre l'équation différentielle et tracer le graphe de la tension $u(t)$.

Q.4 Réaliser un bilan de puissance du système puis calculer les énergies mises en jeu lors de la décharge. Interpréter les résultats.

Exercice 3 : Circuit inductif

La tension $e(t)$ est nulle pour $t < 0$ et est égale à E pour $t \geqslant 0$.



Q.1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u la tension aux bornes de la bobine. Quelle est la constante de temps de ce circuit ? On la notera τ.

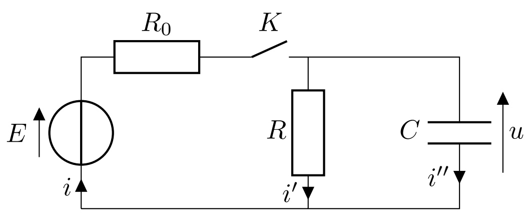
Q.2 Résoudre cette équation différentielle, on exprimera $u(t)$ en fonction de t, E et τ.

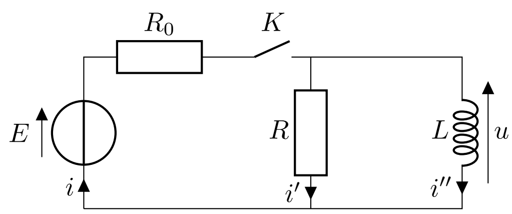
Q.3 Établir un bilan de puissance.

Q.4 Tracer l'allure de $u(t)$.

Exercice 4 : Conditions initiales

On considère les circuits électriques suivant.





L'interrupteur est ouvert depuis longtemps. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

Q.1 Pour chaque circuit, déterminer les valeurs de i, i', i'' et u à $t = 0^+$.

Q.2 Pour chaque circuit, déterminer les valeurs de i, i', i'' et u en régime permanent.

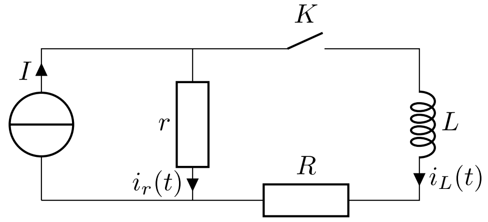
Exercice 5 : Étude d'un circuit à deux mailles

On considère le montage ci-dessous et on ferme l'interrupteur au temps $t = 0$.

Q.1 Quelles sont les valeurs de $i_r(t)$ et $i_L(t)$ pour $t = 0^+$ et $t \to +\infty$?

Q.2 Trouver l'équation différentielle pour i_L.

Q.3 La résoudre et vérifier le résultat grâce aux valeurs des courants en régime permanent.

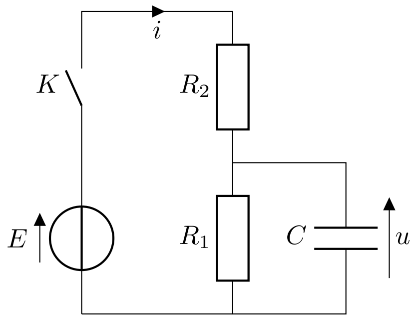


Exercice 6 : Charge d'un condensateur

On considère le circuit suivant. Le condensateur de capacité C étant déchargé, on abaisse l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.

Q.1 Établir, à l'aide des lois de Kirchhoff, l'équation différentielle satisfaite par la tension $u(t)$. Quel est le temps caractéristique ?

Q.2 Quelles sont les expressions de $u(t)$ et $i(t)$?



Exercice 7 : Charge d'une bobine

Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension a une force électromotrice constante E. À l'intant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K qui était ouvert depuis très longtemps.

Q.1 Donner les valeurs des intensités i, i' et i'' et de la tension u à $t = 0^+$.

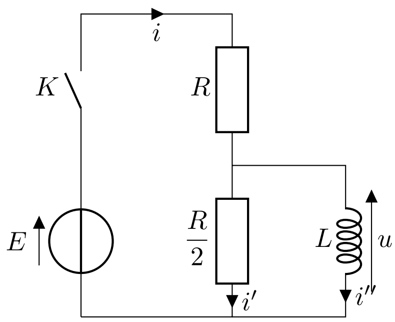
Q.2 Que vaut $u(t)$ quand t tend vers l'infini ?

Q.3 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

Q.4 En déduire l'expression de $u(t)$ et tracer l'allure de $u(t)$.

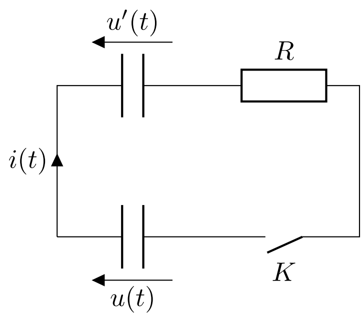
Q.5 Exprimer en fonction de L et R le temps t_0 au bout duquel $u(t)$ a été divisée par 10.

Q.6 On mesure $t_0 = 30\,\mu\text{s}$ pour $R = 1000\,\Omega$. En déduire la valeur de L.



Exercice 8 : Décharge d'un condensateur dans un autre

Dans le circuit suivant, les deux condensateurs ont même capacité C. Le condensateur situé en bas est chargé sous la tension $u = U_0$ et le condensateur en haut est déchargé. On ferme alors l'interrupteur K à la date $t = 0$. On pose $\tau = RC$.



Q.1 Exprimer la tension $u'(t)$ en fonction de $u(t)$ et $i(t)$.

Q.2 Exprimer $i(t)$ en fonction de $u(t)$. Exprimer $i(t)$ en fonction de $u'(t)$.

Q.3 En déduire une relation entre $u(t)$ et $u'(t)$.

Q.4 En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geqslant 0$.

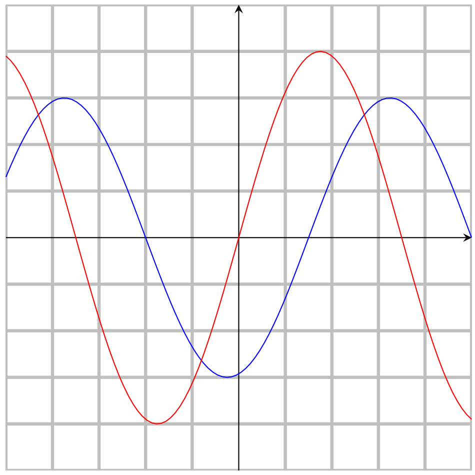
Q.5 En déduire les expressions des tensions $u(t)$ et $u'(t)$. Tracer leur allure sur un même graphe.

Q.6 À partir d'un bilan énergétique, déterminer l'énergie E_R reçue par la résistance au cours du régime transitoire.

Signaux 3 : Circuits linéaires du deuxième ordre

Exercice 1 : Mesure de déphasage

Le figure représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence $s_1(t)$ (en rouge) et $s_2(t)$ (en bleu). Une division correspond à 20 ms.



Q.1 Déterminer la période T des signaux. En déduire la pulsation ω des signaux ainsi que la fréquence f.

Q.2 Déterminer un instant t_1 où la phase $\Phi_1(t_1)$ du signal s_1 vaut 0.

Q.3 Déterminer un instant t_2 où la phase $\Phi_2(t_2)$ du signal s_2 vaut 0.

Q.4 Déterminer le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre les deux signaux.

Q.5 En considérant que $\Phi_1(t) = \omega t$ et $\Phi_2(t) = \omega t + \varphi$, trouver une relation entre φ, ω et Δt.

Q.6 Calculer le déphasage de s_2 par rapport à s_1.

Cet exercice détaillé correspond à une unique question dans les exercices que vous rencontrerez à l'avenir : "Calculer le déphasage entre les deux signaux"

Exercice 2 : Circuit LC

Soit un circuit LC série alimenté par un générateur de tension de f.e.m E. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur :

Q.1 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

Q.2 Résoudre l'équation différentielle en sachant que le condensateur est initialement déchargé et la bobine est initialement déchargée.

Q.3 Résoudre l'équation différentielle en sachant que le condensateur est initialement chargé tel que $u_C(t=0) = E$ et la bobine est initialement déchargée.

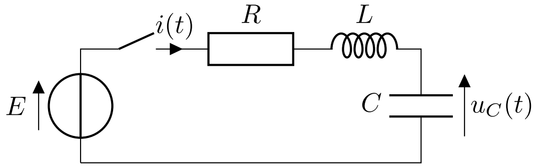
Q.4 Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ le courant délivré par le générateur.

Q.5 Résoudre l'équation différentielle en sachant que le condensateur est initialement déchargé et la bobine est initialement déchargée.

Q.6 Résoudre l'équation différentielle en sachant que le condensateur est initialement chargé tel que $u_C(t=0) = E$ et la bobine est initialement déchargée.

Exercice 3 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension

On s'intéresse à l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série ci-dessous. Avant la fermeture de l'interrupteur, le condensateur est supposé déchargé.



Q.1 Que vaut la tension $u_C(t)$ très longtemps après avoir fermé l'interrupteur ?

Q.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$. Donner l'expression du facteur de qualité du circuit Q, de la pulsation propre ω_0 ainsi que la tension d'équilibre u_{eq}.

Q.3 Donner les conditions initiales $u_C(t=0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0)$.

Q.4 On prend $E = 10\,\text{V}$, $R = 1\,\text{k}\Omega$, $L = 10\,\text{mH}$ et $C = 1\,\mu\text{F}$.

a) Donner les valeurs numériques de Q et ω_0. Comment s'appelle le régime transitoire dans ce cas ?

b) Résoudre l'équation différentielle pour donner $u_C(t)$. On donnera la solution en fonction des valeurs numériques données.

c) Montrer que l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire est de $\dfrac{5}{\omega_0 Q}$.

d) Tracer $u_C(t)$.

Q.5 On prend $E = 10\,\mathrm{V}$, $R = 0{,}1\,\mathrm{k}\mathrm{V}$, $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mathrm{nF}$.

a) Donner les valeurs numériques de Q et ω_0. Comment s'appelle le régime transitoire dans ce cas ?

b) Résoudre l'équation différentielle pour donner $u_C(t)$. On donnera la solution en fonction des valeurs numériques données.

c) Montrer que Q est l'ordre de grandeur du nombre de pseudo-oscillations visibles.

d) Tracer $u_C(t)$.

Q.6 On prend $E = 10\,\mathrm{V}$, $R = 2\,\mathrm{k}\mathrm{V}$, $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mathrm{nF}$.

a) Donner les valeurs numériques de Q et ω_0. Comment s'appelle le régime transitoire dans ce cas ?

b) Résoudre l'équation différentielle pour donner $u_C(t)$. On donnera la solution en fonction des valeurs numériques données.

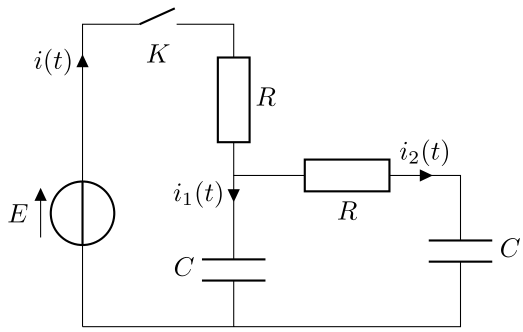
c) Tracer $u_C(t)$.

Q.7 Déterminer l'énergie totale E_G fournie par le générateur ainsi que l'énergie E_{LC} emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E.

Q.8 En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le cas limite $R \to 0$.

Exercice 4 : Mise en cascade de 2 cellules RC

On met en cascade 2 cellules RC identiques comme l'indique la figure ci-contre. Initialement les deux condensateurs sont déchargés et l'interrupteur K est ouvert. À $t = 0$ on ferme K.



Q.1 Déterminer sans calcul et en le justifiant : $i_1(t = 0^+)$, $i_2(t = 0^+)$ et $i(t = 0^+)$

Q.2 Déterminer sans calcul et en le justifiant : $\lim\limits_{t\to+\infty} i_1(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} i_2(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)$

Q.3 Pour $t > 0$, déterminer l'équation différentielle reliant i_1 et i_2.

Q.4 Déterminer l'équation différentielle reliant $i(t)$ et $i_2(t)$.

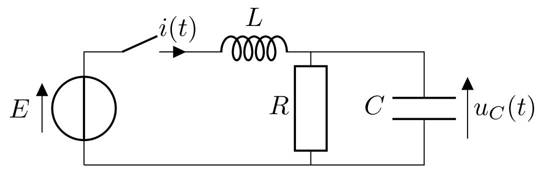
Q.5 Déduire des 2 équations ci-dessus, l'équation différentielle vérifiée par $i_2(t)$.

Q.6 Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'évolution de $i_2(t)$.

Q.7 Tracer $i_2(t)$. À quelle date t_M $i_2(t)$ est-elle maximum ?

Exercice 5 : Influence d'un condensateur sur un circuit RL

Considérons le circuit représenté ci-dessous où le condensateur et la bobine sont initialement déchargés.
Le générateur de tension est idéal de f.e.m E et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



Q.1 Donner en le justifiant les valeurs de $i(t = 0^+)$, $u_C(t = 0^+)$.

Q.2 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ le courant délivré par le générateur. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique en introduisant Q et ω_0.

Q.3 En supposant que $Q < \dfrac{1}{2}$, donner la forme de la solution $i(t)$ de l'équation différentielle. On déterminera les constantes d'intégrations en fonction de C, E, ω_0, et Q.

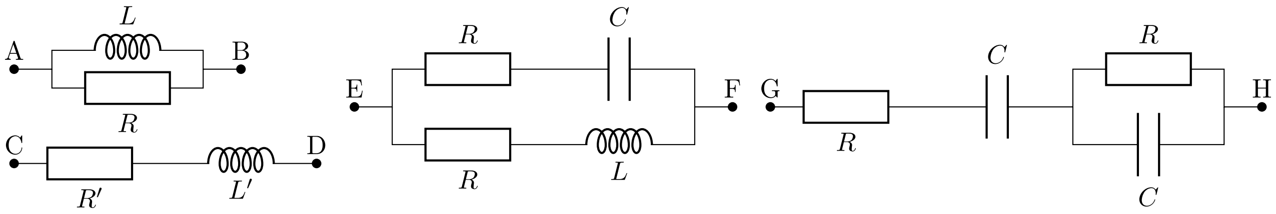
Q.4 Tracer l'allure de la courbe de $i(t)$.

Q.5 Déterminer l'expression de $u_C(t)$.

Signaux 4 : Régime des oscillations forcées et filtre d'ordre 1

Exercice 1 : Calculs d'impédances

On considère les dipôles suivants :



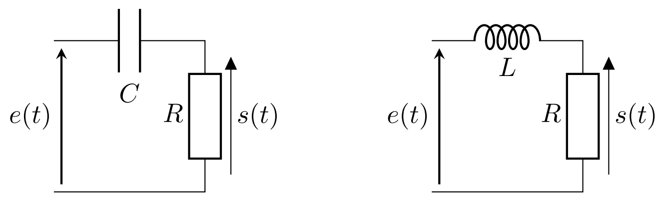
Q.1 Déterminer les expression de R' et L' en fonction de R, L et ω pour que les dipôles AB et CD ci-dessus aient la même impédance. Peut-on avoir $\dfrac{L}{R} = \dfrac{L'}{R'}$?

Q.2 Exprimer l'impédance $\underline{Z}_{EF}$ équivalente au dipôle EF ci-dessus. Que vaut $\underline{Z}_{EF}$ si $\omega = 0$? Et si ω tend vers l'infini. Montrer que $\underline{Z}_{EF}$ est réelle pour une certaine pulsation.

Q.3 Exprimer l'impédance $\underline{Z}_{GH}$ en fonction de R, C et ω.

Exercice 2 : Circuits à 1 maille

Q.1 Déterminer à l'aide d'une étude qualitative la nature des filtres suivants :



Q.2 Déterminer les fonctions de transferts deux filtres.

Q.3 Exprimer le gain en décibel G_{dB} pour ces deux filtres. On prendra soin d'établir les équations des droites asymptotiques puis les pentes en HF et BF.

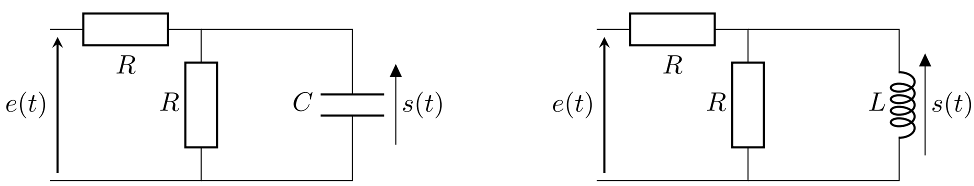
Q.4 Exprimer le déphase φ pour ces deux filtres. On prendra de calculer les valeurs asymptotiques en HF et BF.

Q.5 Calculer l'expression de la pulsation de coupure ω_c pour chacun de ces deux filtres. En déduire les valeurs de $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c)$ et $\varphi(\omega_c)$.

Q.6 Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode et tracer l'allure du diagramme réel en plaçant les valeurs à ω_c.

Exercice 3 : Circuits à deux mailles

Q.1 Déterminer à l'aide d'une étude qualitative la nature des filtres suivants :



Q.2 Déterminer les fonctions de transferts deux filtres.

Q.3 Exprimer le gain en décibel G_{dB} pour ces deux filtres. On prendra soin d'établir les équations des droites asymptotiques puis les pentes en HF et BF.

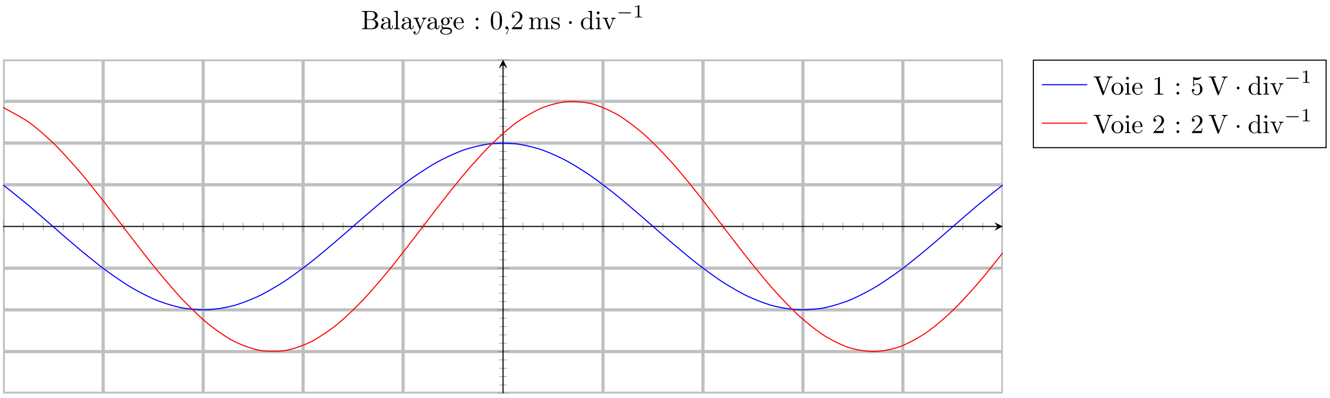
Q.4 Exprimer le déphase φ pour ces deux filtres. On prendra de calculer les valeurs asymptotiques en HF et BF.

Q.5 Calculer l'expression de la pulsation de coupure ω_c pour chacun de ces deux filtres. En déduire les valeurs de $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c)$ et $\varphi(\omega_c)$.

Q.6 Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode et tracer l'allure du diagramme réel en plaçant les valeurs à ω_c.

Exercice 4 : Oscillogrammes

On étudie un circuit série constitué d'une résistance $R = 600\,\Omega$ et d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r. À partir de l'oscillogramme fourni où on visualise en voie 1 la tension fournie par le générateur et en voie 2 celle aux bornes de la résistance, déterminer :



Q.1 La période et la fréquence de la tension délivrée par le générateur basse fréquence.

Q.2 La valeur maximale u_{Gmax} de la tension aux bornes du générateur.

Q.3 La valeur maximale u_{Rmax} de la tension aux bornes du conducteur ohmique.

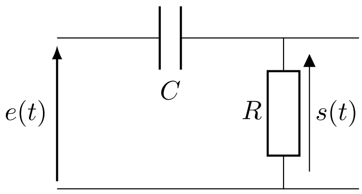
Q.4 La valeur maximale I_{max} de l'intensité du courant circulant dans le circuit.

Q.5 À partir des résultats précédents, déterminer la valeur Z de l'impédance du dipôle AC constitué de la bobine et du conducteur ohmique.

Q.6 Le décalage temporel entre les deux tensions observées, puis le déphasage φ entre ces deux tensions en précisant quelle tension est en avance sur l'autre.

Exercice 5 : Impédance d'entrée d'un oscilloscope

On considère le filtre ci-dessous :



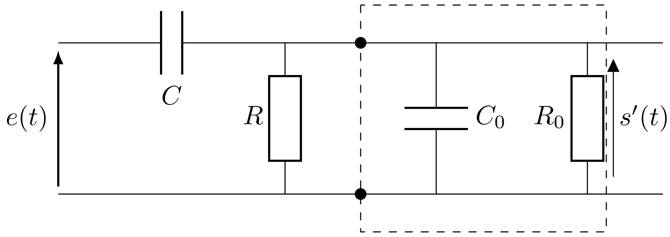
Q.1 Déterminer en fonction de R, C et ω, la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre.

Q.2 Déterminer la pulsation de coupure ω_c. On fera l'application numérique avec $R = 500\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{nF}$.

Q.3 Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $|\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega)$.

Q.4 Donner l'allure du diagramme de Bode de ce filtre.

On observe la tension de sortie à l'aide d'un oscilloscope ayant une impédance d'entrée due à un groupement parallèle ($R_0 = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $C_0 = 30\,\mathrm{pF}$).



Q.5 Calculer la nouvelle fonction de transfert et déterminer la nouvelle pulsation de coupure. Conclure sur l'influence de l'oscilloscope.

Signaux 5 : Filtres d'ordre 2 et résonance

Exercice 1 : Détermination d'un signal de sortie

Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

Q.1 Déterminer le signal de sortie correspondant au signal d'entrée : $e(t) = E + E\cos(\omega_1 t)$.

Q.2 Donner un exemple de circuit ayant une telle fonction de transfert.

Exercice 2 : Caractéristiques d'un signal périodique

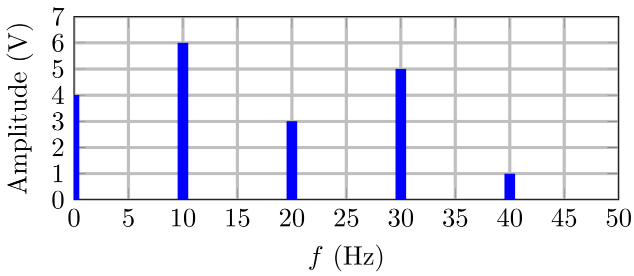
On représente ci-contre le spectre d'un signal périodique.

Q.1 Combien vaut la valeur moyenne de ce signal ?

Q.2 Quelle est la fréquence fondamentale du signal ?

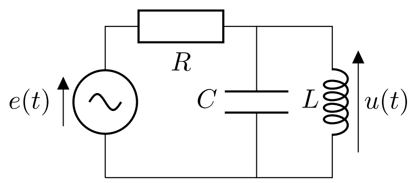
Q.3 Donner l'amplitude et la fréquence de chacune des harmoniques.

Q.4 Combien vaut la valeur efficace de ce signal ?



Exercice 3 : Étude d'un filtre passe-bande à deux mailles

On étudie le circuit ci-contre, avec $e(t) = E_m\cos(\omega t)$. On note $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes de l'association LC parallèle. On définit les amplitudes complexes $\underline{E}$ et $\underline{U}$ des tensions $e(t)$ et $u(t)$. On pose $H = \dfrac{U_m}{E_m}$.



Q.1 Déterminer à l'aide d'une étude qualitative la nature du filtre.

Q.2 Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

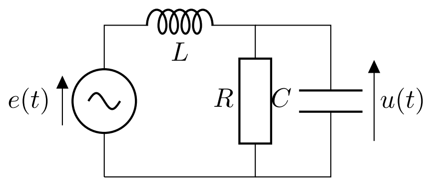
Q.3 Tracer l'allure du diagramme de Bode du filtre.

Q.4 Existe-t-il un phénomène de résonance de tension ? On tracera l'évolution de H et φ avec ω.

Q.5 Si oui, déterminer l'expression de la fréquence de résonance f_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C. Faire l'application numérique avec $R = 1{,}0 \times 10^3\,\Omega$, $L = 0{,}10\,\mathrm{H}$ et $C = 0{,}10\,\mu\mathrm{F}$.

Exercice 4 : Étude d'un filtre passe-bas à deux mailles

On étudie le circuit ci-contre, avec $e(t) = E_m\cos(\omega t)$. On note $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes de l'association LC parallèle. On définit les amplitudes complexes $\underline{E}$ et $\underline{U}$ des tensions $e(t)$ et $u(t)$. On pose $H = \dfrac{U_m}{E_m}$.



Q.1 Déterminer à l'aide d'une étude qualitative la nature du filtre.

Q.2 Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

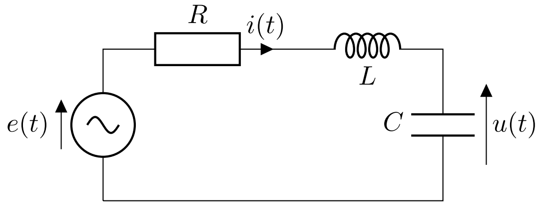
Q.3 Tracer l'allure du diagramme de Bode du filtre.

Q.4 Existe-t-il un phénomène de résonance de tension ? On tracera l'évolution de H et φ avec ω.

Q.5 Si oui pour quelles valeurs de Q ? Déterminer l'expression de la fréquence de résonance f_r et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.

Exercice 5 : Bilan de puissance dans un circuit RLC série

On considère le circuit suivant dans lequel $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



Q.1 On introduit la charge $q(t)$ du condensateur C telle que $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Écrire l'équation traduisant la loi des mailles dans le circuit et faisant intervenir $e(t)$, $i(t)$ et $q(t)$.

Q.2 Établir la relation :

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}\right)$$

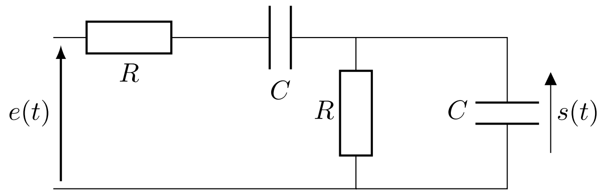
puis l'interpréter physiquement sous la forme d'un bilan de puissance.

Q.3 En régime sinusoïdal forcé, montrer que l'énergie fournie par le générateur sur une période est entièrement consommée par effet Joule dans la résistance.

Q.4 Montrer dans ce cas que l'énergie dissipée par effet Joule sur une période est maximale pour la pulsation $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, c'est-à-dire à la résonance d'intensité. On pourra au préalable exprimer l'intensité $i(t)$ en notation complexe, puis la mettre sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, où on exprimera uniquement l'amplitude I_m en fonction des données.

Exercice 6 : Filtre de Wien

On considère le filtre suivant :



Q.1 Déterminer sans calculs la nature du filtre.

Q.2 Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

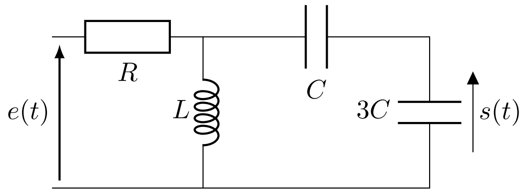
Q.3 Tracer le diagramme de Bode du filtre en précisant les asymptotes.

Q.4 Donner la bande passante ainsi que les pulsations de coupure.

Q.5 La tension d'entrée est $e(t) = E_m \cos(\omega t) + E_m \cos(10\omega t) + E_m \cos(100\omega t)$. À l'aide du diagramme de Bode asymptotique, donner une estimation de la tension de sortie. On prendra $\omega = 200\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $\dfrac{1}{RC} = 2000\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Exercice 7 : Filtre de Colpitts

On considère le filtre suivant :



Q.1 De quel type de filtre s'agit-il ?.

Q.2 Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

Q.3 Tracer le diagramme de Bode du filtre en prenant la valeur $Q = 0{,}1$. On recherchera tout d'abord les équations des asymptotes des deux courbes, et on fera apparaître les valeurs pour $\omega = \omega_0$.

Q.4 Un circuit multiplieur fournit le signal d'entrée $e(t) = 2E\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_1 = 100\omega_0$ et $\omega_2 = 101\omega_0$. Quel est le signal obtenu en sortie du filtre ?

Signaux 6 : Champ magnétique et ses actions

Exercice 1 : Questions de cours

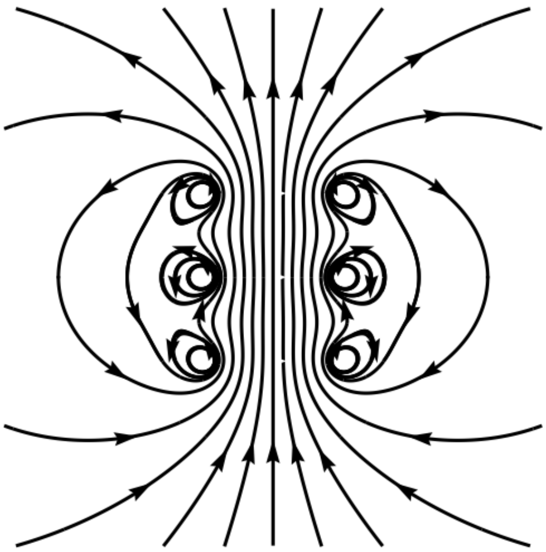
Q.1 Tracer l'allure de la carte de champ magnétique créé par une spire circulaire. Préciser les orientations du courant et du champ.

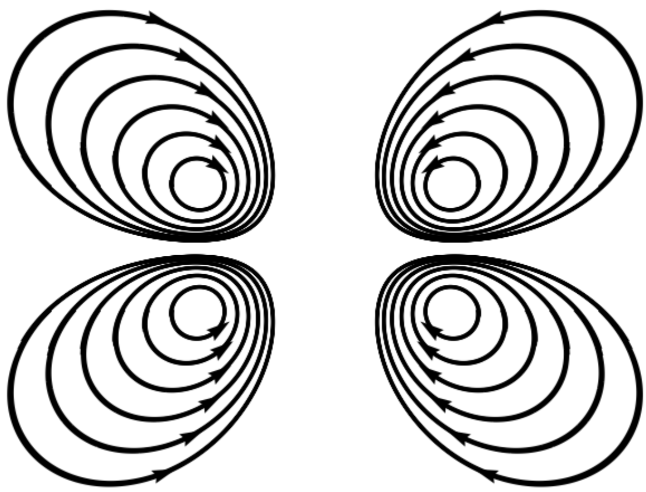
Q.2 Même question pour un solénoïde puis un aimant.

Q.3 Soit une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité i. Préciser l'expression de son vecteur moment magnétique, en indiquant les unités.

Exercice 2 : Cartes de champ

Q.1 Dans les cartes de champs magnétique suivantes, où le champ est-il le plus intense ? Où sont placées les sources ? Le courant sort-il ou rentre-t-il du plan de la figure ?





Exercice 3 : Champ magnétique terrestre

La Terre génère un champ magnétique dont on pense que l'origine est la circulation de particules chargés dans le manteau. En première approximation, on peut considérer la Terre comme un dipôle magnétique.

Pour mesurer approximativement la composante horizontale du champ magnétique terrestre, on utilise le dispositif suivant :

- une petite aiguille aimantée est placée au centre d'un solénoïde, l'ensemble étant horizontal,
- en l'absence de courant traversant le solénoïde, l'aiguille est orthogonal à l'axe du solénoïde,
- en présence d'un courant $I = 96\,\mathrm{mA}$ traversant le solénoïde, l'aiguille tourne de $37°$.
- le solénoïde utilisé comporte 130 spires, sa longueur est $60\,\mathrm{cm}$ et son rayon $3\,\mathrm{cm}$

Intensité champ magnétique créé par un solénoïde infini en son sein : $B = \mu_0 n I$ où n est le nombre de spires par unité de longueur et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Q.1 Déterminer la valeur de la composante B_H horizontale du champ magnétique terrestre.

Exercice 4 : Moment magnétique orbital

Une particule de masse m et de charge q décrit un mouvement circulaire uniforme à la vitesse v. On note T la période de ce mouvement et R son rayon.

Q.1 Exprimer l'intensité moyenne I résultant du mouvement de la charge.

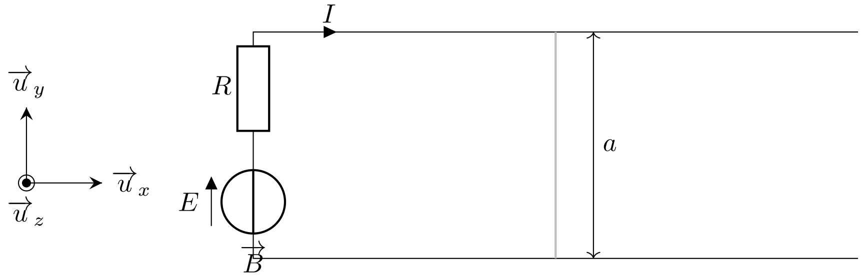
Q.2 En déduire le moment magnétique de ce système.

Q.3 Calculer le moment cinétique de la particule et comparer à son moment magnétique. *On admet que cette propriété se généralise.*

Q.4 Dans l'atome d'hydrogène, le moment cinétique de l'électron vaut $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$. Que vaut son moment magnétique ? Ce moment est appelé magnéton de Bohr.

Exercice 5 : Force de Laplace

Une tige conductrice de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$ et de longueur $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ est posée sur des rails de Laplace alimentés par un générateur de tension continue de f.e.m E. La résistance électrique totale du circuit est $R = 4{,}0\,\Omega$.



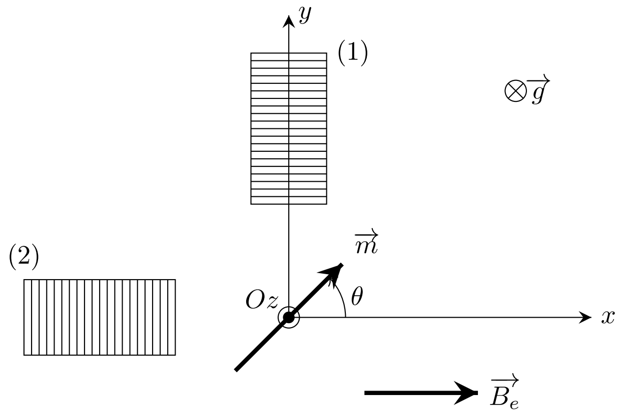
Un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_e}$ est appliqué, avec $B_e = 50\,\mathrm{mT}$.
La valeur de l'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q.1 Déterminer la direction et le sens de $\overrightarrow{B_e}$ pour lesquels la force de Laplace exercée sur la tige est verticale ascendante.

Q.2 Calculer la f.e.m minimale $E_{\min}$ pour que la tige quitte le rail.

Exercice 6 : Couple de Laplace

L'aiguille aimantée d'une boussole peut tourner librement autour de son axe (Oz)



Son moment magnétique $\vec{m}$ appartient au plan xOy ; il est repéré par l'angle θ. L'aiguille est soumise à un champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B_e} = B_e \vec{u}_x$ avec $B_e = 1{,}0\,\mathrm{mT}$.
Les deux bobines (1) et (2) génèrent dans la région de l'agiguille respectivement les champs magnétiques :

$$\overrightarrow{B_1} = B_0 \sin(\omega t)\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_2} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$$

L'aiguille possède un moment d'inertie $J = 3{,}0 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}}$ par rapport à (Oz) et ne subit aucun frottement.

Q.1 Dans un premier temps, les bobines (1) et (2) ne sont parcourues par aucun courant. Exprimer le moment du couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B_e}$ subi par l'aiguille aimantée en fonction de B_e, m, θ et d'un vecteur unitaire à préciser. Déterminer les valeurs de θ correspondant aux positions d'équilibre et préciser la stabilité de ces dernières.

Q.2 L'aiguille est écartée de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_0 sans vitesse angulaire initiale. Appliquer la loi du moment cinétique à l'aiguille et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ. On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mB_e}{J}}$.

Q.3 Résoudre l'équation différentielle.

Q.4 Les deux bobines sont maintenant branchées. Montrer que le champ magnétique créé par ces deux bobines est un champ magnétique tournant que l'on caractérisera.

Q.5 Une résonance est observée lorsque $\omega = \omega_0$. La fréquence du courant circulant dans les bobines est alors $f = 4{,}6\,\mathrm{Hz}$. Calculer m.

Signaux 7 : Circuit fixe dans un champ magnétique variable

Exercice 1 : Spire autour d'un solénoïde

Un solénoïde de rayon $R_1 = 2\,\mathrm{cm}$, constitué de $n = 10$ spires par cm, est alimenté par un générateur de f.e.m. $U = 30\,\mathrm{V}$. La résistance interne du générateur est de $1{,}2\,\Omega$ et celle du fil du solénoïde est $6{,}8\,\Omega$. Une spire conductrice $\mathscr{S}$, de rayon $R_2 = 4\,\mathrm{cm}$, est placée autour du solénoïde ; elle a le même axe que celui-ci. Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde vaut $B = \mu_0 n I$ à l'intérieur et est nul à l'extérieur.

Q.1 Quel est la valeur numérique du flux magnétique à travers la spire ?

Q.2 L'intensité du courant qui traverse le solénoïde décroît à partir de $t = 0$ selon la loi $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$. Quelle est l'unité de τ ?

Q.3 Quelle est la f.e.m. induite dans la spire pour $t > 0$?

Exercice 2 : Mutuelle entre une spire et un solénoïde

Une spire conductrice de rayon a_1 est placée autour d'un solénoïde de rayon $a_2 < a_1$, dont le nombre de spires par unité de longueur est n. La spire et le solénoïde ont même axe (Oz). Les intensités i_1 dans la spire et i_2 dans le solénoïde sont comptées positivement dans le sens positif autour de (Oz).

Q.1 Exprimer le flux magnétique envoyé par le solénoïde à travers la spire. Le champ magnétique créé par un solénoïde est $B = \mu_0 n I$ dans celui-ci et est nul à l'extérieur.

Q.2 Exprimer le flux magnétique envoyé par la spire à travers le solénoïde.

Q.3 L'intensité dans le solénoïde est $i_2(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On note R et L la résistance et l'auto-inductance de la spire. Déterminer l'intensité $i_1(t)$ en régime permanent.

Exercice 3 : Écrantage d'un champ magnétique

On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$.

On considère deux solénoïdes Σ_1 et Σ_2 coaxiaux, d'axe (Oz), de même longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$, de rayons $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$ et $r_2 = 5\,\mathrm{cm}$ et comportant respectivement $N_1 = 700$ et $N_2 = 500$ spires jointives, enroulées dans le même sens.

On négligera les effets de bord ; on considérera donc les solénoïdes comme très longs. Ces deux bobines ont pour résistance respectivement R_1 et $R_2 = 50\,\Omega$. On pourra introduire les nombres de spires par unité de longueur $n_i = N_i/L$. Le champ magnétique créé par un solénoïde est $\mu_0 n I$ à l'intérieur et est nul à l'extérieur.

Le solénoïde Σ_1 est parcouru par un courant d'intensité i, Σ_2 étant en circuit ouvert.

Q.1 Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ créé dans tout l'espace.

Q.2 En déduire que le coefficient d'inductance L_1 de Σ_1 vaut $\mu_0 \dfrac{N_1^2}{L} \pi r_1^2$; donner l'expression de L_2, inductance de Σ_2 et calculer sa valeur numérique.

Q.3 Définir le coefficient de mutuelle inductance M entre les deux solénoïdes. Montrer que $M = \mu_0 \dfrac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2$.

Le solénoïde Σ_1 est alimenté par un générateur idéal de courant $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$ avec $I_0 = 1{,}0\,\mathrm{A}$; les deux extrémités du solénoïde Σ_2 sont reliées par un fil sans résistance.

Q.4 Déterminer l'amplitude complexe du courant $i_2(t)$ circulant dans Σ_2 en fonction de M, L_2 et R_2. La mettre sous la forme :

$$\underline{i_2} = K \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \underline{i_0}$$

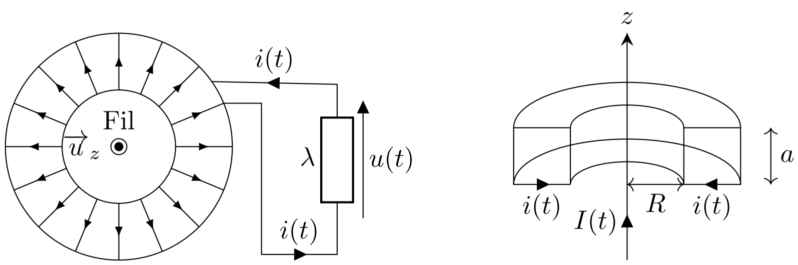
On donnera l'expression de K en fonction de N_1 et N_2 et celle de ω_c en fonction de R_2 et L_2.

Q.5 En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{B_2}$ du champ magnétique total à l'intérieur du solénoïde Σ_2. Montrer que ce champ tend vers 0 à haute fréquence. Commenter.

Q.6 Application numérique : calculer ω_c ainsi que les amplitudes de i_2 et de B_2 pour une fréquence de $11\,\mathrm{kHz}$. Calculer le rapport des amplitudes B_2/B_1.

Exercice 4 : Pince ampèremétrique

Pour des fils parcourus par un courant électrique très important, un ampèremètre n'est pas utilisable pour en mesurer l'intensité. On peut alors utiliser une pince ampèremétrique si le courant est variable.



Q.1 Champ magnétique engendré par un fil parcourant par un courant électrique. Localement, le champ magnétique engendré par un fil s'écrit :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u}_\theta$$

où le fil est orienté suivant le vecteur $\overrightarrow{u}_z$, r est la distance au fil et I l'intensité électrique du courant le parcourant.

a) Commenter l'expression du champ magnétique.

b) Représenter le fil et quelques lignes de champs.

Q.2 La pince ampèremétrique est un enroulement torique de N spires carrées d'inductance propre L qu'on ferme sur le fil de façon à ce que son axe soit confondu avec celui du fil. Le fil est parcouru par un courant harmonique de pulsation ω. On néglige la résistance du bobinage devant la résistance λ.

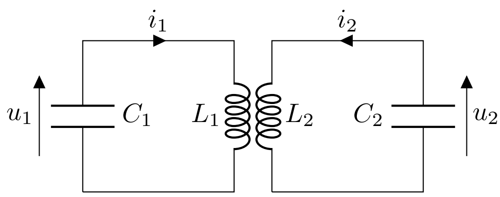
a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On pourra exprimer l'inductance mutuelle du système et admettre que $L = N \times M$.

b) Exprimer la fonction de transfert du système $\underline{T} = \frac{\underline{u}}{\underline{I}}$. Pour quel domaine de fréquence la mesure de I via u est possible ?

c) Écrire alors le lien entre la valeur efficace de $u(t)$ et celle de $I(t)$.

Exercice 5 : Oscillateurs couplés par induction mutuelle

Deux circuits électriques son couplés par induction mutuelle. On néglige la résistance électrique de chacun et on précise les relations suivantes : $L_1 = L_2 = L = 100\,\mathrm{mH}$, $C_1 = C_2 = C = 1\,\mathrm{\mu F}$. On note M l'inductance mutuelle entre les deux circuits.



Q.1 Soit q_1 et q_2 les charges des condensateurs à l'instant t, établir le système d'équations différentielles vérifié par q_1 et q_2. On posera $k = \frac{M}{L} \leqslant 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Q.2 En posant, $u = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ et $v = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$, écrire puis résoudre le système d'équations différentielles vérifié par u et v. On suppose $q_1(0) = Q$, $q_2(0) = 0$, $\dot{q_1}(0) = \dot{q_2}(0) = 0$.

Q.3 En déduire les expressions des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ aux bornes des condensateurs en posant $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$.

Q.4 Si $M \ll L$, montrer que ω_1 et ω_2 s'écrivent :

$$\omega_1 = \omega_0\left(1 - \frac{M}{nL}\right) \text{ et } \omega_2 = \omega_0\left(1 + \frac{M}{nL}\right)$$

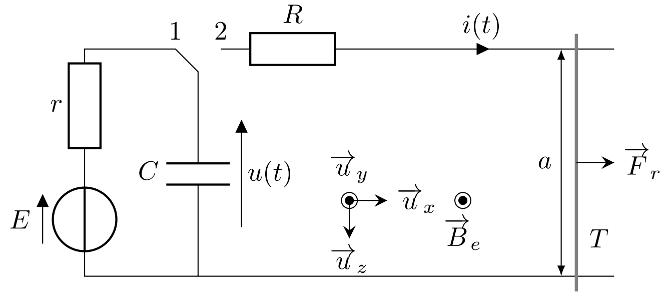
où n est un entier à préciser. En déduire l'expression de $u_{C1}(t)$ sous la forme d'un produit de cosinus, puis une méthode qui permette de mesurer expérimentalement le rapport $\frac{M}{L}$ à l'oscilloscope.

Q.5 En pratique, quels phénomènes vont limiter la durée des oscillations ?

Signaux 8 : Conversion électromécanique de puissance

Exercice 1 : Coup de frein

Nous souhaitons utiliser l'énergie stockée dans un condensateur pour donner un «coup de frein» au déplacement d'une tige conductrice posée sur des rails de Laplace distants de $a = 5{,}0\,\text{cm}$.



La tige conductrice T de masse $m = 5{,}0\,\text{g}$ se déplace à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. Le champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_e = B_e\vec{u}_y$. est imposé, avec $B_e = 50\,\text{mT}$.
La résistance électrique totale du circuit est $R = 1{,}0\,\Omega$.

À l'instant initial $t = 0^+$, l'interrupteur à deux voies bascule instantanément en position 2. À cer instant, la vitesse de la tige est $v_0 = 10\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

On néglige tout frottement ainsi que le phénomène d'auto-induction. L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Q.1 Quelle est la tension $u(t = 0^+)$ aux bornes du condensateur juste après la bascule de l'interrupteur ?

Q.2 Exprimer la f.e.m. induite dans le circuit en fonction de B_e, a et de la vitesse $v(t)$ de la tige. Représenter le schéma électrique équivalent au dispositif et en déduire une équation différentielle reliant $i(t)$ et $v(t)$ (équation électrique).

Q.3 Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur la tige puis appliquer à celle-ci la loi de la résultante cinétique. En déduire une deuxième équation différentielle couplant $i(t)$ et $v(t)$ (équation mécanique).

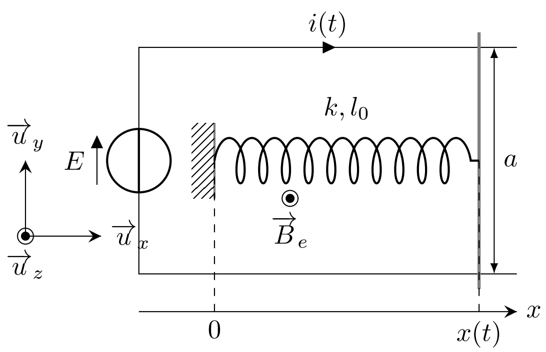
Q.4 Déduire du système couplé une équation différentielle vérifiée par $i(t)$ et mettre en évidence un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction des données. Résoudre l'équation différentielle après avoir précisé la valeur initiale $i(0)$. Montrer que $i(t)$ tend vers une valeur limite i_{lim} que l'on précisera.

Q.5 En déduire l'expression de $v(t)$. Montrer que la vitesse de la tige tend vers une valeur limite v_{lim} que l'on calculera.

Q.6 Faire un bilan énergétique de l'opération «coup de frein».

Exercice 2 : Principe du haut-parleur

On modélise un haut-parleur par une barre conductrice, de longueur a et de masse m, posée sur des rails conducteurs horizontaux. Cette barre est assujettie à se déplacer en translation suivant $\vec{u}_x$. ELle est reliée à un bâti fixe dans le référentiel d'étude par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Ce ressort modélise l'élasticité de la membrane du haut-parleur. Les frottements de la membrane sont traduit par la force $\vec{f} = -\mu\dot{x}\vec{u}_x$.



Le circuit constitué des rails et de la barre est alimenté par un générateur imposant une tension $E(t)$. La résistance totale du circuit, supposée constante, est notée R.
Les propriétés électriques de la bobine du haut-parleur sont prises en compte sous la forme d'une inductance propre L, non négligeable.
Le tout est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ stationnaire et uniforme.
Enfin, on néglige tout frottement solide.

Q.1 Écrire l'équation mécanique couplant $i(t)$ et $X(t) = x(t) - l_0$ notée (M).

Q.2 Proposer un modèle électrique du haut-parleur puis écrire l'équation électrique couplant $i(t)$ et $x(t)$ notée (E).

Q.3 Exprimer l'énergie totale U du système {haut-parleur} puis, à partir des équations (E) et (M) déterminer l'équation différentielle vérifiée par U. Commenter.

Q.4 Pour $E(t) = E_0\cos(\omega t)$, proposer une expression pour $X(t)$ et $i(t)$.

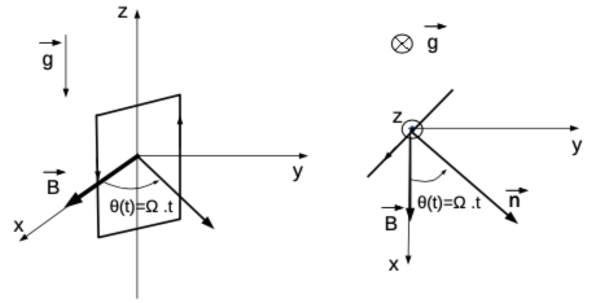
Q.5 Montrer que l'impédance $\underline{Z} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{i}}$ s'écrit :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$$

où on exprimera $\underline{Z}_m$, dite impédance motionnelle.

Q.6 Tracer l'allure de Z en supposant les frottements faibles.

Exercice 3 : Principe de l'alternateur



(a) Perspective (b) Vue de dessus

On considère une bobine plate à section carré de côté a et constitués de N spires : le rotor. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u}_x$ et entraîné à la vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe Oz.
La résistance du rotor vaut R, son inductance propre L est négligeable et son moment d'inertie par rapport à Oz vaut J.

Q.1 Exprimer le moment magnétique du rotor.

Q.2 Analyser qualitativement le comportement du système.

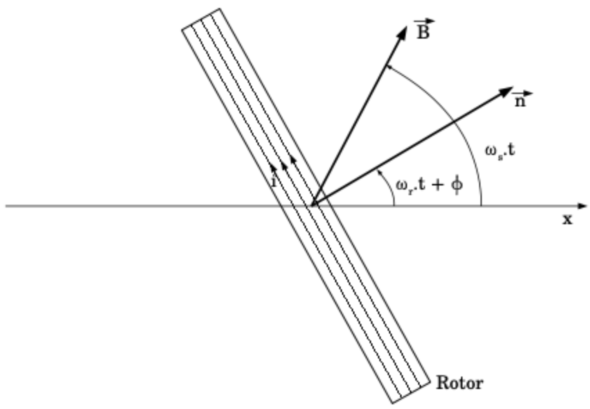
Q.3 Calculer le courant électrique $i(t)$ traversant le rotor.

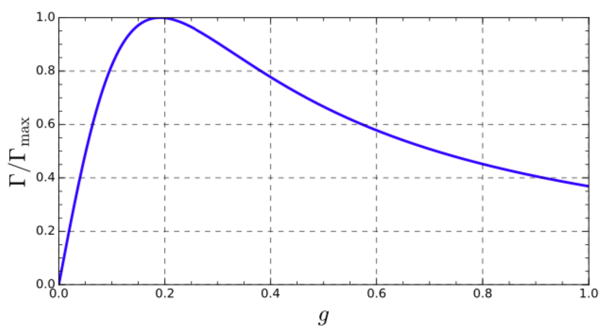
Q.4 Expliquer pourquoi les forces de Laplace exerce nécessairement un couple Γ résistant sur le rotor et calculer ce couple.

Q.5 Calculer la puissance électrique reçue par le rotor. D'où provient-elle ? Un calcul est attendu.

Exercice 4 : Principe du moteur aynchrone

On modélise le rotor par une bobine de résistance R, d'inductance propre L, de surface S et constitué de N spires. On suppose qu'en régime établi le champ magnétique tourne à la vitesse angulaire ω_s et que le rotor tourne à la vitesse angulaire ω_r.





Couple moteur en fonction du glissement $g = \frac{\omega_g}{\omega_s}$

Q.1 Quelle est l'origine physique du moment magnétique du rotor ?

Q.2 Proposer un modèle électrique du rotor et exprimer le courant $i(t)$ qui le parcourt en régime établi. On posera $\omega_g = \omega_s - \omega_r$. On posera $\phi_0 = NB_0S$ et $\tan(\psi) = \frac{R}{L\omega_g}$.

Q.3 En déduire la valeur du couple Γ subi par le rotor. Exprimer sa valeur moyenne $\langle\Gamma\rangle$, en fonction de ϕ_0, L, R et ω_g.

Q.4 On donne la représentation graphique $\langle\Gamma\rangle$. Le moteur est relié à une charge qui impose un couple résistant $-\Gamma_r$ inférieur à la valeur maximale de $\langle\Gamma\rangle$.

a) Montrer qu'il existe deux valeurs possi bles pour la vitesse ω_r du rotor.

b) Justifier le qualificatif «asynchrone» pour ce moteur.

c) Identifier sur la courbe la zone de fonctionnement stable et la zone de fonctionnement instable du moteur.

Deuxième partie

Mécanique

Liste des chapitres Mécanique

Mécanique 1 : Cinématique du point matériel

Exercice 1 : Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Considérons un point matéiel défini par une vitesse initiale $\overrightarrow{v}(0)$ de norme v_0 et par une accélération constante de norme a_0, colinéaire au vecteur cinématique vitesse initiale dans le référentiel lié au sol.

Q.1 Définir le repère et le système de coordonnées adaptés à l'étude de ce problème.

Q.2 Donner l'expression du vecteur cinématique accélération dans le repère choisi.

Q.3 En utilisant l'expression du vecteur cinématique accélération donnée dans l'énoncé, obtenir les équations du mouvement.

Q.4 Obtenir le vecteur vitesse en intégrant les équations du mouvement précédemment obtenues. En déduire l'expression de la vitesse, c'est-à-dire la norme du vecteur vitesse.

Q.5 Faire de même pour obtenir le vecteur position en intégrant les expressions obtenues pour les composantes de la vitesse.

Q.6 Représenter sur un schéma la trajectoire du mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Q.7 Représenter la position et la vitesse du point en fonction du temps dans le cas $a_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

Q.8 Faire de même dans le cas $a_0 > 0$ et $v_0 < 0$.

Exercice 2 : courbe uniformément accéléré

Considérons un point matériel défini par une vitesse initiale $\overrightarrow{v}(0)$ de norme v_0 et par une accélération constante de norme a_0, orthogonale au vecteur cinématique vitesse initiale dans le référentiel lié au sol.

Q.1 Définir le repère et le système de coordonnées adaptés à l'étude de ce problème, puis donner les expressions des vecteur cinématique vitesse et accélération dans le repère choisi.

Q.2 En utilisant l'expression du vecteur cinématique accélération donnée dans l'énoncé, obtenir les équations du mouvement.

Q.3 Obtenir le vecteur vitesse en intégrant les équations du mouvement précédemment obtenues. On sera particulièrement attentif à la prise en compte du vecteur vitesse initiale, $\overrightarrow{v}(0)$. En déduire l'expression de la vitesse, c'est-à-dire la norme du vecteur vitesse.

Q.4 Faire de même pour obtenir le vecteur position en intégrant les expressions obtenues pour les composantes de la vitesse.

Q.5 Représenter la position et la vitesse du point en fonction du temps dans le cas $a_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

Q.6 Déterminer analytiquement l'expression de la trajectoire du point, $y(x)$, dans le plan (x, y). La représenter sur un schéma en faisant apparaître les vecteurs vitesse et accélération à différents instants.

Exercice 3 : Dérivation de vecteurs dans la base cylindrique

Q.1 Représenter la base polaire et exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$.

Q.2 En se plaçant dans le référentiel où le repère cartésien est fixe, exprimer les dérivées premières des vecteur $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.

Q.3 En déduire l'expression du vecteur vitesse dans le repère cylindrique.

Q.4 En déduire l'expression du vecteur accélération dans le repère cylindrique.

Exercice 4 : Étude de mouvements circulaires

Q.1 Le mouvement étant circulaire, que valent $r(t)$ et $z(t)$ dans le repère cylindrique ? En déduire l'expression du vecteur position.

Q.2 En déduire l'expression du vecteur cinématique vitesse dans ce cas particulier.

On suppose le mouvement uniforme.

Q.3 Justifier que $v(t)$ et $\dot{\theta}(t)$, respectivement la norme de la vitesse et la vitesse angulaire sont constantes. On posera dans la suite $\dot{\theta} = \omega > 0$.

Q.4 En déduire l'expression de T, la période du mouvement, et du vecteur vitesse dans la base polaire.

Q.5 En déduire l'expression du vecteur accélération dans la base polaire.

Q.6 Faire de même dans la base de Frenet. Commenter.

Q.7 On cherche maintenant à caractériser la trajectoire. En supposant la norme du vecteur accélération constante de valeur a_0. Intégrer l'équation du mouvement pour obtenir $\theta(t)$ en utilisant $\theta(0) = 0$. En déduire l'expression du vecteur position dans la base cartésienne.

On suppose maintenant le mouvement non uniforme.

Q.8 Donner l'expression des vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire.

Q.9 Faire de même dans la base de Frenet.

Exercice 5 : Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

Q.1 Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180\,\mathrm{m}$. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.

Q.2 Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de $7\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Exercice 6 : Interpellation pour vitesse scessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ au bout de 10 s.

Q.1 Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ? Quelle distance aura-t-il parcourue ? Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

Exercice 7 : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il ressent une accélération :

$$a = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

où $R = 6400\,\mathrm{km}$ est le rayon de la terre, $g_0 = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et r est le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la terre sur elle-même.

Q.1 Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis la vitesse angulaire Ω.

Q.2 Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Q.3 Déterminer sa vitesse sur sa trajectoire et calculer sa norme.

Exercice 8 : Clothoïde, courbe des autoroutes

Pour éviter les secousses et adoucir le transport de passager, les trajectoires de certains moyens de transports ne peuvent pas passer de rectiligne à circulaire en un instant. La variation d'accélération serait très inconfortable pour tout voyageur d'un train, d'une voiture, d'une attraction de type montagne russes.

On doit alors parcourir une courbe intermédiaire entre la partie rectiligne et la partie circulaire. Cette courbe, appelée clothoïde ou courbe de Cornu, est caractérisée par sa courbure qui varie proportionnellement avec le temps :

$$\frac{1}{R(t)} = \alpha t$$

Q.1 Montrer alors que pour un mouvement uniforme, l'accélération varie linéairement avec le temps.

Q.2 Exprimer le vecteur accélération d'un point M parcourant cette courbe à la vitesse v_0 constante dans le repère de Frenet.

Q.3 Exprimer le vecteur tangentielle dans le repère cartésien en fonction de $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et v_0.

Q.4 Exprimer le vecteur normal dans le repère cartésien en fonction de $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et v_0.

Q.5 En déduire deux équations différentielles couplées vérifiées par $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

Mécanique 2 : Dynamique du point matériel

Exercice 1 : Chute libre sans frottements

On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\cos(\alpha)\overrightarrow{u}_x + v_0\sin(\alpha)\overrightarrow{u}_y$ qui n'est soumise qu'à son poids.

Q.1 Réaliser l'étude complète du problème afin d'obtenir les équations scalaires du mouvement.

Q.2 Déduire des équations précédentes les lois horaires du mouvement.

Q.3 Déterminer l'altitude maximale de la particule au cours du mouvement.

Q.4 Déterminer la distance parcourue par la particule au cours du mouvement.

Q.5 Déterminer la trajectoire de la particule au cours du mouvement, et la tracer en faisant apparaître toutes les grandeurs définies plus tôt.

Exercice 2 : Chute libre avec frottements fluides linéaires

On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ soumise à une force de frottement fluide. Le mouvement est supposé plan et s'effectue dans le plan xOz.

On fait l'hypothèse de frottements linéaires avec la vitesse c'est-à-dire qu'on suppose que $\overrightarrow{F_f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.

Q.1 Écrire l'équation vectorielle du mouvement. La projeter sur les axes adaptés pour obtenir deux équations différentielles scalaires à coefficients constants d'ordre un.

Q.2 Résoudre les deux équations différentielles.

Q.3 En posant une vitesse caractéristique v_∞, un temps caractéristique τ et un vecteur adimensionné $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{v_\infty}$, déterminer l'équation vectorielle adimensionnée à partir de l'équation obtenue précédemment.

Q.4 Quel est le comportement de la particule aux temps longs ?

Q.5 Quel est le comportement de la particule aux temps cours ? On distinguera deux cas.

Exercice 3 : Chute libre avec frottements fluides quadratiques

On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ soumise à une force de frottement fluide. Le mouvement est supposé plan et s'effectue dans le plan xOz.

On fait l'hypothèse de frottements quadratiques avec la vitesse c'est-à-dire qu'on suppose que $\overrightarrow{F_f} = -\kappa v\overrightarrow{v}$.

Q.1 Écrire l'équation vectorielle du mouvement.

Q.2 En posant une vitesse caractéristique v_∞, un temps caractéristique τ et un vecteur adimensionné $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{v_\infty}$, déterminer l'équation vectorielle adimensionnée à partir de l'équation obtenue précédemment.

Q.3 Quel est le comportement de la particule aux temps longs ?

Q.4 Quel est le comportement de la particule aux temps cours ? On distinguera deux cas.

Exercice 4 : Le pendule simple

Étudions un pendule simple constitué d'une masse m au bout d'un fil inextensible et sans masse de longueur l, oscillant dans un plan vertical.

Q.1 Réaliser l'étude complète du problème afin d'obtenir les équations scalaires du mouvement. On précisera en particulier de quel type est l'équations différentielle portant sur $\theta(t)$.

Q.2 À partir de l'équation différentielle obtenue, déterminer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des conditions initiales.

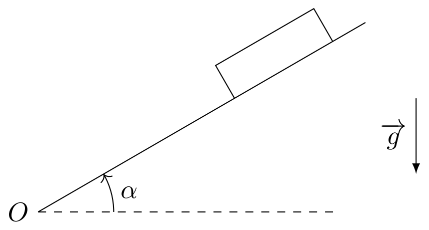
Q.3 En déduire l'expression de la tension du fil T, en fonction de l'angle θ et des conditions initiales.

Q.4 Pour quelle(s) valeur(s) de θ le fil est-il détendu ? Que se passe-t-il alors ?

Q.5 Proposer une solution pour résoudre l'équation différentielle sur $\theta(t)$, au prix d'une approximation que l'on précisera.

Q.6 Quelle est alors la période du mouvement ? De quoi dépend-elle ?

Exercice 5 : Plan incliné



On fait glisser un objet de masse $m = 200\,\text{g}$ sur un plan incliné en lui communiquant une vitesse initiale $v_0 = 2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le sens de la montée.

Le centre de masse G se trouve initialement en O. La pente du plan incliné est définie par l'angle $\alpha = 20°$. Le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ est supposé galiléen et l'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Nous négligeons tous les frottements.

Q.1 Choisir un repère adapté au problème.

Q.2 Faire un bilan des forces appliquées à la pelle.

Q.3 Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la pelle dans $\mathscr{R}$.

Q.4 Projeter l'équation du mouvement sur les vecteurs de base.

Q.5 Déterminer l'équation horaire du mouvement.

Q.6 En déduire la distance maximale parcourue par G dans le sens de la montée.

Q.7 Quelle est la durée Δt nécessaire pour que l'objet revienne à sa position initiale O ?

Exercice 6 : Balle immergée

On considère une balle de masse $m = 2{,}7\,\text{g}$ et de diamètre $d = 40\,\text{mm}$. La balle est lâché sans vitesse initiale au fond du bassin rempli d'eau. La balle remonte à la surface.

Le centre de masse G de la balle est repéré par son altitude z, initialement nulle. Lorsque $z = 30\,\text{cm}$ la partie supérieure de la balle affleure la surface du bain. La balle subit une force de frottement fluide de norme $F_f = hv^2$ proportionnelle au carré de sa vitesse v et opposée à son déplacement vertical.

Nous prendrons $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $h = 0{,}30\,\text{USI}$ et $\mu_e = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (masse volumique de l'eau).

Q.1 Faire un bilan des forces s'exerçant sur la balle lors de sa remontée vers la surface. Quelle est l'unité de h ?

Q.2 Appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

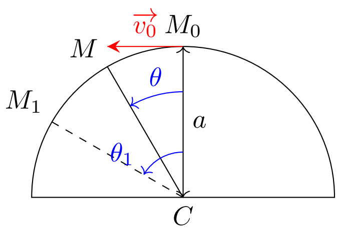
Q.3 Exprimer et calculer l'accélération initiale de la balle.

Q.4 Quelle serait la vitesse de la balle pour $z = 30\,\text{cm}$ s'il n'y avait pas de force de frottement ?

Q.5 Évaluer la durée de la remontée de la balle vers la surface en précisant les éventuelles approximations effectuées.

Exercice 7 : Glissade sur un igloo

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un pingouin, assimilé à un point matériel M de masse m, mobile sur la surface d'un igloo sphérique S, de centre C et de rayon a, subit de la part de celui-ci une action de contact sans frottements. Le pingouin M quitte le sommet de l'igloo avec la vitesse v_0, il glisse sur l'igloo puis décolle en M_1.



Q.1 Déterminer l'équation du second ordre vérifiée par θ tant que le pingouin reste en contact avec la sphère.

Q.2 On pose $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire $\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{g}{a}\sin\theta$. Intégrer l'équation différentielle par rapport à θ. En déduire le calcul de la réaction de l'igloo sur le pinguin.

Q.3 Calculer la réaction à $t = 0$. En déduire que si $v_0 > V_{\text{lim}}$ que l'on déterminera, le pingouin quitte l'igloo dès le sommet. On se place dans le cas $v_0 < V_{\text{lim}}$. Calculer l'angle θ_1 pour lequel le pingouin quitte l'igloo. Calculer le chemin parcouru sur l'igloo par le point lorsque $v_0 = \dfrac{V_{\text{lim}}}{2}$.

Mécanique 3 : Les oscillateurs mécanique

Exercice 1 : Ressort horizontal

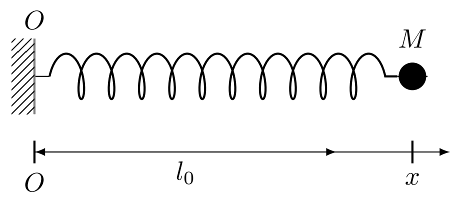
Q.1 Représenter un système masse-ressort horizontal :
- quand son élongation est maximale,
- un quart de période plus tard,
- une demi-période plus tard.

Q.2 Représenter également par des vecteurs la force de tension sur l'extrémité mobile et le vecteur vitesse de ce point à chacun de ces instants.

Q.3 Si l'élongation du ressort est maximale (notée Δl_{max} à $t = 0\,\mathrm{s}$, donner une expression de son élongation en fonction du temps.

Exercice 2 : Ressort non amorti horizontal

Considérons un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 fixé à un mur par une de ses extrémités. On attache à l'autre extrémité une masse m. On étire le ressort d'une certaine longueur L puis on lâche la masse sans lui communiquer de vitesse initiale. La masse est posée sur le sol ce qui impose un mouvement horizontal. On néglige tout frottement avec le sol.



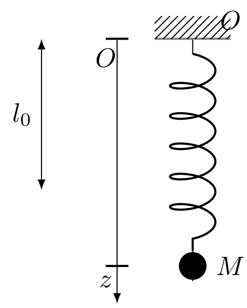
Q.1 Réaliser un bilan des forces s'appliquant sur la masse.

Q.2 En déduire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse $x(t)$.

Q.3 Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 3 : Ressort amorti vertical

Considérons cette fois un système masse-ressort mais vertical. Une extrémité du ressort est fixée au plafond tandis que l'autre est libre. Sur cette extrémité libre, on place une masse m. On admet que la masse subit une force de frottement fluide de la forme $-\lambda\overrightarrow{v}$. À l'instant initial, on communique une vitesse initiale v_0 vers le bas à la masse qui était à sa position d'équilibre.



Q.1 Exprimer la position z_{eq} d'équilibre du ressort et vérifier que son expression est bien homogène à une distance.

Q.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Donner l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre.

Exercice 4 : Oscillations d'un flotteur sur l'eau

Un flotteur (assimilé à un cylindre de section s, de hauteur h et de masse volumique ρ) flotte à la surface de l'eau (de masse volumique ρ_e). On note $z(t)$ la position du centre de gravité G du flotteur par rapport à la surface de l'eau et on suppose que le flotteur n'est jamais entièrement immergé. On appuie dessus pour enfoncer son centre de gravité d'une profondeur z_0 et on le relâche sans vitesse initiale. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air.

Q.1 Exprimer la poussée d'Archimède exercée sur le flotteur en fonction de s, h, z, ρ_e et g.

Q.2 Déterminer la période des oscillations du flotteur.

Q.3 Déterminer $z(t)$.

Exercice 5 : Amortisseur de voiture

On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement fluide α. La force de frottement a pour expression $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Une masse $m/4$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer le long de l'axe vertical $\overrightarrow{u}_z$ orienté vers le haut. On prend $m = 1200\,\mathrm{kg}$ et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Étude statique :

Q.1 Déterminer la longueur à l'équilibre de la suspension en fonction de l_0, m, g et k. Justifier physiquement chacun des termes de la formule.

Q.2 Lorsque l'on enlève la rouse, le ressort a une longueur totale de 40 cm. En déduire la valeur numérique de l_0.

Q.3 Lors du changement d'une roue, lorsque l'on soulève d'une hauteur $h = 15\,\mathrm{cm}$ la masse $m/4$, le ressort est détendu. En déduire la longueur d'équilibre l_{eq} du ressort puis vérifier que : $k = 20 \times 10^3\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$

Étude dynamique :

Q.4 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur $l(t)$ du ressort. La mettre sous forme canonique.

Q.5 En déduire l'expression du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.

Q.6 Déterminer et calculer α afin que le dispositif fonctionne en régime critique. On prendra soin de bien donner son unité.

Q.7 On enfonce la masse $m/4$ d'une hauteur $d = 5\,\mathrm{cm}$ par rapport à sa position d'équilibre et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Calculer $z(t)$ puis tracer l'allure de la position de la masse au cours du temps dans le cas du régime critique.

Q.8 On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut $m = 2200\,\mathrm{kg}$. Déterminer les nouveaux paramètres de l'amortisseur Q et ω_0.

Q.9 Le nombre d'oscillations est-il satisfaisant pour l'utilisation de l'amortisseur ?

Exercice 6 : Étude d'un haut-parleur

Un haut-parleur est constitué d'une bobine et d'un aimant sur lequel on a fixé une membrane. On modélise le système de la façon suivante : une masse $m = 10\,\mathrm{g}$ se déplace horizontalement le long de l'axe Ox, cette masse est reliée à un ressort de raideur $k = 15\,\mathrm{kN\cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide l_0, est est soumise à des frottements fluides modélisés par la force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Cette masse est soumise à une force d'excitation proportionnelle à l'intensité du courant qui circule dans la bobine du haut-parleur, force donnée par $\overrightarrow{F} = \beta i(t)\overrightarrow{u}_x$ avec $\beta = 200\,\mathrm{N\cdot A^{-1}}$.

On impose un courant sinusoïdal $i(t) = I_9\cos(\omega t)$ avec $I_0 = 1\,\mathrm{A}$.

Q.1 Donner l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

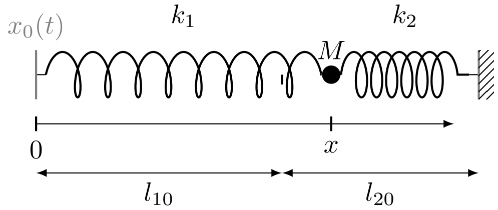
Q.2 On pose $\underline{X}(t) = l_0 + \underline{X_0}e^{j\omega t}$. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X_0}$.

Q.3 Pour quelles valeurs de α le système est-il résonnant ?

Q.4 On se place dans le cas où le système est résonnant, discuter et donner la bande passante du système en fonction du paramètre α, c'est-à-dire la gamme de fréquence pour lesquelles $|\underline{X_0}| > X_{\max}/\sqrt{2}$.

Exercice 7 : Système à deux ressorts

Un solide M, de masse m, peut se déplacer sur une tige horizontale parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.



M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide l_{10} et l_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'asvcisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = l_{10} + l_{20}$.

Q.1 Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

Q.2 Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de hauche est immobile en $x = 0$.

Q.3 On introduit $X = x - x_{\mathrm{eq}}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par X lorque la paroi bouge.

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x_0}(t) = X_{0m}e^{j\omega t}$, $\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\underline{v} = V_m e^{j(\omega t+\phi)}$ associées à $x_0(t)$, $x(t)$ et $v(t) = \dot{X}(t)$.

Q.4 En exprimant ω_0, Q et α, établir la relation :

$$V_m e^{j\phi} = \frac{\alpha X_{0m}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Q.5 Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

Mécanique 4 : Énergie, travail, puissance

Exercice 1 : Applications directes

Q.1 Rappeler le nom des unités usuelles de puissance et de travail. Les exprimer avec les unités de base du système international.

Q.2 La puissance d'une force est négative. Est-elle motrice ou résistance ?

Q.3 Citer l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force de rappel élastique.

Q.4 Citer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur. Le point M est repéré en coordonnées cartésiennes avec l'axe (Ox) orienté vers le bas. Exprimer cette énergie en fonction de l'abscisse x du point M.

Q.5 Les forces de Van der Waals dérivent d'une énergie potentielle dont l'expression en coordonnées sphériques est $\mathscr{E}_\mathrm{p} = -\dfrac{A}{r^6}$ avec A une constante positive. On donne l'expression du gradient en sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathscr{E}_\mathrm{p} = \frac{\partial \mathscr{E}_\mathrm{p}}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathscr{E}_\mathrm{p}}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathscr{E}_\mathrm{p}}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

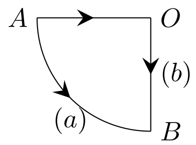
Donner la forme de la force associée et préciser s'il s'agit d'une force attractive ou répulsive. Donner également l'unité de A.

Q.6 Un objet accroché à un ressort idéal n'est soumis qu'à son poids et à la force exercée par le ressort. Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

Exercice 2 : Travail d'une force

On considère un point M soumis à une force $\vec{F}$ qui peut parcourir deux chemins (a) et (b). Le point M est repéré par ses coordonnées polaires r et θ. Le chemin (a) est un arc de cercle de rayon R tandis que le chemin (b) est constitué de deux segments de droite AO et OB de longueur R. Les deux chemins sont issus de A et mènent à B.

La force $\vec{F}$ s'écrit $\vec{F} = r^2 d^2 \vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires, où d est une constante.



Q.1 Déterminer le travail W de la force $\vec{F}$ pour les deux chemins envisagés. Conclure quant au caractère conservatif de $\vec{F}$.

Q.2 Réitérer avec la force $\vec{F'} = r^2 d^2 \vec{u}_r$.

Q.3 Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force envisagée qui est conservative. On pourra par exemple utiliser un déplacement élémentaire sur le chemin OB.

Exercice 3 : Étude du pendule simple

On considère un pendule simple : une masse m est suspendue à un fil sans masse inextensible de longueur l, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilisera les coordonnées polaires pour faire cette étude, le mouvement étant supposé contenu dans le plan vertical. On prendra O, origine du repère, comme point d'attache du pendule et on notera x la verticale descendante.

Q.1 Faire l'étude du problème (schéma, bilan des forces, expression du vecteur cinématique vitesse).

Q.2 En utilisant le théorème de la puissance cinétique, retrouver l'équation différentielle du pendule sur $\theta(t)$.

L'équation du mouvement n'est pas linéaire, de plus il n'existe pas de solution analytique de cette équation. On se propose donc d'utiliser la courbe d'énergie potentielle pour étudier la trajectoire.

Q.3 Justifier que le mouvement est conservatif.

Q.4 Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ. On prendra l'origine des potentiels en $\theta = 0$ et on commentera son comportement avec θ.

Q.5 Tracer le graphe de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(\theta)$. Existe-t-il des points d'équilibre ? Sont-ils stables ?

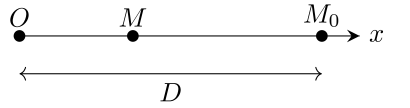
Q.6 Considérons un état initial du pendul lâché à un angle θ_0 sans vitesse initiale. À l'aide de la courbe d'énergie potentielle, décrire le type de mouvement observé. Préciser la répartition de l'énergie mécanique entre énergie potentielle et énergie cinétique.

Q.7 Prenons maintenant θ_0 quelconque mais $\dot{\theta}_0 < 0$ telle que $\mathscr{E}_\mathrm{m} > \mathscr{E}_{\mathrm{p,max}}$. À l'aide de la courbe d'énergie potentielle, décrire le type de mouvement observé.

Exercice 4 : Curling

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison.

Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point M de masse $m = 20\,\text{kg}$ glissant selon l'axe Ox vers le point M_0 visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, la maison se trouvant à la distance $D = OM_0 = 25\,\text{m}$ du point O.



Nous supposerons que la force de frottement $\vec{F} = -F_0\vec{u}_x$ de la glace sur la pierre est constante pendant toute la glissade et s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Nous prendrons $F_0 = 3{,}0\,\text{N}$. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide. Le lancé étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête !

Q.1 Que valent les énergies cinétiques initiales $\mathscr{E}_{\text{c,i}}$ et finale $\mathscr{E}_{\text{c,f}}$ de la pierre ?

Q.2 Calculer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.

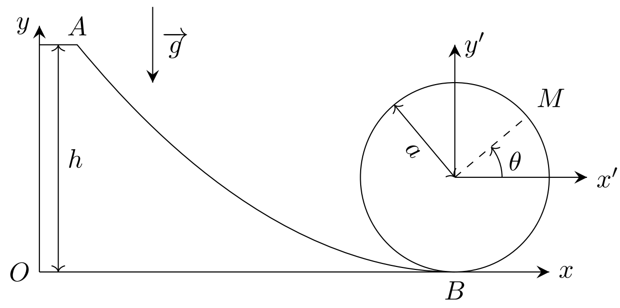
Q.3 Appliquer la loi de l'énergie cinétique à la pierre et en déduire la vitesse v_0 adaptée.

Exercice 5 : Looping

Une voiture de manège de masse $m = 24\,\text{kg}$ est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon $a = 4{,}7\,\text{m}$ de la figure ci-contre.

La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude $h > a$.

h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en constact avec les rails.



Q.1 Exprimer la vitesse v_B en B de la voiture en fonction de g et h.

Q.2 Exprimer la vitesse $v_M(\theta)$ en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.

Soit $\vec{R}$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.

Q.3 Exprimer $\vec{R}$ en M en fonction de g, h, m, a et θ.

Q.4 Pour quel point M_0 du cercle la norme de $\vec{R}$ est-elle minimale ?

Q.5 Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.

Exercice 6 : Cycliste au Tour de France

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante P, les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste ($\vec{F} = -kv\vec{v}$) où k est une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

Q.1 En appliquant le théorème de la puissance cinétique, établir une équation différentielle en v et montrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k(v_l^3 - v^3)$$

où v_l est une constante dont on cherchera la signification physique.

Q.2 On pose $f(x) = k(v_l^3 - v^3)$, déduire des résultats précédent l'équation différentielle vérifiée par f.

Q.3 Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, s'il aborde la ligne droite avec une vitesse v_0.

Q.4 Application numérique : lors d'un sprint, la puissance développée vaut $P = 2\,\text{kW}$ et la vitesse limite vaut $v_l = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminer la valeur de k et en déduire la distance caractéristique pour qu'un coureur de masse $m = 85\,\text{kg}$ avec son vélo atteigne cette vitesse. Conclure.

Mécanique 5 : Mouvement de particules chargées

Exercice 1 : Action d'un champ magnétique sur un proton ou sur un électron

Un électron et un proton de même énergie cinétique décrivent des trajectoires circulaires dans un champ magnétique uniforme. Comparer :

Q.1 Leur vitesse ;

Q.2 Le rayon de leur trajectoire ;

Q.3 Leur période.

Exercice 2 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

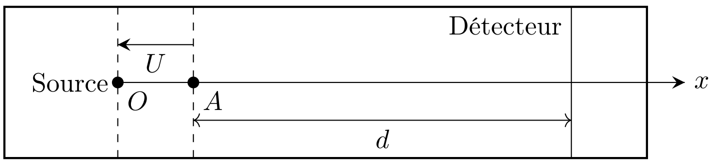
On considère une particule de charge $q > 0$ de masse m animée à l'instant $t = 0$, d'une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$. Elle fait un angle α avec l'axe (Ox) tel que $\overrightarrow{v}_0 = v_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_z)$. Elle est plongée dans un champ $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_z$ avec $E_0 = C^{te} > 0$ uniforme.

Q.1 Déterminer les équations horaires du mouvement.

Q.2 En déduire la trajectoire de la particule.

Exercice 3 : Analyseur à temps de vol linéaire

L'analyse d'un faisceau ionique consiste à séparer les ions les uns des autres selon leur rapport m/q. Dans son principe, l'analyseur à temps de vol linéaire est le plus simple de tous.



La source d'ions fournit des ions de masse m et de charge positive q qui entrent en O avec une vitesse négligeable dans une zone d'accélération (comprise entre O et A) où une tension électrique $U = 15\,\mathrm{kV}$ est appliquée. Les ions parcourent librement la région suivante jusqu'au détecteur situé à la distance $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$ de la zone d'accélération. On mesure le "temps de vol" t_v mis par la particule pour parcourir la distance d.

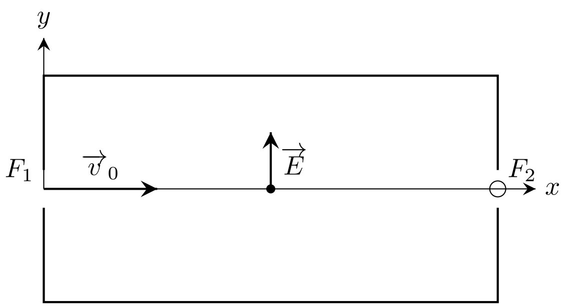
Q.1 Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v}_A$ de l'ion en A.

Q.2 Montrer que la mesure du temps de volt t_v permet de déduire le rapport m/q. Calculer t_v dans le cas d'un ion de masse $m = 3{,}8 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ et de charge $q = e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Exercice 4 : Filtre de vitesse

Afin de diminuer la dispersion des vitesses des ions dans un spectromètre de masse, il est nécessaire de réaliser un filtrage de vitesse. Le filtre de Wien présenté sur le schéma ci-dessous combine l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_y$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$ perpendiculaires entre eux.

Les deux champs sont uniformes et permanents.



Q.1 Un ion de masse m et de charge q pénètre dans le filtre par la fente F_1 avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Écrire la force de Lorentz alors ressentie par l'ion.

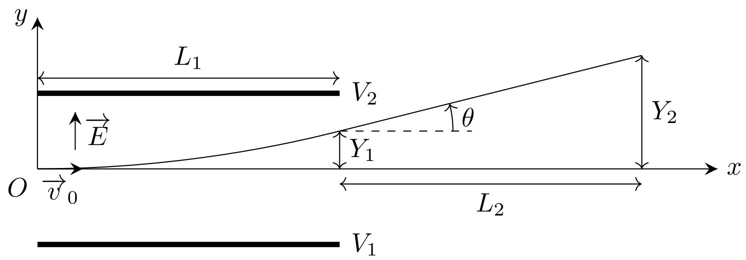
Q.2 À quelle condition l'ion peut-il avoir une trajectoire rectiligne l'amenant à la fente F_2 ?

Q.3 Exprimer en fonction de E et B la vitesse v_0 de l'ion lui permettant d'atteindre la fente F_2.

Exercice 5 : Imprimante jet d'encre

Dans un dispositif d'impression industriel, les gouttelettes d'encre sont chargées puis déviées de manière contrôlée par un déflecteur électrostatique avant d'atteindre le support d'impression.

Une gouttelette de volume $V = 10\,\mathrm{pL}$, de charge $q = 3{,}4\times10^{-15}\,\mathrm{C}$ et de vitesse $v_0 = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ entre en O dans le déflecteur constitué de deux électrodes planes portées aux potentiels électriques V_1 et V_2 générant un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_y$ avec $E = 5{,}0\times10^5\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$. La longueur du déflecteur est $L_1 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Le support d'impression se trouve à la distance $L_2 = 20\,\mathrm{cm}$ de la sortie du déflecteur. L'encre est enssentiellement consituée d'eau de masse volumique $\mu = 1{,}0\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.



Q.1 Quel est le signe de $V_1 - V_2$ pour que la gouttelette d'encre soit effectivement déviée dans le sens des y croissants ?

Q.2 Calculer la masse m de la gouttelette et montrer que l'on peut négliger son poids devant la force électrique de Lorentz. On donne $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q.3 Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la gouttelette entre les électrodes et déterminer l'équation de sa trajectoire. En déduire le déplacement Y_1 en sortie du déflecteur.

Q.4 Caractériser la trajectoire de la gouttelette après sa sortie du déflecteur, en négligeant son poids.

Q.5 Exprimer puis calculer la déflexion angulaire θ. En déduire le déplacement Y_2

Exercice 6 : Action de 2 champs magnétiques successifs

Dans le demi-espace $x > 0$, règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_1 = B_0\overrightarrow{u}_z$ et dans le demi-espace $x < 0$, règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_2 = \dfrac{B_0}{2}\overrightarrow{u}_z$. Une particule de masse m de charge $q > 0$ est placée au point origine O du référentiel d'étude galiléen $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$, à $t = 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}(t = 0) = v_0\overrightarrow{u}_x$, $v_0 > 0$.

Q.1 Décrire et dessiner la trajectoire de la particule pour $x > 0$.

Q.2 Décrire et dessiner la trajectoire de la particule pour $x < 0$.

Q.3 Quelle est la vitesse moyenne de la particule suivant (Oy), appelée vitesse de dérive $\overrightarrow{D}$.

Q.4 Reprendre les questions précédentes avec dans les demi-espace $x < 0$ un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_2} = -B_0\overrightarrow{u}_z$.

Exercice 7 : Mesure du rapport e/m

Les bobines d'Helmholtz, du nom d'Hermann Ludwig von Helmholtz, sont un dispositif constitué de deux bobines circulaires de même rayon, parallèles, et placées l'une en face de l'autre à une distance égale à leur rayon. En faisant circuler du courant électrique dans ces bobines, un champ magnétique est créé dans leur voisinage, qui a la particularité d'être relativement uniforme au centre du dispositif dans un volume plus petit que les bobines elles-mêmes.

Un canon à électrons délivre des électrons accélérées sous une tension de $U = 200\,\mathrm{V}$. Ils sont injectés perpendiculairement au champ $\overrightarrow{B}$ entre les bobines de Helmholtz.

Q.1 Calculer la vitesse v_0 de sortie des électrons.

Q.2 Décrire leur trajectoire entre les bobines.

Q.3 Donner le rayon de cette trajectoire en fonction de v_0, e, m, B puis en fonction de $\dfrac{e}{m}$, U et B.

Q.4 Calculer le rapport $\dfrac{e}{m}$ pour un champ de $1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{T}$ et un rayon mesuré de $4{,}7\,\mathrm{cm}$. La tension est toujours de $200\,\mathrm{V}$

Mécanique 6 : Loi du moment cinétique

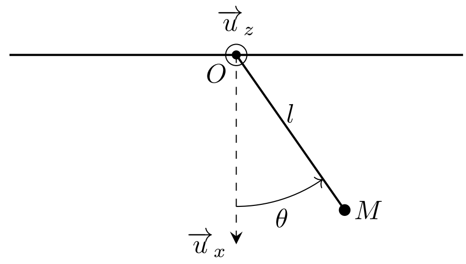
Exercice 1 : Ordres de grandeur des moments cinétiques

Q.1 Lors de son mouvement révolutif autour du Soleil, la Terre T parcourt une trajectoire quasi-circulaire de centre confondu avec le centre du Soleil S et de rayon égal à la distance Terre-Soleil $D_{\mathrm{TS}} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$. Calculer la valeur du moment cinétique de la Terre par rapport à S dans le référentiel héliocentrique. La masse de la Terre vaut $m_{\mathrm{T}} = 6{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Q.2 Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire et uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53\,\mathrm{pm}$ est parcourue à la fréquence $f = 6{,}6 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$. Calculer le moment cinétique de l'électron. On rappelle que sa masse vaut $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 2 : Pendule simple

On considère un pendule simple, constitué d'un fil inextensible de longueur l, sans masse, dont une extrémité est attachée en un point O fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen, et à l'autre extrémité duquel est placé un point matériel M de masse m. On note $\overrightarrow{u}_x$ l'axe vertical vers le bas, et $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la pesanteur. On étudie le mouvement dans le base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$, dans laquelle l'angle θ est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{OM}})$.



Q.1 Exprimer par trois méthodes différentes (calcul de produit vectoriel par composantes, normes et angles, ou bras de levié) le moment cinétique en O de la masse au cours du mouvement, noté $\overrightarrow{L_O}(M)$.

Q.2 Déterminer le moment en O de la tension du fil.

Q.3 Déterminer de trois manières différentes l'expression du moment en O du poids.

Q.4 Démontrer le théorème du moment cinétique à partir de la seconde loi de Newton.

Q.5 En déduire l'équation du mouvement.

Q.6 En déduire l'expression de la période des oscillations de faible amplitude du pendule.

Q.7 Peut-on obtenir l'expression de la tension du fil au cours du mouvement, uniquement à l'aide de considération de moments cinétique ?

Exercice 3 : Pendule conique

On considère un pendule simple, constitué d'un fil inextensible de longueur l, sans masse, dont une extrémité est attachée en un point O fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen, et à l'autre extrémité duquel est placé un point matériel M de masse m.

Un enfant fait tourner le pendule de manière à ce que la masse effectue un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω le plan xO_1y. Le fil OM garde une inclinaison constante α par rapport à la verticale au cours du mouvement. On étudie le mouvement dans le base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ telle que $\overrightarrow{O_1M} = \rho\overrightarrow{u}_r$.

Q.1 Faire un schéma en perspective de la situation, en faisant apparaître la base cylindrique, puis un schéma dans le plan contenant les points O, O_1 et M.

Q.2 Déterminer le moment cinétique de M et le moment des forces par rapport à l'axe Oz.

Q.3 Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz au pendule. Que peut-on en conclure ?

Q.4 Déterminer le moment cinétique de M et le moment des forces par rapport au point O.

Q.5 Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au point O au pendule. En déduire l'expression reliant ω et α.

Exercice 4 : Enroulement autour d'un cylindre

On considère un palet autoporteur assimilé à un point matériel M de masse m, se déplaçant sans frottements sur un plan horizontal. Il est attachée à l'extrémité d'une ficelle de longueur L dont l'autre extrémité est attachée en un point H_0 de la priphérie d'un cylindre de centre O et de rayon R.

Le fil étant tendu et aligné avec OH_0, on lance M avec une vitesse othoradiale. Au cours de l'enroulement, on note $H(t)$ le point du fil le plus proche de M en contact avec le cylindre, que l'on décrit par ses coordonnées polaires (r, θ). La vitesse initiale de M est donc $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u}_\theta$.

Q.1 Après quelle durée τ le fil commence-t-il à s'enrouler autour du cylindre ? On choisit cet instant comme origine des temps.

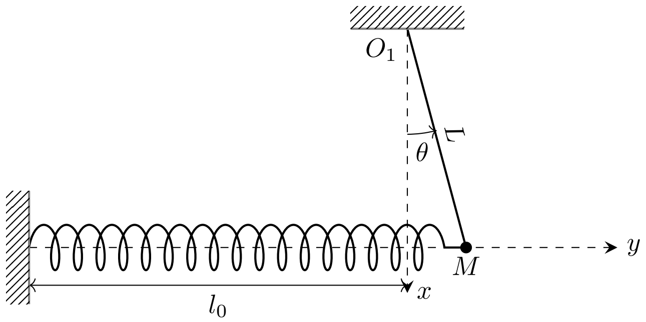
Q.2 Montrer qu'au cours de cet enroulement, le vecteur vitesse de M est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OH}(t)$ et est de norme constante.

Q.3 En déduire l'expression de $\theta(t)$.

Q.4 Déterminer la tension du fil au cours de l'enroulement en fonction des paramètres du problème, et montrer que le fil casse avant que le palet (ponctuel) n'atteigne le cylindre.

Exercice 5 : Oscillations d'un pendule

Un point matériel M (masse m) est relié à un fil inextensible (longueur $O_1M = L$, masse négligeable) et à un ressort horizontal de raideur k et de longueur l_0 au repos. Le fil est vertical lorsque le point matériel se trouve au repos en O_1'. On suppose des petites oscillations quasi horizontales du point M, telles que $O_1'M \ll L$. La position du point M est repérée par l'angle d'inclinaison θ du pendule par rapport à la verticale (angle θ supposé faible).

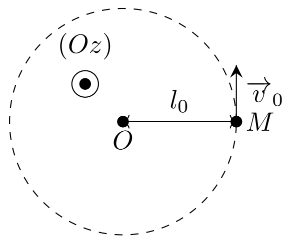


Q.1 Établir l'équation du mouvement pendulaire en utilisant le théorème du moment cinétique.

Q.2 En déduire la période T_0 des petites oscillations.

Exercice 6 : Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil

Une sphère de petite taille et de masse $m = 0{,}10\,\text{kg}$ est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $l_0 = 1{,}0\,\text{m}$ dont l'autre extrémité est fixée en O. Elle se déplace sur un cercle horizontal de rayon l_0. Sa vitesse est $v_0 = 1{,}0\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Q.1 Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).

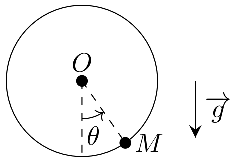
Q.2 On réduit brutalement la longueur du fil à $l_1 = 0{,}50\,\text{m}$. Que devient la vitesse de la sphère ?

Q.3 Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de la longueur du fil.

Q.4 Quelle force provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère ? Commenter.

Exercice 7 : Particule sur un cerceau immobile

Une particule M, de masse m, glisse dans la rainure intérieure d'un cerceau de rayon R. M est soumise à des frottements fluides, opposés à la vitesse, de coefficient de proportionnalité α. M est initialement placée en $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ sans vitesse initiale.



Q.1 Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la position $\theta(t)$ de M. On se placera ensuite dans le cas de petits angles.

Q.2 Pour quelle valeur critique R_c du cerceau, M atteint-il le plus rapidement possible la position d'équilibre ? Établir dans ce cas l'expression de la position $\theta(t)$ de M et en tracer l'allure.

Q.3 Établir l'expression de la vitesse de M ; tracer l'allure temporelle de sa norme.

Mécanique 7 : Champ de force centrale conservatif

Exercice 1 : Paramètres cosmologiques

Un mobile gravite autour d'un astre sur une trajectoire elliptique de période T et de demi-grand axe a.

Q.1 Rappeler la 3^{e} loi de Kepler.

Q.2 Déterminer la valeur de ce rapport pour un corps qui gravite autour du Soleil en utilisant les paramètres de l'orbite terrestre $T = 1\,\text{an}$ et $a = 1\,\text{ua} = 150 \times 10^{6}\,\text{km}$.

Q.3 Sachant que $\mathscr{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-3}$, montrer que l'expression théorique de cette constante en fonction de la constante graviationnelle $\mathscr{G}$ et de la masse du Soleil $M_{\odot}$ permet de déterminer la masse du Soleil.

Q.4 Le produit $\mathscr{G}M_{\text{T}}$ de la masse de la Terre par la constante de gravitation est égal à $\mathscr{G}M_{\text{T}} = 3{,}986 \times 10^{14}\,\text{m}^{3} \cdot \text{s}^{-2}$. La période de révolution de la Lune autour de la Terre (mois lunaire sidéral) vaut $T = 27{,}3\,\text{jour}$. Déterminer le demi grand-axe de l'orbite de la Lune.

Exercice 2 : Orbite circulaire et géostationnaire

Q.1 Démontrer l'expression de la vitesse d'un corps (de masse m) en orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre attracteur (de masse M).

Q.2 En déduire l'expression de l'énergie mécanique de la masse m sur son orbite circulaire de rayon r_0.

Q.3 Énoncer la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler et la démontrer dans le cas du mouvement circulaire.

On appelle satellite géostationnaire un satellite survolant à chaque instant le même point de la Terre.

Q.4 Dans quel plan la trajectoire d'un satellite géostationnaire est-elle nécessairement comprise ?

Q.5 Calculer l'altitude h d'un satellite géostationnaire. Commenter. Application numérique.

Exercice 3 : Vitesses cosmiques

Le Petit Prince réside sur un astéroïde de rayon $R = 30\,\text{cm}$ et de masse $m = 2{,}0 \times 10^{8}\,\text{kg}$. La constante de gravitation vaut $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^{3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

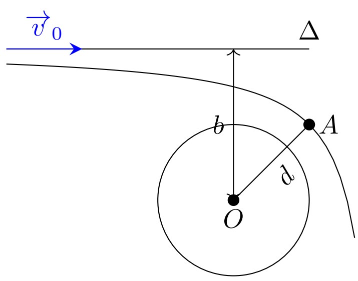
Q.1 Calculer la vitesse de satellisation v_s, c'est-à-dire la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il parcoure une orbite basse autour de l'astéroïde.

Q.2 Calculer la vitesse de libération v_l, c'est-à-dire la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction de l'astéroïde. Conclure.

Q.3 Plus sérieusement, qu'en est-il sur Terre ? La masse de la Terre est $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ et son rayon $R_T = 6{,}4 \times 10^{3}\,\text{km}$.

Exercice 4 : Chute d'une météorite

Une météorite de masse m a , très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0$ de module v_0 portée par une droite Δ située à une distance b du centre O de la Terre. On suppose que la météorite est soumise uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire tel que la distance Terre-Météorite soit minimale. On note $OA = d$. On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen.
On veut déterminer à partir de quelle valeur de b la météorite s'écrasera sur la Terre. On notera G la constante de gravitation, M la masse de la Terre, supposée sphérique, homogène, de masse volumique ρ, de rayon R.



Q.1 Donner l'expression de la force de gravitation en un point P de la trajectoire tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de la météorite en ce point. On prendra $E_p(r \to +\infty) = 0$.

Q.2 Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ? Justifier. En déduire que la trajectoire est plane.

Q.3 Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Montrer qu'en A, point de la trajectoire le plus proche de O, la vitesse (de norme v_1) est orthogonale à OA.

Q.4 En explicitant la question 2, trouver deux relations liant b, d, G, M, v_0, v_1. En déduire l'expression de d en fonction de G, M, b, v_0.

Q.5 Soit R le rayon de la Terre. Quelle condition doit satisfaire b pour que le météorite rencontre la Terre ?

Exercice 5 : Vitesse d'un satellite à son périgée

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1$ tonnes. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\,\mathrm{km}$ au périgée et $d_A = 35{,}9 \times 10^3\,\mathrm{km}$ à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3{,}5 \times 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Q.1 Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

Q.2 Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.

Q.3 En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

Q.4 On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.

Q.5 En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

Exercice 6 : Énergie mécanique d'un satelite en orbite elliptique

Cet exercice permet de démontrer l'expression, admise de l'énergie mécanique d'un satellite de masse m en orbite sur une ellipse de demi grand-axe a autour de la Terre de masse M_T :

$$E_m = -\mathscr{G}\frac{mM_\mathrm{T}}{2a}$$

On admet que le mouvement est plan et vérifie la loi des aires. On l'étudie en polaire et on note $\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}$ la constante des aires.

Q.1 r varie entre deux valeurs, r_P et r_A, qui correspondent au périgée et à l'apogée de la trajectoire. Réaliser un schéma de la trajectoire et faire apparaître r_A et r_P. En déduire l'expression du grand-axe $2a$ de l'ellipse en fonction de r_A et r_P.

Q.2 Montrer que le mouvement radial peut être étudié à l'aide d'une énergie potentielle effective. Donner son expression et la représenter.

Q.3 Le satellite est dans un état lié et $r \in [r_\mathrm{P}; r_\mathrm{A}]$. Montrer que r_A et r_P sont les solutions d'une équation du 2$^\mathrm{e}$ degré.

Q.4 On rappelle que si r_A et r_P sont solutions d'une équation du 2$^\mathrm{e}$ degré, elles vérifient :

$$(r - r_\mathrm{A})(r - r_\mathrm{P}) = r^2 - (r_\mathrm{A} + r_\mathrm{P}) \times r + r_\mathrm{A} \times r_\mathrm{P} = 0$$

En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction du grand-axe de l'ellipse.

Exercice 7 : Ellipse de Hohmann

Pour effectuer le voyage Terre-Mars, il faut transférer un objet de l'orbite terrestre à l'orbite martienne. Durant ce transfert, on néglige l'attraction des planètes pour ne retenir que celle du Soleil. L'une des trajectoires possibles est une ellipse, dont le Soleil est un des foyers, tangente à l'orbite terrestre en son périgée P, tangente à l'orbite martienne en son apogée A et coplanaire à l'orbite terrestre. On assimile la trajectoire de la Terre autour du Soleil à un cercle de rayon a_0 décrit à la vitesse $v_0 = 30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et celle de Mars à une orbite circulaire coplanaire à l'orbite terrestre de rayon $a_1 = na_0 = 1{,}5a_0$.

Q.1 Expliquer comment se fait le transfert à l'aide d'un schéma simple.

Q.2 Calculer la vitesse orbitale v_1 de Mars et la durée T_1 de l'année martienne en fonction de T_0 la période de révolution de la Terre.

Q.3 Pour que le transfert s'effectue bien en partant de la Terre au périgée de l'ellipse et en arrivant sur Mars à l'apogée de l'ellipse, l'angle entre la Terre et Mars au départ doit avoir une valeur α_0. Exprimer la périodicité de ce positionnement en fonction de T_1 et T_0 la période de révolution de Mars et de la Terre.

Q.4 Quelle doit être la vitesse v_p de l'engin spatial au point P de l'ellipse de Hohmann ? On exprimera v_p en fonction de v_0 et n. Faire l'application numérique.

Q.5 Quelle doit être la vitesse v_a de l'engin spatial au point A de l'ellipse de Hohmann ? On exprimera v_a en fonction de v_1 et n. Faire l'application numérique.

Q.6 Déterminer la durée du transfert entre la Terre et Mars (en années terrestres).

Mécanique 8 : Introduction à la mécanique du solide

Exercice 1 : Soulèvement d'une brouette

On étudie la force nécessaire pour soulever une brouette chargée de masse totale $m = 30\,\mathrm{kg}$, dont la roue est fixe. La distance entre l'axe de la roue et les poignées de la brouette est de 1,2 m et son centre de gravité est sur l'axe roue-poignées, à une distance de 40 cm de la roue.

Q.1 Quelle force minimale faut-il exercer vers le haut pour augmenter l'inclinaison de la brouette depuis l'horizontale ?

Q.2 Et lorsque l'axe roue-poignée fait un angle de 45° avec l'horizontale ?

Q.3 Reprendre les deux questions mais avec une force orthoradiale.

Exercice 2 : Pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'un solide dans un champ de pesanteur uniforme, lié à un bâti immobile dans le référentiel d'étude par une liaison pivot horizontale dont l'axe Δ ne passe pas par son centre de gravité G.

On nomme O le projeté orthogonal de G sur l'axe de la liaison, et on note m la masse du solide et J son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ. On repère sa position par les coordonnées cylindriques de G, situé à une distance d de l'axe Δ, en prenant pour référence pour l'angle θ la verticale vers le bas On considère de plus la liaison pivot comme idéale.

Q.1 Démontrer l'expression de moment cinétique scalaire du pendule par rapport à Δ noté $L_\Delta(S)$.

Q.2 Déterminer l'équation du mouvement du pendule pesant.

Q.3 En déduire l'expression de l'intégrale première du mouvement en prenant $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{theta}(0) = \omega_0$.

Q.4 Dans le cas des petites oscillations, exprimer la période du mouvement. Que-ce passe-t-il dans le cas du pendule simple ?

Q.5 À l'aide d'un langage de programmation, montrer que les oscillations d'amplitude quelconques ont une période dépendant de l'amplitude.

Exercice 3 : Face cachée de la Lune

Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jour. La distance du centre de la Terre au centre de la Lune vaut $D_{\mathrm{TL}} = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$. Lors de cette révolution, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

Q.1 Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. On s'attachera particulièrement à distinguer s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou de rotation.

Q.2 En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ de la révolution du centre de la Lune sur sa trajectoire.

Q.3 Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.

Q.4 Décrire le mouvement de la Lune dans le repère sélénocentrique qui a les mêmes axes de références que le référentiel géocentrique mais pour origine le centre L de la Lune.

Q.5 Déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{\mathrm{p}}$ de la rotation de la Lune sur elle-même.

Exercice 4 : Démarrage d'une machine tournante

Une machine tournante est entraînée par un moteur de fréquence nominale $1500\,\mathrm{tour}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. Celui-ci exerce un couple moteur constant de $40\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Le moment d'inertie de l'ensemble de la chaîne cinématique rapporté à l'axe du rotor est de $12{,}5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Le couple résistance dû aux frottements est supposé constant et égal à $4{,}0\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$.

Q.1 Calculer l'accélération du moteur pendant le démarrage.

Q.2 Calculer le temps mis pour atteindre la fréquence nominale.

On tient maintenant compte d'une force de frottement visqueuse qui exerce un couple proportionnel à la vitesse angulaire de rotation du type $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$.

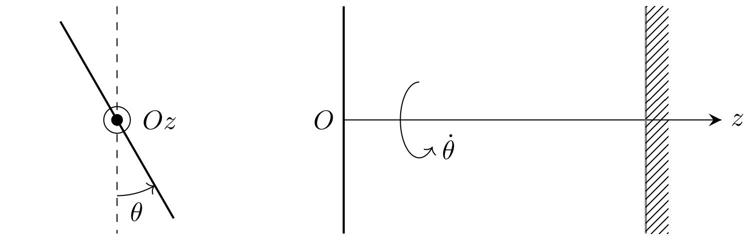
Q.3 Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Q.4 Estimer la valeur de α permettant d'obtenir une vitesse angulaire limite de $1500\,\mathrm{tour}\cdot\mathrm{min}^{-1}$.

Q.5 Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ainsi que le temps mis pour atteindre 99% de la vitesse angulaire limite.

Exercice 5 : Pendule de torsion

Lors de ses expériences d'électrostatique, qui lui permirent d'en déduire l'expression de l'interaction électrostatique, Coulom utilisait des pendules de torsion. Un pendule de torsion est constitué d'une tige homogène fixé en son milieu à une ficelle. On fait tourner le bâton sur lui même d'un angle θ afin de tordre la ficelle, l'ensemble possède un moment d'inertie noté J_{Oz}. Celle-ci exerce alors un couple de rappel élastique proportionnel à l'angle θ : $\overrightarrow{\Gamma}_e = -C\theta\overrightarrow{u}_z$.



Q.1 À l'instant initial, on écarte le pendule d'un angle θ_0. Déterminer, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle du mouvement.

Q.2 Déterminer la période d'oscillation du pendule.

Q.3 Faire une analogie avec un problème déjà traité.

Q.4 Calculer la puissance $\mathscr{P}$ du couple de torsion, ainsi que le travail W du couple entre les angles θ_1 et θ_2.

Q.5 Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. L'exprimer.

Q.6 Poursuivre l'analogie.

Q.7 En appliquant le théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation du mouvement du pendule de torsion.

Exercice 6 : Volant d'inertie

Dans une machine tournante, la partie mobile nommée rotor possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation fixe. Le rotor est soumis a un couple moteur $\Gamma_m = \Gamma_0$ constant, ainsi que des frottements fluides de moment $\mathscr{M} = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire de rotation.

Q.1 Expliquer quel est le signe de α.

Q.2 Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$ par une méthode dynamique. On donnera notamment sa vitesse finale ω_f et un temps caractéristique d'évolution τ. On commentera la dépendance de ces quantités par rapport à α.

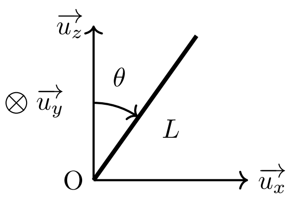
Q.3 En fait, suite à des vibrations du dispositif, le couple moteur varie comme $\Gamma_0(1+r\cos(\Omega t))$, où r est liée à l'intensité de la perturbation et Ω est sa pulsation. On cherche, après la fin du régime transitoire, une évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ sous la forme $\omega(t) = \omega_f + A\cos(\Omega t - \phi)$ où A et ϕ sont des constantes. Quelle est la durée du régime transitoire ?

Q.4 Exprimer A et $\tan\phi$ en fonction de r, Ω, τ et ω_f. On pourra utiliser la notation complexe.

Q.5 Expliquer pourquoi, afin de régulariser le fonctionnement du rotor, on lui fixe un anneau de masse assez importante et grand rayon, appelé volant d'inertie. Quelles sont les limites de cette méthode ?

Exercice 7 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il forme avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre est immobile et forme un angle de $\theta_0 = 5°$ avec la verticale. Le moment d'inertie par rapport à une extrémitié de l'arbre est $J = m\dfrac{L^2}{3}$.



Q.1 Établir l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.

Q.2 Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne : $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} \approx 5$

Troisième partie

Ondes

Liste des chapitres Ondes

Ondes 1 : Lois de l'optique géométrique

Exercice 1 : Doublage de fréquence

Le rayon laser utilisé à l'observatoire du CERGA pour mesurer la distance Terre-Lune est obtenu par doublage de fréquence à partir d'un laser de longueur d'onde $\lambda_1 = 1{,}064\,\mu\text{m}$.

Q.1 Quelle est la longueur d'onde λ_2 de la lumière envoyée vers la Lune ? Quelle est sa couleur ?

Q.2 On envoie en fait des impulsions durant 0,1 ns. Calculer le nombre d'oscillations du signal lumineux dans une impulsion.

Exercice 2 : Expression de l'angle limite de réflexion totale

Considérons un dioptre séparant deux milieux transparents d'indices n_1 et $n_2 < n_1$. Un rayon lumineux se propageant dans le milieu d'indice n_1 fait un angle i_1 avec la normale au dioptre.

Q.1 Faire un schéma en faisant apparaître le dioptre, la normale au dioptre, l'angle incident, le rayon réfléchi et le rayon réfracté ainsi que les angles d'incidence i_1, de réflexion r et de réfraction i_2. Est-ce que le rayon réfracté s'approche ou s'écarte de la normale au dioptre ?

Q.2 Montrer que le rayon réfracté n'existe que tant que l'angle d'incidence est plus petit qu'un angle i_l dont on donnera l'expression.

Q.3 L'angle i_l est appelé «angle limite de réflexion totale». Expliquer cette dénomination. Que se passe-t-il pour $i_1 > i_l$?

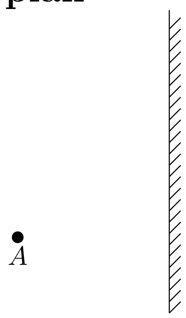
Q.4 Calculer l'angle limite de réflexion totale dans le cas d'une interface eau ($n_v = 1{,}33$)-air ($n_a = 1{,}00$) et diamant ($n_d = 2{,}54$)-air ($n_a = 1{,}00$).

Exercice 3 : Image d'un point au travers d'un miroir plan

On considère un point objet A situé devant un miroir plan.

Q.1 En exploitant la loi de la réflexion de Snell-Descartes, trouver graphiquement la position de l'image A' de A par le miroir plan. Cette image est-elle réelle ou virtuelle ?

Q.2 Montrer que A' est le symétrique de A par le plan du miroir.



Exercice 4 : Déviation d'un rayon lumineux

On considère une goutte d'eau sphérique d'indice $n = 1{,}33$. On se place dans un plan passant par le centre O de la goutte. Un rayon pénètre au point I dans la goutte avec un angle d'incidence i_1. Il se réfracte une nouvelle fois au point J où il émerge de la goutte. Le rayon incident est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ et le rayon émergent par le vecteur $\overrightarrow{u_3}$.

Q.1 Exprimer l'angle de déviation $D = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3})$ du rayon lumineux en fonction de i_1 et de r_1.

Q.2 Calculer D pour $i_1 = -45°$.

Exercice 5 : Incidence de Brewster

Un dioptre plan sépare l'air d'indice égal à $n_{air} = 1{,}00$ d'un autre milieu d'indice n. Un rayon lumineux arrive avec un angle d'incidence i sur ce dioptre.

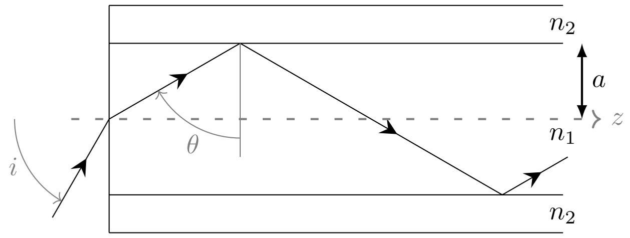
Q.1 Exprimer en fonction de i et de l'angle de réfraction i' l'angle α formé par le rayon partiellement réfléchi avec le rayon réfracté.

Q.2 En déduire en fonction de n l'expression de l'angle d'incidence i_b tel que le rayon partiellement réfléchi soit perpendiculaire au rayon réfracté.

Exercice 6 : Fibre optique à saut d'indice

On considère un guide d'ondes diélectrique constitué de deux cylindres concentriques de section circulaire, et constitués l'un et l'autre de matériau isolant (la silice). L'indice de réfraction de la partie centrale, appelée cœur, est noté n_1 ; l'indice de la partie périphérique, appelée gaine, est noté n_2, avec $n_2 < n_1$. Le milieu extérieur est l'air, assimilé au vide et donc d'indice égal à 1 (valeur qu'on prendra dans les calculs littéraux).

Dans ce problème, on s'intéresse essentiellement à un type de fibre optique particulier : les fibres à saut d'indice. Dans une fibre à saut d'indice, le coeur et la gaine sont des milieux homogènes : $n_1 = 1{,}456$ et $n_2 = 1{,}410$ sont uniformes. On note z la direction générale de propagation. Le diamètre du coeur vaut $a = 50\,\mu\text{m}$.



Q.1 Montrer que le rayon lumineux est guidé par réflexion totale dans le coeur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas) si θ est supérieur à une certaine valeur θ_L que l'on exprimera en fonction de n_1 et de n_2. Calculer θ_L.

Q.2 On note i l'ange d'entrée du rayon à l'extérieur de la fibre.

a) Montrer que la valeur maximale de i (notée i_{max}) pour que le guidage soit assuré dans la fibre, vaut :

$$i_{max} = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

b) Calculer numériquement $N = \sin i_{max}$ appelée ouverture numérique de la fibre, puis i_{max}.

Q.3 Schématiser le trajet de la lumière le plus court à travers la fibre.

Q.4 Exprimer la durée τ_1 de ce parcours.

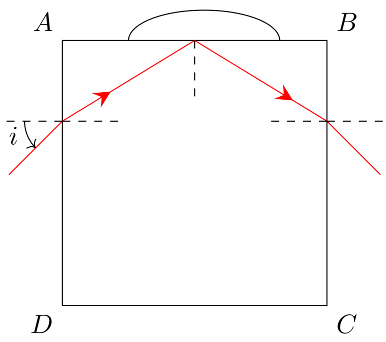
Q.5 Schématiser le trajet de la lumière le plus long à travers la fibre.

Q.6 Exprimer la durée τ_2 de ce parcours.

Q.7 Exprimer la différence de durée de parcours $\Delta t_{max} = \tau_2 - \tau_1$.

Exercice 7 : Réfractomètre de Pulfrich

On veut mesurer l'indice de réfraction n d'un liquide. On dépose une goutte de ce liquide sur un cube de verre transparent d'indice $N = 1{,}50$. On éclaire ce cube par un faisceau lumineux d'incidence i variable sur la face d'entrée AD. On mesure la valeur de l'angle limite d'incidence i_l pour lequelle la goutte apparaît lumineuse.



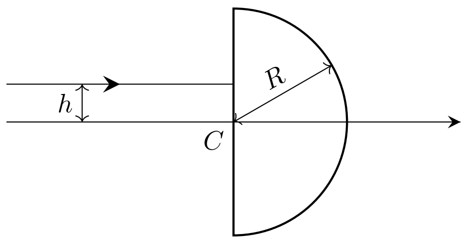
Q.1 Justifier pourquoi pour $i \geqslant i_l$, la goutte est si lumineuse.

Q.2 Déterminer alors l'indice de réfraction n en fonction de N et i_l.

Q.3 Montrer que ce réfractomètre mesure des indices n compris entre deux valeurs à déterminer.

Exercice 8 : Demi-Boule de verre :

On considère une demi-boule de verre de centre C et de rayon, d'indice n. On éclaire cette boule par un faisceau de rayons lumineux parallèle à cet axe. On observe les rayons transmis par le dispositif.



Q.1 Reproduire et légender le schéma ci-dessus.

Q.2 On considère un rayon lumineux proche de l'axe. Dessiner la marche de ce rayon lumineux. On définit le point F' comme l'intersection entre le rayon émergeant de la demi-boule et l'axe de la demi-boule. A quelle distance de C se trouve-t-il ?

Q.3 Montrer que si $h \ll R$ la position de F' est indépendante de h.

Q.4 On considère un rayon lumineux éloigné de l'axe. Quel phénomène observe-t-on ?

Q.5 En déduire la distance à l'axe à partir de laquelle un rayon incident ne sera pas observé par un observateur placé de l'autre côté du dispositif ?

Ondes 2 : Formation des images

Exercice 1 : Image à l'infini ?

Q.1 On dispose d'une lentille divergente L dont la distance focale est égale à $-40\,\text{mm}$. Quelle doit être la position d'un objet AB de taille égale à 2,0 mm pour que son image $A'B'$ par la lentille soit à l'infini ?

Q.2 Préciser la nature de AB.

Q.3 Sous quel diamètre apparent (le diamètre apparent est l'angle sous lequel on voit un objet lointain), un observateur plaçant son œil derrière la lentille L verra-t-il l'image $A'B'$?

Exercice 2 : Pouvoir séparateur de l'œil

Q.1 Par quoi modélise-t-on l'œil ?

Q.2 Déterminer la distance minimale séparant deux point objets pour que leurs images puissent être vues séparément lorsqu'ils se trouvent à 30 m et 60 m.

Exercice 3 :

Une lentille mince donne d'un objet AB réel une image A'B' réelle deux fois plus grande. La distance AA' est de 90 cm.

Q.1 Identifier la nature de la lentille.

Q.2 Faire une construction graphique pour placer AB, A'B', la lentille, F et F'.

Q.3 Déterminer $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ et f' par le calcul.

Exercice 4 : Distance entre objet et image

Un objet (AB) et un écran (E) sont fixes et distants de D.

Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille mince convergente de distance focale image f'.

Q.1 Montrer qu'il existe une valeur minimale de D pour laquelle on ne peut pas former d'image sur (E).

Q.2 Calculer la ou les positions de la lentille convergente pour lesquelles on peut former une image nette sur l'écran. Exprimer la différence entre ces deux positions qu'on notera d.

Q.3 Exprimer f' en fonction de D et d.

Exercice 5 : Doublet de Huygens

On appelle doublet un ensemble de deux lentilles minces de même axe optique. En appelant L_1 et L_2 les deux lentilles (la première lentille rencontrée par la lumière est L_1), on note O_1 et O_2 leurs centres optiques, F_1 et F_2 leurs foyers objets, F_1' et F_2' leurs foyers images. Un doublet est caractérisé par les distances focales image des deux lentilles f_1' et f_2' et son épaisseur $e = \overline{O_1O_2}$.

Le doublet de Huygens est tel que : $f_1' = 3a$, $e = 2a$, $f_2' = a$, où a est une longueur quelconque.

Q.1 Déterminer graphiquement la position du foyer image F' du doublet de Huygens (on pourra prendre l'échelle $a = 2\,\text{cm}$).

Q.2 Retrouver ce résultat par un calcul en déterminant l'expression de $\overline{F_2'F'}$.

Q.3 Déterminer graphiquement la position du foyer objet F du doublet de Huygens.

Q.4 Retrouver ce résultat par un calcul en déterminant l'expression de $\overline{F_1F}$.

Exercice 6 : Étude d'un téléobjectif d'appareil photographique

Un téléobjectif est constitué de deux lentilles minces dont les axes optiques coïncident. La lentille d'entrée L_1 a une vergence $C_1 = 10\,\delta$ et est suivie d'une lentille L_2 de vergence $C_2 = -40\,\delta$. La distance O_1O_2 séparant les deux lentilles vaut 8 cm. Un objet AB de hauteur égale à 0,5 m est placé à une distance $d = 100\,\text{m}$ de O_1 sur l'axe optique.

Q.1 Déterminer les caractéristiques de l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par L_1.

Q.2 Quel rôle joue cette image pour la seconde lentille ? Déterminer les caractéristiques de l'image définitive $A'B'$.

Q.3 Les résultats de la question précédente sont-ils conformes aux propriétés attendues pour l'image donnée par un téléobjectif sur la pellicule photographique ?

Q.4 Déterminer la position de la lentille convergente unique qui permettrait d'arriver au même résultat. Préciser sa distance focale.

Q.5 Conclure quant à l'intérêt du téléobjectif.

Exercice 7 : L'œil

Un œil normal observe sans accomoder des objets à l'infini. On l'assimile à une lentille convergente (modélisant le cristallin) de distance focale $f' = 1{,}5\,\text{cm}$ au repos. Le pouvoir séparateur de l'œil est $\alpha = 5 \times 10^{-4}\,\text{rad}$.

Q.1 Calculer un ordre de grandeur de la distance h entre deux cellules photosensibles de la rétine.

Q.2 Un objet ponctuel A se trouve dans le champ de vision, à une distance d. Exprimer en fonction du rayon R de la pupille le rayon r de la tache image sur la rétine, l'œil ne faisant pas l'effort d'accommoder.

Q.3 On considère que A est vu net si $r < h$. Justifier ce critère. Pour $R = 1\,\text{mm}$, calculer la distance minimale d'un objet qui est vu "net" en même temps qu'un objet à l'infini. Commenter le résultat.

Exercice 8 : Lunette astronomique

On considère une lunette astronomique formée :

- d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente $\mathscr{L}_1$ de distance focale image $f'_1 = 25\,\text{cm}$;
- d'un oculaire consitué d'une lentille mince convergente $\mathscr{L}_2$ de distance focale $f'_2 = 5\,\text{cm}$.

Ces deux lentilles ont le même axe optique. Cette lunette astronomique est utilisée pour observer Mars. L'axe optique de l'instrument est pointé vers le centre de Mars, on note A et B les points objets situés à deux extrémités opposées de la planète. Les rayons issus de A et B arrivant au niveau de la lunette forment un angle α au niveau de la Terre, appelé angle apparent. On rappelle qu'un œil emmétrope, c'est-à-dire sans défaut, voit net un objet sans accomoder quand celui-ci est placé à l'infini.

Q.1 Quelle doit être la distance entre les centres optiques des lentilles pour que l'utilisateur puisse observer la planète sans accomoder ?

Q.2 Faire le schéma de la lunette. Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux formé de rayons issus de la planète. On appellera $\overline{A_1B_1}$ l'image intermédiaire.

Q.3 On souhaite photographier cette planète. Où faut-il placer la pellicule ?

Q.4 On note α' l'angle que forment les rayons émergents en sortie de la lunette. L'image finale est-elle droite ou renversée ?

Q.5 La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$. Exprimer G en fonction de f'_1 et f'_2.

Exercice 9 : Distance hyperfocale

On modélise l'objectif d'un appareil photo par une lentille convergente L, de centre O et de distance focale image f'.

Q.1 Lorsque l'appareil est mis au point à l'infini (objet à l'infini), où doit-on placer la pellicule ?

Q.2 On considère un point objet A à la distance d_A devant la lentille. La pellicule est dans la position de la question (1).

a) Exprimer la position $\overline{OA'}$ de l'image A' de A.

b) On note D_L le diamètre utile de la lentille (diamètre du faisceau au niveau de la lentille) et D_A le diamètre de la tache du faisceau sur la pellicule. Exprimer D_A en fonction de D_L, f' et d_A.

c) La pellicule est formée de grains de diamètre ϵ. Quelle est la condition sur ϵ pour que l'image d'un point A situé à une distance d_A soit net ?

d) Calculer la distance d_A minimale (appelée distance hyperfocale) qui donnera une image nette sur la pellicule. Application numérique pour $f' = 3{,}0\,\text{cm}$; $D_L = 2\,\text{mm}$ et $\epsilon = 2\,\mu\text{m}$.

Ondes 3 : Propagation d'un signal

Exercice 1 : Téléphonie mobile

Q.1 La distance entre un téléphone mobile et une antenne-relais est de 2 km. Évaluer le temps qui s'écoule entre l'émission d'un signal par le téléphone et sa réception par l'antenne.

Q.2 Estimer un ordre de grandeur de la longueur d'onde des ondes émises par le téléphone mobile.

Exercice 2 : Ondes progressives

Q.1 Donner la période, la fréquence, la pulsation, le nombre d'onde, le vecteur d'onde, la longueur d'onde et la phase à l'origine de l'onde décrite par

$$s_1(x,t) = 5\sin(2{,}4 \times 10^3 \pi t - 7{,}0\pi x + 0{,}7\pi)$$

En déduire sa célérité.

Q.2 Une onde sinusoïdale se propage dans la direction des x positifs avec la célérité c. En $x = 0\,\text{m}$, on a :

$$s_2(x=0,t) = S_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Donner l'expression de $s_2(x,t)$ et tracer l'allure du signal temporel perçu en $x = \frac{\lambda}{4}$.

Q.3 Une onde sinusoïdale se propage dans la direction des x négatifs avec la célérité c. En $t = 0\,\text{s}$, on a :

$$s_3(x,t=0) = S_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Donner l'expression de $s_3(x,t)$ et tracer l'allure du signal temporel perçu en $t = \frac{T}{4}$.

Q.4 En $x = 0\,\text{m}$ on excite un train d'ondes :

$$s_4(x=0,t) = S_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

avec $T = 0{,}2\,\text{s}$ et $\tau = 1\,\text{s}$. L'onde se propage dans la direction des x positifs à la célérité $c = 2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Donner l'expression de $s_4(x,t)$.

Exercice 3 : Évolution temporelle d'une onde

On considère une onde sonore d'expression :

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

où ω, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et p_0 sont des constantes.

Q.1 Quelles sont la direction et le sens de propagation de l'onde ?

Q.2 Tracer l'allure spatiale de l'onde aux instants $t = 0\,\text{s}$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$ et $t = T$ où T est la période de l'onde.

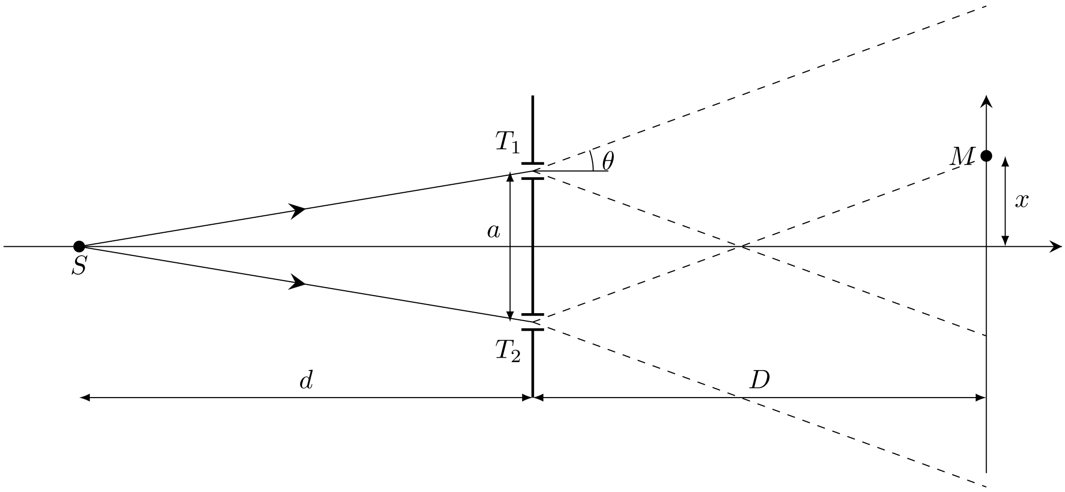
Q.3 Un microphone est placé en $x = \frac{7\pi}{2k}$. Il restitue une tension $u(t)$ similaire à la surpression p régnant en x. Exprimer puis représenter la tension $u(t)$.

Exercice 4 : Expérience des trous de Young

On considère un dispositif de trous de Young permettant d'observer des interférences lumineuses. Ce dispositif est constitué de deux trous T_1 et T_2 percés dans un écran opaque de rayon $r = 5{,}0\,\mu\text{m}$, séparés d'une distance $a = 50\,\mu\text{m}$. Dans l'expérience considérée ici, les trous sont éclairés par une onde lumineuse de longueur d'onde $\lambda = 500\,\text{nm}$ émise par une source ponctuelle S d'intensité I_0 située à une distance $d = 1{,}0\,\text{m}$ des trous sur l'axe optique, qui correspond à la bisectrice de T_1T_2 perpendiculaire à l'écran contenant les trous. L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.

Lorsque la lumière incidente passe au travers d'un trou de petite dimension, un péhnomène de diffraction a lieu. Le faisceau en sortie du trou présente alors un demi-angle d'ouverture θ tel que $\sin(\theta) \sim \frac{\lambda}{2r}$.

La faible valeur du rayon r des trous T_1 et T_2 par rapport à λ conduit à des faisceaux de grande ouverture en sortie des trous, permettant aux ondes de se superposer dans un volume de l'espace. La zone où une onde passant par T_1 et une onde passant par T_2 se superposent est appelée **champ d'interférences**. Un écran est placé dans cette zone à une distance $D = 1{,}0\,\text{m}$ du plan des trous. On y observe des interférences qui se manifestent par une alternance de zones de forte intensité appelées **franges brillantes** et de zones de faible intensité appelées **franges sombres**.



Q.1 Associer aux franges brillantes et sombres le caractère constructif ou destructif de l'interférence lumineuse.

Q.2 Justifier que la frange située sur l'écran au niveau de l'axe optique (au point O) est une frange brillante.

On considère un point M de l'écran d'abscisse x. La différence de marche $\delta(M)$ en M entre les ondes passant par T_2 et par T_1 s'écrit :

$$\delta(M) = (ST_2M) - (ST_1M)$$

où $(ST_iM) = (ST_i) + (T_iM)$ représente le chemin optique entre S et M en passant par le trou T_i.

Q.3 Reproduire le schéma et ajouter les rayons lumineux correspondant aux chamins suivis par les deux ondes se superposant en M.

Q.4 Exprimer $\delta(M)$ en fonction de a, x et D.

Q.5 Montrer que dans l'approximation paraxiale où l'on impose $a, x \ll D$, la différence de marché s'écrit au premier ordre en x/D :

$$\delta(M) \simeq \frac{ax}{D}$$

Pour cela on donne le DL_1 : pour $\epsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \dfrac{\epsilon}{2}$.

Q.6 En utilisant la formule de Fresnel exprimer l'éclairement $I(x)$ sur l'écran :

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi))$$

Q.7 On appelle **interfrange** i, la distance séparant deux franges brillantes sur l'écran. Déterminer l'expression de l'interfrange i et calculer sa valeur.

Q.8 Déterminer le diamètre d_e du champ d'interférences au niveau de l'écran et calculer sa valeur.

Q.9 En déduire le nombre de franges brillantes observables sur l'écran.

Ondes 4 : Introduction à la mécanique quantique :

Exercice 1 : Laser et effet photoélectrique :

Dans un laser, des particules excitées passent d'un niveau d'énergie E_2 à un niveau d'énergie E_1 plus stable ; ce processus est à l'origine de l'émission de la lumière du laser. On considère un laser ayant une puissance de $2\,\mathrm{mW}$ émettant $5{,}3 \times 10^{15}$ photons par seconde.

Q.1 Déterminer l'écart entre les deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 mis en jeu dans ce laser.

Q.2 Quelle est la couleur de ce laser ?

Ce laser est utilisé pour éclairer une plaque de Cesium.

Q.3 Sachant que le travail d'extraction d'un électron est $W = 1{,}9\,\mathrm{eV}$, va-t-on observer l'effet photoélectrique ?

Q.4 Si oui, quelle sera alors l'énergie cinétique maximale des électrons éjectés de la plaque ?

Données : masse d'un électron $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

Exercice 2 : Vitesse de propagation de l'onde de de Broglie :

Une particule de masse m se déplace à la vitesse v très inférieure à la vitesse de la lumière. Elle n'est soumise à aucune force donc son énergie E se réduit à son énergie cinétique. On souhaite trouver la vitesse de propagation de l'onde de de Broglie.

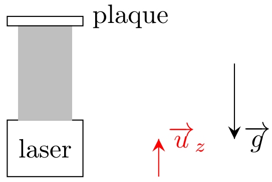
Q.1 Exprimer le vecteur d'onde k_{DB} de l'onde de de Broglie en fonction de m et v.

Q.2 En admettant que la formule reliant l'énergie du photon à sa pulsation reste valable pour la particule, trouver une expression de ω_{DB} en fonction de m et v.

Q.3 En déduire la vitesse de propagation de l'onde de de Broglie.

Exercice 3 : Lévitation optique d'une plaque absorbante

On considère une plaque carrée de côté $L = 7\,\mathrm{mm}$ et d'épaisseur $e = 10\,\mathrm{\mu m}$ composée d'un matériau parfaitement absorbant de masse volumique $\rho = 1500\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Cette plaque est éclairée par le dessous par un laser monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 532\,\mathrm{nm}$ d'intensité I uniforme dont le faisceau laser est cylindrique de diamètre $a = 5\,\mathrm{mm}$ (voir figure ci-contre). On note $\vec{g}$ le vecteur d'accélération de la pesanteur.



Dans le modèle corpusculaire de la lumière, l'onde électromagnétique émise par le laser est composée de photons, particules élémentaires transportant une énergie $\mathscr{E} = h\nu$ et une quantité de mouvement $\vec{p} = \dfrac{h\nu}{c}\vec{u}_z$ où $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$. La plaque absorbe parfaitement l'onde incidente et donc les photons associés, il en résulte un transfert de quantité de mouvement s'interprétant comme une force appliquée du faisceau laser sur la plaque. En considérant un élément de surface élémentaire $\mathrm{d}S$ du faisceau, la force résultante de l'absorption des photons par la plaque s'écrit $\mathrm{d}\vec{F} = p_{\mathrm{rad}}\mathrm{d}S\vec{u}_z$ où p_{rad} est homogène à une pression et est nommée *pression de radiation*.

Q.1 Exprimer le nombre de photons δN absorbés par une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ de la plaque durant un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$.

Q.2 En déduire l'expression de la quantité de mouvement $\delta\vec{P}$ absorbée par cet élément de surface $\mathrm{d}S$ durant $\mathrm{d}t$ en fonction de I, $\mathscr{E}$, h, ν, $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}t$.

Q.3 Exprimer la force $\mathrm{d}\vec{F}$ subie par un élément $\mathrm{d}S$ de la plaque et en déduire l'expression de la pression de radiation p_{rad}.

Q.4 Déterminer l'expression de la force de pression de radiation totale subie par la plaque sous l'action du faisceau laser.

Q.5 Déterminer la valeur de l'intensité I du faisceau laser permettant d'atteindre un équilibre de lévitation de la plaque.

Exercice 4 : Retour sur l'expérience d'interférométrie atomique

Revenons sur l'expérience de O. Carnal et J. Mlynek présentée dans la partie méthode. On rappelle que dans cette expérience un jet d'atomes d'hélium est envoyé sur un dispositif de fentes d'Young noté B sur le schéma de l'expérience en **figure 1**. Un détecteur mobile (SEM) permet de comptabiliser le nombre d'atomes arrivant en un point de l'écran durant 5 min. Le résultat de l'expérience est donné sur la **figure 1**.

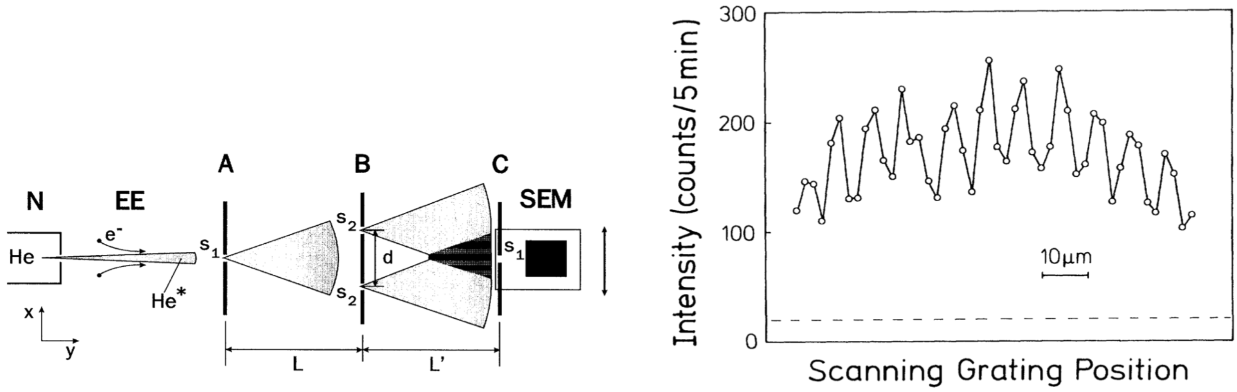


Figure 1 - À gauche, schéma de l'expérience avec $d = 8\,\mathrm{mm}$, $L = L' = 64\,\mathrm{cm}$, $s_1 = 2\,\mu\mathrm{m}$ et $s_2 = 1\,\mu\mathrm{m}$. À droite, nombre d'atomes arrivant en un point de la zone de détection durant 5 min. La longueur d'onde de de Broglie est $\lambda_{\mathrm{dB}} = 1{,}03 \times 10^{-1}\,\mathrm{nm}$.

Le jet atomique n'est pas dirigé directement vers le dispositif de fentes d'Young, il passe tout d'abord au travers d'une première fente notée A sur le schéma de la **figure 1**.On rappelle que lorsqu'un faisceau passe au travers d'une fente de largeur a, un péhnomène de diffraction a lieu et le faisceau présente en sortie de la fente un demi-angle d'ouverture θ tel que $\sin(\theta) \simeq \dfrac{\lambda}{a}$.

Q.1 Expliquer l'utilité de la fente A. Calculer le diamètre du faisceau au niveau des fentes d'Young. Est-ce que ce diamètre est suffisant pour que les atomes puissent passer au travers des deux fentes ?

Q.2 Estimer la largeur de la zone d'interférences au niveau de l'écran.

Q.3 Calculer l'interfrange théoriquement attendue au niveau de l'écran.

Q.4 À partir de la figure 1, mesurer l'interfrange au niveau de l'écran et estimer l'incertitude-type. Comparer à la valeur théorique calculée précédemment.

Exercice 5 : Estimation de la constante de Rydberg

On considère un atome d'hydrogène composé d'un neutron et d'un électron. Dans le cadre du modèle de Bohr, on peut montrer que les niveaux d'énergie de l'électron sont quantifiés et s'écrivent :

$$\mathscr{E}_n = -\frac{\mathscr{E}_0}{n^2} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

où $\mathscr{E}_0 = 13{,}624\,\mathrm{eV}$. Lorsque l'électron va d'une orbite externe de nombre quantique n_i vers une orbite interne de nombre quantique $n_f < n_i$, on parle de désexcitation ce qui se traduit par l'émission d'un photon. On donne $h = 6{,}6261 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ la constante de Planck et $c = 2{,}9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

Q.1 Montrer que la longueur d'onde λ du photon émis lors d'un désexcitation est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par le formule de Rydberg-Ritz :

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}} \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right] \qquad \text{avec } n_i > n_f$$

R_{H} est la constante de Rydberg. Préciser l'expression de R_{H} en fonction de $\mathscr{E}_0$, h et c. Calculer sa valeur et préciser son unité.

Les raies de la série de Balmer sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ($n_f = 2$) donnant lieu à une émission dans le domaine visible et proche UV. Les longueurs d'onde des raies de la série de Balmer peuvent être mesurées en utilisant un spectromètre à fibre. Les valeurs de longueurs d'onde λ mesurées sont résumées dans le tableau ci-dessous.

λ (nm)	656,3	486,4	434,2	409,8

L'incertitude-type sur λ est de 0,5 nm.

Q.2 Associer à chaque longueur d'onde mesurée la valeur du nombre quantique de l'état de départ n_i correspondant.

Q.3 En utilisant un traitement statistique, donner l'estimation expérimentale de la valeur de la constante de Rydberg $R_{\mathrm{H,exp}}$ ainsi que son incertitude-type.

Q.4 Comparer la valeur mesurée de la constante de Rydberg à la valeur prédite dans le cadre du modèle de Bohr.

Quatrième partie

Chimie

Liste des chapitres Chimie

Chimie 1 : Molécules et solvants :

Exercice 1 : Déterminer le nombre d'électrons de valence d'un atome

Q.1 Déterminer la configuration électronique dans l'état fondamental et le nombre d'électrons de valence pour les éléments du tableau périodique :

a) le silicium Si est situé à la 3^{e} période et à la 14^{e} colonne ;

b) le calcium Ca est situé à la 4^{e} période et à la 2^{e} colonne ;

Q.2 Lequel de ces deux éléments est le plus élecronégatif ?

Exercice 2 : Moment dipolaire de liaison

On étudie les molécules de la série des halogénures d'hydrogène H−X.

Molécule	H−F	H−Cl	H−Br	H−I
Énergie de liaison ($kJ \cdot mol^{-1}$)	566	431	366	298
Longueur de liaison (µm)	92	127	142	161
Norme du moment dipolaire (D)	1,83	1,11	0,83	0,45
T_{fus}(°C)	-83	-114	-87	-51
T_{eb}(°C)	20	-85	-67	-35

Q.1 Commennt varie l'électronégativité de l'iode, au brome, au chlore et au fluor ?

Q.2 Représenter le moment dipolaire associé à ces molécules.

Q.3 Déterminer le pourcentage d'ionicité δ de chacune de ces liaisons. Commenter.

Q.4 Quels molécules présente des liaisons hydrogènes intermoléculaires ? En déduire une interprétation des température de changement d'état.

Q.5 Comment évolue la polarisabilité des molécules ?

Q.6 Comment évolue les contributions aux interactions de van der Waals pour chaque molécules ?

Exercice 3 : Schéma de Lewis et géométrie d'une molécule

Q.1 Déterminer le schéma de Lewis du chlorure de thionyle SO_2Cl_2, sachant que l'atome de soufre est l'atome central.

Q.2 Déterminer autour de l'atome de soufre central : la notation VSEPR, la géométrie.

Exercice 4 : Représentation de Lewis d'ions simples

Calculer les nombres de paires de valence et donner la représentation de Lewis des ions suivants :

Q.1 L'ion oxonium H_3O^+, et l'ion H_3S^+.

Q.2 L'ion ammonium NH_4^+ et l'ion PH_4^+.

Q.3 L'ion tétrahydruroborate BH_4^- et l'ion tétrafluoroborate BF_4^-.

Q.4 L'ion hypobromite BrO^-, l'ion peroxyde O_2^{2-} et l'ion hydrazinium $N_2H_5^+$.

Exercice 5 : Structure hypervalentes

Pour chacun des ions suivants, donner une représentation de Lewis, déterminer ses formes mésomères les plus représentatives :

Q.1 L'ion sulfate SO_4^{2-} (le soufre est l'atome central).

Q.2 L'ion phosphate PO_4^{3-} (le phosphore est l'atome central).

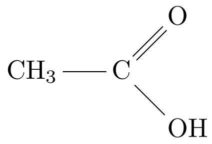
Q.3 L'ion triiodure I_3^- (structure non cyclique).

Q.4 Les ions ICl_2^- et ICl_4^- (l'iode est l'atome central).

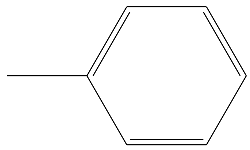
Exercice 6 : Expliquer les différences de miscibilité

Q.1 Expliquer pourquoi l'eau et l'acide éthanoïque sont miscibles, alors que l'eau et le toluène ne le seont pas.

On donne la formule semi-développée de l'acide éthanoïque et la formule topologique du toluène :



Acide éthanoïque

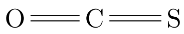


Toluène

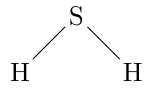
Exercice 7 : Déterminer la polarité de molécules

Q.1 Préciser la direction et le sens du moment dipolaire de chaucun des molécules suivantes. Pour schématiser la géométrie de la molécule, seuls les doublets liants ont été représentés (représentation de Cram), en omettant les éventuels doublets non liants et les lacunes électroniques.

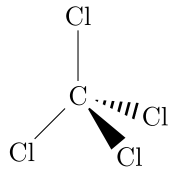
OCS



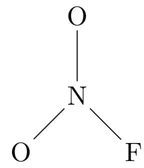
H_2S



CCl_4



NO_2F



Données : sur l'échelle de Pauling, $\chi(\mathrm{H}) = 2,2$; $\chi(\mathrm{C}) = 2,6$; $\chi(\mathrm{N}) = 3,0$; $\chi(\mathrm{O}) = 3,4$; $\chi(\mathrm{F}) = 4,0$; $\chi(\mathrm{S}) = 2,6$ et $\chi(\mathrm{Cl}) = 3,2$

Exercice 8 : Éléments de la famille de l'azote : les pnictogènes

L'azote N, le phosphore P et l'arsenic As sont situés dans la colonne 15 de la classification périodique et respectivement dans les 2^e^, 3^e^ et 4^e^ périodes.

Q.1 Comparer l'électronégativité de ces trois éléments.

Q.2 Combien de liaisons covalentes peuvent être établies par ces trois éléments en imposant une charge formelle nulle pour N, P ou As ?

Q.3 Donner les formules de Lewis des composés : NO (radical), $NO_2{}^-$, N_2O_2, N_2O_3 , N_2O_4.

Q.4 Donner la formule de Lewis ainsi que la géométrie prévue par la théorie VSEPR de $AsBr_3$. La molécule est-elle polaire ?

Q.5 Le composé PBr_5 peut-il exister ? Si oui, proposer une formule de Lewis.

Exercice 9 : Composé du soufre

Q.1 Donner la configuration électronique de l'oxygène ($Z = 8$) et du soufre ($Z = 16$) et comparer leur électronégativité.

Q.2 Écrire les schéma de Lewis des entités H_2S, SO_2, SO_3 et SO_4^{2-}.

Q.3 Prévoir leur géométrie et les représenter dans l'espace.

Q.4 Parmi les molécules précédentes, lesquelles sont polaires ? Représenter alors leur vecteur moment dipolaire.

Q.5 La norme du moment dipolaire d'une seule liaison S−H dans H_2S est de 0,6 D ($1\,\mathrm{D} = 3{,}33 \times 10^{-30}\,\mathrm{C \cdot m^{-1}}$). Sachant que $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et que la longueur de la liaison S−H est de 132 pm, déterminer le pourcentage d'ionicité δ de la liaison S−H.

Exercice 10 : Schéma de Lewis moins simples

Représenter la formule de Lewis pour :

Q.1 BH_3

Q.2 H_3PO_4 : P est central, et tous les H sont liés à des O. Pas de charge formelle.

Q.3 C_6H_6 : molécule cyclique

Q.4 $HCO_3{}^-$: pas de liaison O−O, H fixé à un O.

Q.5 CH_3NO_2 : N est central, les H sont autour de C.

Q.6 CN^-

Chimie 2 : Transformation de la matière :

Exercice 1 : Établir et utiliser un tableau d'avancement

Soit la transformation chimique totale à laquelle on associe la réaction d'équation :

$$4Al(s) + 3O_2(g) = 2Al_2O_3(s)$$

Dans l'état initial, considérons que le système est composé de 16 mol d'aluminium Al(s), et 9,0 mol de dioxygène $O_2(g)$.

Q.1 Établir un tableau d'avancement décrivant l'évolution du système.

Q.2 Identifier le réactif limitant, et déterminer la composition final du système.

Exercice 2 : Expression d'un quotient réactionnel

Exprimer le quotient réactionnel associé aux équations de réactions suivantes :

Q.1 $NH_4^+(aq) + H_2O(l) = NH_3(aq) + H_3O^+(aq)$

Q.2 $Ag_3PO_4(s) = 3Ag^+(aq) + PO_4^{3-}(aq)$

Q.3 $N_2(g) + 3H_2(g) = 2NH_3(g)$

Exercice 3 : Sens d'évolution spontanée

On considère une solution aqueuse d'acide méthanoïque de concentration $C = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Cette solution est siège d'une transformation modélisée par la réaction d'équation :

$$HCOOH(aq) + H_2O(l) = HCOO^-(aq) + H_3O^+(aq) \qquad K^\circ = 10^{-3{,}8} \text{ à } 25\,°\mathrm{C}$$

Q.1 Quel est le sens spontané d'évolution du système ?

Q.2 Déterminer la composition du système à l'état final en considérant la réaction comme très peu avancée. S'agit-il d'un état d'équilibre ?

Q.3 Calculer le taux d'avancement final. Commenter le résultat.

Exercice 4 : Décomposition du pentachlorure de phosphore

On étudie l'équilibre de dissociation en phase gaz de PCl_5 selon la réaction :

$$PCl_5(g) = PCl_3(g) + Cl_2(g)$$

La constante d'équilibre $K = 0,45$ à 230 °C.

Q.1 On introduit dans une enceinte thermostatée à 230 °C et initialement vide, $n_0 = 0{,}10$ mol de $PCl_5(g)$. Déterminer la composition de la phase gazeuse présente dans l'enceinte lorsque l'équilibre chimique s'établit sachant que la pression totale est fixée à $p = p^\circ$.

Q.2 L'équilibre de la question 1 étant établi, on augmente la pression totale jusqu'à $p' = 5p^\circ$ à température constante. Observe-t-on une évolution de la composition de l'enceinte ? Si oui, indiquer le sens d'évolution des quantités de matière des différents constituants.

Q.3 L'équilibre de la question 1. étant établi, on ajoute du diazote gazeux (gaz inerte) à température et pression totale constantes. Observe-t-on une évolution de la composition de l'enceinte ? Si oui, indiquer le sens d'évolution des quantités de matière des différents constituants.

Exercice 5 : Formation du tétrafluorure d'uranium

On considère la réaction :

$$UO_2(s) + 4\,HF(g) = UF_4(s) + 2\,H_2O(g)$$

On maintient la température égale à 700 K et la pression totale à 1,0 bar. La constante d'équilibre à 700 K est égale à $K^\circ = 6{,}8 \times 10^4$.

Q.1 On part de 1,0 mol de dioxyde d'uranium UO_2 et de 1,0 mol de fluorure d'hydrogène HF. Quelle est la composition finale du système ?

Q.2 On part de 0,10 mol de dioxyde d'uranium UO_2 et de 1,0 mol de fluorure d'hydrogène HF. Quelle est la composition finale du système ? Commenter.

Exercice 6 : Réaction acide-base en solution aqueuse

L'acide éthanoïque réagit avec l'eau pour donner l'ion éthanoate :

$$CH_3COOH(aq) + H_2O(l) = CH_3COO^-(aq) + H_3O^+(aq) \text{ de constant d'équilibre } K_1^\circ$$

Le chlorure d'ammonium (NH_4Cl) est un solide ionique soluble dans l'eau et donnant en solution aqueuse les ions chlorure Cl^- et ammonium ${NH_4}^+$. L'ion ammonium est un acide qui réagit avec l'eau pour donner l'ammoniac :

$${NH_4}^+(aq) + H_2O(l) = NH_3(aq) + H_3O^+(aq) \text{ de constant d'équilibre } K_2^\circ$$

Les constantes d'équilibre des deux réactions précédentes sont $K_1 = 1{,}7 \times 10^{-5}$ et $K_2 = 5{,}7 \times 10^{-10}$. On envisage la réaction entre l'acide éthanoïque et l'ammoiac :

$$CH_3COOH(aq) + NH_3(aq) = CH_3COO^-(aq) + {NH_4}^+(aq) \text{ de constant d'équilibre } K_3^\circ$$

L'ammoniac NH_3 est un gaz à température ambiante et pression atmosphérique. Il est très soluble dans l'eau (environ $25\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$). Une solution aqueuse d'ammoniac (appelée ammoniaque) perd progressivement ses molécules de NH_3 au contact de l'air. Il faut donc la doser pour contrôler sa concentration. L'ammoniac étant une base, l'acide éthanoïque est un condidat pour ce dosage, mais il faut pour cela que le taux d'avancement de la réaction soit supérieur à 99%, lorsque le réactif titrant et le réactif titré sont apportés en proportions stœchiométriques.

Q.1 Calculer la constante d'équilibre K_3. La réaction envisagée est-elle thermodynamiquement favorisée ?

Q.2 On considère un mélange stœchiométrique de NH_3 et de CH_3COOH. Calculer le taux d'avancement à l'équilibre et conclure.

Exercice 7 : Oxydation de l'ammoniac

L'acide nitrique HNO_3 est produit en grande quantité, principalement pour être utilisé dans la fabrication des engrais de l'ammoniac :

$$4NH_3(g) + 5O_2(g) = 4NO(g) + 6H_2O(g)$$

La réaction est réalisée à la température $800\,°\mathrm{C}$ et à une pression constante $P = 1{,}0\,\mathrm{bar}$. À cette température, le logarithme népérien de la constante d'équilibre de cette réaction est $\ln(K^\circ) = 123$. Dans un réacteur opérant en système fermé à pression constante, on mélange un volume d'air avec un volume d'ammoniac. L'air contient 20% de O_2 et 80% de N_2 (un gaz chimiquement inerte).

Q.1 Si NH_3 et O_2 étaient apportés en proportions stœchimétriques, quelles seraient les proportions molaires des gaz NH_3, O_2 et N_2 dans le mélange initial (à donner en % à 1% près) ?

Q.2 Pour un mélange gazeux contenant initialement $100\,\mathrm{mol}$, calculer les quantités de matière initiales si la fraction molaire de NH_3 dans le mélange est 10%. Faire un tableau d'avancement et en déduire le réactif limitant.

Q.3 Écrire l'équation vérifiée par l'avancement ξ_{eq} à l'équilibre. Que vaut ξ_{eq} ?

Q.4 En déduire les pressions partielles des gaz dans le mélange à l'équilibre, avec une précision de $10\,\mathrm{mbar}$.

Exercice 8 : Synthèse de l'ammoniac

L'ammoniac NH_3 est fabriqué industriellement en très grande quantité. Sa principale application est la fabrication d'engrais azotés. Le procédé de Haber-Bosch consiste à faire réagir du diazote N_2 avec du dihydrogène H_2 (obtenu par vaporéformage du méthane issu du gaz naturel). La réaction est :

$$3H_2(g) + N_2(g) = 2NH_3(g)$$

Elle est réalisée en système fermé, à une pression constante $P = 100\,\mathrm{bar}$ et une température constante de $400\,°\mathrm{C}$. La constante d'équilibre à cette température est $K = 2{,}9 \times 10^{-4}$. Initialement, on introduit dans le réacteur N_2 et H_2 en proportions stœchiométriques.

Q.1 Soit n_0 le nombre de moles initial de N_2. Écrire un tableau d'avancement.

Q.2 Obtenir l'équation vérifiée par le taux de N_2 restant, défini comme le rapport de la quantité de N_2 à l'équilibre par la quantité initiale. Résoudre cette équation.

Q.3 En déduire le taux de conversion de N_2. Quel serait ce taux pour une pression $P = 1{,}0\,\mathrm{bar}$?

Chimie 3 : Équilibre acido-basique en solution aqueuse

Exercice 1 : pH et composition d'une solution à l'équilibre

On mélange deux volumes V égaux d'une solution d'acide éthanoïque (ou acétique) CH_3COOH et d'une solution de nitrite de sodium (Na^+, NO_2^-), toutes les deux à la concentration $C = 0{,}10\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Déterminer la composition du système à l'équilibre. En déduire le pH de la solution.

Données : $\text{p}K_{a1}(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4{,}8$ et $\text{p}K_{a2}(HNO_2/NO_2^-) = 3{,}2$.

Q.1 On liste les espèces présentes, on place les couples concernés sur un axe en pK_a et on entoure les espèces présentes.

Q.2 On identifie a réaction prépondérante.

Q.3 On en déduit la composition du système à l'équilibre.

Q.4 On en déduit le pH.

Q.5 On vérifie la cohérence du résultat avec un diagramme de prédominance.

Exercice 2 : Prévisions de réactions

Soient les solutions aqueuses A, B, C, D et E, préparées avec $0{,}10\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ du corps pur donné dans le tableau suivant. On donne aussi les pK_A des couples acide-Base associés.

A	NH_4Cl
B	NaOH
C	CH_3CO_2H
D	$NaHCO_3$
E	HCl

Acide/Base	pK_A
NH_4^+/NH_3	9,25
$HCO_3{}^-/CO_3^{2-}$	10,33
H_2CO_3/HCO_3^-	6,35
$CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-$	4,75

Acide/Base	pK_A
H_3O^+/H_2O	0
H_2O/HO^-	14,0

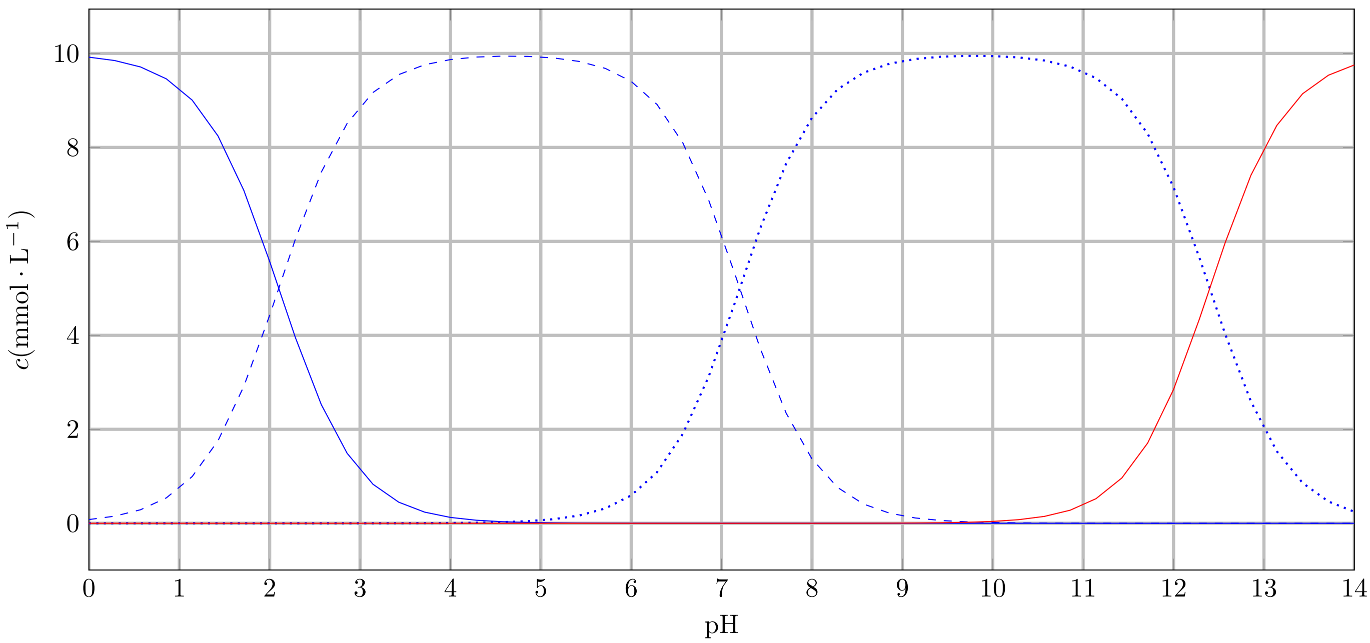
On mélange 10 mL d'une des solutions avec 10 mL d'une autre, par exemple la solution A mélangée avec la solution B.

Q.1 Déterminer les paires de solutions dont le mélange donne lieu à une réaction, avec une constante d'équilibre supérieure à 1. Écrire les équations de ces réactions.

Q.2 Parmi ces paires, déterminer celles dont la réaction a un avancement supérieur à 99% (réaction totale).

Exercice 3 : Acide phosphorique

L'acide phosphorique H_3PO_4 est un triacide. La figure donnée page suivante montre le diagramme de distribution d'une solution aqueuse d'acide phosphorique.



Q.1 Quelle est la concentration en acide phosphorique de cette solution ? Écrire l'équation traduisant la conservation de la matière.

Q.2 Quels sont les pK_A de l'acide phosphorique ?

Q.3 Pour une solution de pH=4,0, quelles approximations peut-on faire pour les concentrations ? Calculer $[H_3PO_4]$.

Q.4 Pour une solution de pH=1,0, quel est le taux de dissociation de H_3PO_4 ?

Exercice 4 : État d'équilibre d'un ampholyte

La glycine est un acide aminé de formule H_3n^+-CH_2-COO^-, noté AH. Il participe à deux couples acido-basiques : $AH_2{}^+/AH$ de $pK_{A1} = 2{,}3$ et AH/A^- de $pK_{A2} = 9{,}6$.

Q.1 Dresser le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques en fonction du pH de la solution.

Q.2 Déterminer l'état d'équilibre d'une solution aqueuse dans laquelle la glycine est introduite à la concentration initiale $C_0 = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Exercice 5 : Le sulfure d'ammonium en solution

On introduit $n = 1{,}0\,\mathrm{mmol}$ de sulfure d'ammonium solide $(NH_4)_2S(s)$ dans $V = 100\,\mathrm{mL}$ d'eau. On admet que le sulfure d'ammonium se dissocie complètement dès qu'il est mis en solution.

Données : $pK_{a1}(NH_4{}^+/NH_3) = 9{,}2$ et $pK_{a2}(HS^-/S^{2-}) = 13{,}0$.

Q.1 Représenter le diagramme de prédominance des deux couples.

Q.2 En déduire que la solution de sulfure d'ammonium ne peut pas être un électrolyte contenant les ions $NH_4{}^+$ et S^{2-}. Écrire l'équation de la réaction qui a lieu et calculer sa constante d'équilibre.

Q.3 Calculer alors les concentrations de toutes les espèces en solution.

Q.4 Déterminer le pH de la solution.

Exercice 6 : Vitamine C

La vitamine C, dont le nom est acide ascorbique, est un diacide noté $AscH_2$.

Q.1 Dresser le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques issues de l'acide ascorbique en fonction du pH de la solution.

Q.2 On dissout dans l'eau un comprimé contenant 500 mg d'acide ascorbique dans une fiole jaugée de volume $V = 200\,\mathrm{mL}$. Déterminer l'état d'équilibre de la solution obtenue.

Q.3 La vitamine C existe aussi en comprimé tamponné, réalisée en mélangeant l'acide ascorbique $AscH_2$ et de l'ascorbate de sodium AscHNa. Un comprimé de vitamine C tamponnée de masse m en principe actif (c'est-à-dire en acide ascoribique, sous ses deux formes : diacide et monoacide) est dissous dans $V' = 100\,\mathrm{mL}$ d'eau distillée. La solution obtenue à un pH égal à 4,4. Déterminer la masse d'acide ascorbique et la masse d'ascorbate de sodium contenues dans ce cachet. On prendre $m = 500\,\mathrm{mg}$ pour les applications numériques.

Données : à 298 K $pK_{A1}(AscH_2/AscH^-) = 4{,}2$; $pK_{A2}(AscH^-/Asc^{2-}) = 11{,}6$; Masse molaires : $M(AscH_2) = 176\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $M(AscHNa) = 198\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$

Exercice 7 : Titrage du dioxyde de soufre

Le dioxyde de soufre a un comportement de diacide dans l'eau. On considère, dans cette question, que les espèces contenant l'élément soufre présentes en solution aqueuse sont :

$$SO_2(aq),\ HSO_3^-(aq) \text{ et } SO_3^{2-}(aq)$$

La température est fixée à 298 K. On étudie le dosage de $V_0 = 10{,}0\,\mathrm{mL}$ d'une solution aqueuse de dioxyde de soufre, de concentration notée c_{SO_2}, par une solution aqueuse de soudre, NaOH, de concentration $c = 1{,}00 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. On note V_{NaOH} le volume de soude versé. La courbe de pH a été modélisée, elle présente deux sauts de pH, l'un pour $V_{NaOH} = 10{,}0\,\mathrm{mL}$ et l'autre pour $V_{NaOH} = 20{,}0\,\mathrm{mL}$.

Données à 298 K : $pK_{A1}(SO_2(aq)/HSO_3^-) = 1{,}8$; $pK_{A2}(HSO_3^-/SO_3^{2-}) = 7{,}2$; $pK_e = 14{,}0$.

Q.1 Écrire les équations des réactions ayant lieu au cours du dosage. Calculer les valeurs de leur constante thermodynamique d'équilibre.

Q.2 Donner l'allure de la courbe de titrage.

Q.3 Pourquoi observe-t-on lors de ce dosage deux sauts de pH ? Calculer la valeur de la concentration en dioxyde de soufre c_{SO_2}.

Chimie 4 : Cinétique chimique :

Exercice 1 : Utilisation de la dégénérescence de l'ordre

La réduction de Hg^{2+} par Hg^{2+} s'effectue selon la réaction :

$$2Hg^{2+} + 2Fe^{2+} = Hg_2^{2+} + 2Fe^{3+}$$

On supposera la loi de vitesse de la forme : $r = k\left[Fe^{2+}\right]^p\left[Hg^{2+}\right]^q$

On suit la réaction par spectrophotométrie avec différentes concentrations initiales $\left[Fe^{2+}\right]_0$ et $\left[Hg^{2+}\right]_0$, on obtient les résultats suivants (le temps est mesuré en unités arbitraires u.a. non précisées).

Expérience n°1 : $\left[Fe^{2+}\right]_0 = 0{,}1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ et $\left[Hg^{2+}\right]_0 = 0{,}1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$

t en (u.a.)	0	1	2	3	$+\infty$
$\left[Hg^{2+}\right]/\left[Hg^{2+}\right]_0$	1	0,50	0,33	0,25	0

Expérience n°2 : $\left[Fe^{2+}\right]_0 = 0{,}1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ et $\left[Hg^{2+}\right]_0 = 0{,}001\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$

t en (u.a.)	0	1	2	4	$+\infty$
$\left[Hg^{2+}\right]/\left[Hg^{2+}\right]_0$	1	0,66	0,45	0,20	0

Q.1 Expliquer l'intérêt du choix $\left[Fe^{2+}\right]_0 = \left[Hg^{2+}\right]_0$ dans la première expérience, et l'intérêt du choix $\left[Fe^{2+}\right]_0 \gg \left[Hg^{2+}\right]_0$ dans la seconde.

Q.2 Montrer que l'ordre global de la réaction est 2.

Q.3 Montrer que l'on peut estimer que les ordres partiels vérifient $p = q = 1$.

Exercice 2 : Oxydation d'un alcool secondaire

En présence d'un initiateur I, un alcool secondaire s'oxyde en phase liquide selon la réaction :

$$RCH(OH)R + O_2 = COR + H_2O_2$$

L'étude expérimentale est réalisée à 100 °C en mesurant la vitesse initiale de la réaction r_0 pour différentes concentrations en réactifs et en initiateur I.

On suppose une loi de vitesse (initiale) de la réaction du type :

$$r_0 = k\,[RCH(OH)R]_0^a\,p(O_2)_0^b\,[I]_0^c$$

Q.1 Détermination expérimentale de b : pour des pressions en dioxygène comprises entre 0,40 bar et 0,67 bar, la vitesse initiale r_0 ne varie pas. Que peut-on en conclure sur b ?

Q.2 Détermination expérimentale de c : Pour une série d'expériences, on impose $p(O_2) = 0{,}53$ bar ; $[\text{alcool}]_0 = 10\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. On mesure r_0 pour différentes valeurs $[I]_0$:

$[I]_0$ en $\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$	0,015	0,030	0,060	0,090
$10^6 r_0$ en $\mathrm{mol\cdot L^{-1}\cdot s^{-1}}$	40,4	57,1	80,8	99,0

Déuire grâce à une régression linéaire l'ordre partiel c de la réaction par rapport à I.

Q.3 Détermination expérimentale de a : Pour une série d'expériences, on impose $p(O_2) = 0{,}53$ bar ; $[I]_0 = 0{,}03\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. On mesure r_0 pour différentes valeurs $[\text{alcool}]_0$:

$[\text{alcool}]_0$ en $\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$	2	4	6	8	10
$10^6 r_0$ en $\mathrm{mol\cdot L^{-1}\cdot s^{-1}}$	11,5	22,8	34,5	45,6	57,1

Déduire grâce à une régression linéaire l'ordre partiel de la réaction a par rapport à l'alcool.

Q.4 Déterminer la constante de vitesse de la réaction.

Exercice 3 : Détermination des ordres globaux et partiels de la synthèse de la bromacétone

On considère la propanone (CH_3COCH_3).

Cette cétone peut réagir sur le dibrome (Br_2) en milieu aqueux basique selon la réaction totale :

$$CH_3COCH_{3(aq)} + Br_{2(aq)} + HO^-_{(aq)} = CH_2BrCOCH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} + Br^-_{(aq)}$$

Soit F le composé organique final.

La réaction est étudiée en milieu de pH constant. On réalise trois expériences :

Expérience 1 : $[\text{propanone}]_0 = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $[\text{Br}_2]_0 = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $\left[\text{HO}^-\right]_0 = C^{te} = 0{,}01\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

t en (s)	0	20	40	60	100	140	200
$[\text{Br}_2]$ en $(\text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$	0,1	0,08	0,067	0,055	0,037	0,025	0,014
$\ln\dfrac{[\text{Br}_2]}{c^\circ}$	−2,3	−2,53	−2,7	−2,9	−3,3	−3,69	−4,27
$\dfrac{1}{[\text{Br}_2]}$ $(\text{L}\cdot\text{mol}^{-1})$	10	12,5	14,9	18,2	27,0	40	71,4

Expérience 2 : $[\text{propanone}]_0 = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $[\text{Br}_2]_0 = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $\left[\text{HO}^-\right]_0 = C^{te} = 0{,}02\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

t en (s)	0	10	20	30	45	60	80
$[\text{Br}_2]$ en $(\text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$	0,1	0,082	0,068	0,056	0,041	0,031	0,02
$\ln\dfrac{[\text{Br}_2]}{c^\circ}$	−2,3	−2,5	−2,69	−2,88	−3,19	−3,47	−3,91
$\dfrac{1}{[\text{Br}_2]}$ $(\text{L}\cdot\text{mol}^{-1})$	10	12,2	14,7	17,9	24,4	32,3	50

Expérience 3 : $[\text{propanone}]_0 = 1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $[\text{Br}_2]_0 = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $\left[\text{HO}^-\right]_0 = C^{te} = 0{,}02\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

t en (s)	0	1	2	3	4	5
$[\text{Br}_2]$ en $(\text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$	0,1	0,080	0,061	0,042	0,025	0,0074
$\ln\dfrac{[\text{Br}_2]}{c^\circ}$	−2,3	−2,5	−2,80	−3,17	−3,69	−4,91
$\dfrac{1}{[\text{Br}_2]}$ $(\text{L}\cdot\text{mol}^{-1})$	10	12,2	16,4	23,8	40	135,1

On cherche si elle existe, une loi de vitesse de la forme :

$$r = k\,[\text{CH}_3\text{COCH}_3]^\alpha\,[\text{Br}_2]^\beta\,\left[\text{HO}^-\right]^\gamma$$

Q.1 Montrez que l'expérience 1 permet d'étudier les éventuels ordres partiels par rapport à la propanone et au dibrome.

Q.2 Montrez que les expériences 1 et 2 permettent d'étudier l'influence des ions hydroxyde sur la loi de vitesse.

Q.3 Qu'apporte l'expérience 3 ?

Q.4 En justifiant votre démarche déterminez les exposants α, β et γ. Donnez sa constante de vitesse k en précisant bien les unités utilisées.

Exercice 4 : Décomposition de l'ozone

L'ozonation est une méthode de traitement de l'eau potable consistant à dissoudre de l'ozone O_3 dans l'eau. L'ozone est un oxydant puissant qui détruit les matières organiques et tue les bactéries. L'ozone en solution aqueuse est instable. Il se décompose selon un mécanisme complexe, en produisant en particulier des radicaux hydroxyles, dont le pouvoir oxydant permet la dégradation de matières organiques. Pour simplifier, on envisage une dégradation en dioxygène suivant l'équation :

$$\text{O}_{3\,(\text{aq})} \rightarrow \frac{3}{2}\text{O}_{2\,(\text{aq})}$$

Le tableau ci-dessous donne le temps de demi-vie de l'ozone pour différentes températures (à pH $=$ 7). Le temps de demi-vie ne dépend pas de la concentration initiale en ozone. Soit $c(t=0)$ la concentration initiale de O_3 et $c(t)$ sa concentration à un instant t. On suppose que la réaction admet un ordre α par rapport à O_3 et on note k sa constante de vitesse.

T (°C)	15	20	25	30	35
$t_{\frac{1}{2}}$ (min)	30	20	15	12	8

Données : $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $0\,°\text{C} = 273\,\text{K}$.

Q.1 Dans l'hypothèse $\alpha = 1$, déterminer $c(t)$ et en déduire l'expression du temps de demi-vie.

Q.2 Dans l'hypothèse $\alpha = 2$, déterminer $c(t)$ et en déduire l'expression du temps de demi-vie.

Q.3 Quelle hypothèse faut-il retenir ? En déduire la constante de vitesse k pour les différentes températures.

Q.4 Déterminer l'énergie d'activation de la réaction.

Chimie 5 : Solides cristallins

Exercice 1 : L'aluminium

L'aluminium est un métal abondant sur Terre, très utilisé en raison de bonnes propriétés mécaniques, d'une masse volumique faible ($\rho = 2{,}70\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$), et d'une quasi absence de corrosion.

Sa structure cristalline, déterminée par diffraction de rayons X, est cubique à faces centrées (CFC).

Données : la constante d'Avogadro $\mathscr{N}_A = 6{,}022\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ et la masse molaire de l'aluminium $M(\mathrm{Al}) = 26{,}98\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q.1 Représenter la maille d'un cristal d'aluminium et calculer la population, puis la coordinence.

Q.2 Calculer le paramètre a de la maille CFC (en picomètres).

Q.3 Dans le cadre du modèle des sphères dures, calculer le rayon des sphères représentant un atome d'aluminium dans le solide.

Q.4 Calculer la compacité de la structure.

Exercice 2 : Étain

L'étain (Sb) est un élément métallique qui entre dans la composition du bronze, un alliage cuivre-étain fabriqué depuis l'antiquité. L'étain fond à $232\,^\circ\mathrm{C}$, ce qui est très bas pour un métal. Il possède trois variétés allotropiques. On s'intéresse à la variété Sb-α, stable en dessous de $13\,^\circ\mathrm{C}$. Sa masse volumique est $\rho = 5{,}75\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

L'étain α possède la structure du diamant : les atomes Sb occupent les nœuds d'une maille cubique à faces centrées (CFC) et un site tétraédrique sur deux de la maille CFC.

Données : la constante d'Avogadro $\mathscr{N}_A = 6{,}022\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ et la masse molaire de l'étain $M(\mathrm{Sb}) = 118{,}7\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q.1 Représenter la maille en plaçant les atomes d'étain.

Q.2 Déterminer la population de la maille.

Q.3 Déterminer la coordinence des atomes d'étain.

Q.4 Calculer le paramètre a de la maille CFC (en picomètres).

Q.5 Calculer le rayon des atomes d'étain dans le modèle des sphères dures.

Q.6 Calculer la compacité de la structure cristalline. Comparer à la compacité d'une structure métallique CFC.

Exercice 3 : Fluorine

La fluorine CaF_2 est un solide ionique contenant des ions Ca^{2+} et F^-. Les ions Ca^{2+} forment une maille cubique à faces centrées et les ions F^- occupent des sites tétraédriques de cette maille. Le paramètre de la maille, déterminé par diffraction de rayon X, est $a = 546\,\mathrm{pm}$.

Données : la constante d'Avogadro $\mathscr{N}_A = 6{,}022\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$, la masse molaire du calcium $M(\mathrm{Ca}) = 40{,}1\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, et la masse molaire du fluor $M(\mathrm{F}) = 19{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q.1 Combien de sites tétraédriques sont occupés par les ions F^- ?

Q.2 Représenter la maille en plaçant les anions et les cations.

Q.3 Déterminer la coordinence des anions puis celle des cations.

Q.4 Calculer la masse volumique de la fluorine.

Exercice 4 : Variétées allotropiques du Fer

Le fer est un métal qui fond à $1538\,^\circ\mathrm{C}$. Il présente deux variétés allotropiques. À température ambiante, il est sous la forme α, de structure cristalline cubique centrée. Lorsqu'on chauffe lentement une pièce en fer, une transition allotropique se produit à $910\,^\circ\mathrm{C}$: le fer adopte la forme γ, de structure cubique à faces centrées. À $1400\,^\circ\mathrm{C}$, il retrouve la structure cubique centrée (forme δ).

On s'intéresse à la varité allotropique de structure cubique centrée, stable à température ambiante. Sa masse volumique est $\rho = 7{,}87\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. La structure est cubique centrée : les atomes de fer occupent les 8 sommets d'une maille cubique et son centre.

Données : la constante d'Avogadro $\mathscr{N}_A = 6{,}022\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$, et la masse molaire du fer $M(\mathrm{Fe}) = 55{,}85\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q.1 Dessiner la maille cubique centrée. Définir le paramètre de maille a.

Q.2 Déterminer la population et la coordinence.

Q.3 Calculer le paramètre de maille, en picomètres.

Q.4 Dans le modèle des sphères dures, quel est le rayon des sphères représentant les atomes de fer ?

Q.5 Calculer la compacité. Comparer à celle d'une structure cubique à faces centrées.

Q.6 Quel est le rayon maximal d'une sphère que l'on peut loger au centre des arrêtes du cube ?

On se propose d'utiliser le rayon des atomes de fer obtenu lors de l'étude de la forme α pour évaluer la masse volumique de la forme γ.

Q.7 Représenter la structure cristalline du fer γ.

Q.8 Déterminer la population et la coordinence.

Q.9 Calculer le paramètre de la maille.

Q.10 Calculer la compacité.

Q.11 Calculer la masse volumique. Comparer à celle du fer α et expliquer.

Q.12 Déterminer l'habitabilité d'un site octaédrique.

Q.13 Déterminer l'habitabilité d'un site tétraédrique.

Exercice 5 : Structure d'un alliage du titane

L'alliage le plus utilisé dans l'industrie aéronautique a pour formule moléculaire $Al_xNi_yTi_z$. Le titane y est présent sous forme β : son système cristallographique est le cubique faces centrées. Les atomes d'aluminium occupent la totalité des sites octaédriques, et ceux de nickel occupent les sites tétraédriques. Le paramètre de maille ainsi formée vaut : $a = 589\,\text{pm}$.

Q.1 Représenter la maille cubique en perspective.

Q.2 Déterminer la formule de l'alliage.

Q.3 Calculer le rayon des sites tétraédriques et des sites octaédriques. L'inversion d'occupation des sites est-elle possible ?

Q.4 Calculer la compacité et la masse volumique de cet alliage.

Q.5 Comparer les valeurs trouvées précédemment aux caractéristiques moyennes d'un acier courant : $\rho(acier) = 7800\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, compacité= 0,70. À qualités mécaniques équivalentes, expliquer en quoi l'alliage de titane présente de l'intérêt.

Données : Constante d'Avogadro $\mathscr{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$

Atome	Rayon atomique (pm)	Masse molaire atomique ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)
Ti	147	47,90
Al	143	26,98
Ni	124	58,70

Exercice 6 : Cuivre et laiton

Le cristal de cuivre a une structure cubique à faces centrées ($c.f.c$).

Données : $M(\text{Cu}) = 63{,}55\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; et $\rho(\text{Cu}) = 8920\,\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Q.1 Donner le schéma d'une maille conventionnelle du cristal.

Q.2 Déterminer le paramètre de maille a et le rayon métallique r_{Cu} du cuivre. Application numérique.

Q.3 Déterminer la compacité ϕ du réseau cristallin. Application numérique. Commentaire.

Q.4 Quelle est la coordinence du cuivre dans cette structure.

Q.5 Indiquer par un schéma clair la position des sites interstitiels tétraèdriques et octaèdriques, et préciser leur nombre par maille. Déterminer également les rayons maximaux respectifs r_T et r_O des atomes pouvant se loger dans ces sites, sans déformation de la maille. Application numérique.

Q.6 Le laiton α est un alliage Cu−Zn dans lequel la proportion d'atomes de zinc est comprise entre 0 et 30%. S'agit-il à votre avis d'un alliage d'insertion ou d'un alliage de substitution ?

Chimie 6 : Dissolution et précipitation

Exercice 1 : Solubilité d'un solide

Le tableau ci-dessous présente des solides peu solubles avec leur $\mathrm{p}K_s = -\log K_s$; où K_s est le produit de solubilité dans l'eau.

Solide	$AgCl$	$Ag_2Cr_2O_7$	AgI	CaF_2	$CaSO_4$	$Ca_5(PO_4)_3OH$	$Fe(OH)_2$	$Fe(OH)_3$
$\mathrm{p}K_s$	9,95	10	16,08	10,4	5,04	57,8	15	37,5

Les ions contenus dans ces solides sont :

$$Ag^+,\ Cl^-,\ Cr_2O_7^{2-},\ I^-,\ Ca^{2+},\ F^-,\ SO_4^{2-},\ PO_4^{3-},\ OH^-,\ Fe^{2+},\ Fe^{3+}$$

Q.1 Calculer la solubilité (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$) de chacun de ces solides dans l'eau pure.

Q.2 Comparer la solubilité de AgCl et de $Ag_2Cr_2O_7$, deux solides qui ont pratiquement le même produit de solubilité. Commenter.

Q.3 Pour $Fe(OH)_2$ et $Fe(OH)_3$, calculer le pH de la solution saturée.

Exercice 2 : Solubilité du nitrite d'argent

Le nitritre d'argent $AgNO_2$ est un solide qui se dissout en ions Ag^+ et NO_2^-. Son produit de solubilité est $\mathrm{p}K_s = 3{,}8$.

L'ion nitrite NO_2^- est une base faible dont l'acide conjugué est l'acide nitreux HNO_2. La constante d'acidité de ce dernier est $\mathrm{p}K_a = 3{,}5$.

Q.1 Écrire la réaction de dissolution du nitrite d'argent et la réaction de l'ion nitreux avec l'eau. Exprimer la solubilité s (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$) en fonction des différentes concentrations.

Q.2 Dans quel domaine de pH la forme basique NO_2^- est-elle prépondérante ? Déterminer dans ce cas la solubilité s de $AgNO_2$.

Q.3 Déterminer la solubilité s lorsque la forme acide HNO_2 est prépondérante, en fonction de la concentration en H_3O^+ et des différentes constantes.

Q.4 En déduire $\mathrm{p}s = -\log s$ en fonction du pH, et des constantes $\mathrm{p}K_s$ et $\mathrm{p}K_a$. En donner une représentation graphique.

Q.5 On prépare à pH = 0 une solution contenant $\left[Ag^+\right] = [HNO_2] = 0{,}10\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Le pH est augmenté progressivement par ajout d'une base. À quel pH un précipité apparaît-il ?

Exercice 3 : Condition de précipitation

On mélange 10,0 mL de solution de sulfate de sodium ($SO_4^{2-} + 2Na^+$) à $c_1 = 8{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ et 10,0 mL de solution de nitrate d'argent ($NO_3^- + Ag^+$) à $c_2 = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Q.1 Un précipité blanc de sulfate d'argent sera-t-il observé ? On précise $\mathrm{p}K_s(Ag_2SO_4) = 4{,}8$.

Exercice 4 : Adoucissement de l'eau

La dureté de l'eau est déterminée par sa concentration en ions calcium Ca^{2+} et magnésium Mg^{2+}. Dans le réseau de distribution d'eau potable, une eau trop dure est néfaste en raison des dépôts de calciare ($CaCO_3$ et $MgCO_3$) qui peuvent se produire, par exemple dans des machines à laver et les chaudières.

L'adoucissement consiste à réduire la dureté de l'eau avant de la distribuer. On s'intéresse au procédé d'adoucissement par décarbonatation. Pour simplifier, onconsidère seulement des ions Ca^{2+}. Le procédé fonctionne si ceux-ci sont associés à des ions hydrogénocarbonate HCO_3^-. Le produit de solubilité de ce dernier est $K_{s1} = 10^{-8,3}$.

Le réactif utilisé dans ce procédé est l'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2$, appelé aussi chaux éteinte. Il s'agit d'un solide dont le produit de solubilité est $K_{s2} = 10^{-5,2}$.

La réaction de décarbonatation est :

$$Ca^{2+}(aq) + 2HO^-(aq) + Ca^{2+}(aq) + 2HCO_3^-(aq) = 2CaCO_3(s) + 2H_2O(l)$$

Les premiers ions (Ca^{2+}+$2HO^-$) proviennent de la dissolution de $Ca(OH)_2$.

Pour le couple acide-base HCO_3^-/CO_3^{2-} on donne $\mathrm{p}K_a = 10,3$. Le produit ionique de l'eau est $K_e = 10^{-14,0}$.

Q.1 Caluler la solubilité de $Ca(OH)_2$.

Q.2 Calculer la constante d'équilibre de la réaction de décarbonatation et commenter.

Q.3 On envisage le cas d'une eau dure, contenant une concentration $c = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ d'hydrogénocarbonate de calcium dissous, soit $Ca^{2+} + 2HCO_3{}^-$. Calculer la quantité de matière de chaux ($Ca(OH)_2$) nécessaire pour faire précipiter le maximum de carbonate de calcium $CaCO_3$.

Exercice 5 : Élimination du fer dans l'eau potable

Les eaux naturelles exploitées pour la distribution d'eau potable peuvent contenir du fer sous forme d'ions ferreux Fe^{2+} associés à des ions carbonates CO_3^{2-}, qui peuvent éventuellement précipiter sous forme de carbonate de fer (II) $FeCO_3$. Le produit de solubilité de ce dernier est $\mathrm{p}K_s = 10{,}5$.

Bien qu'il ne soit pas nocif pour la santé, ce fer est aliminé en raison de son goût et de sa couleur. Une méthode d'élimination consiste à augmenter le pH afin de provoquer la précipitation du carbonate de fer, lequel est aliminé par filtrage. Après ce traitement, le pH de l'eau est ramené entre 6 et 8 pour la distribution.

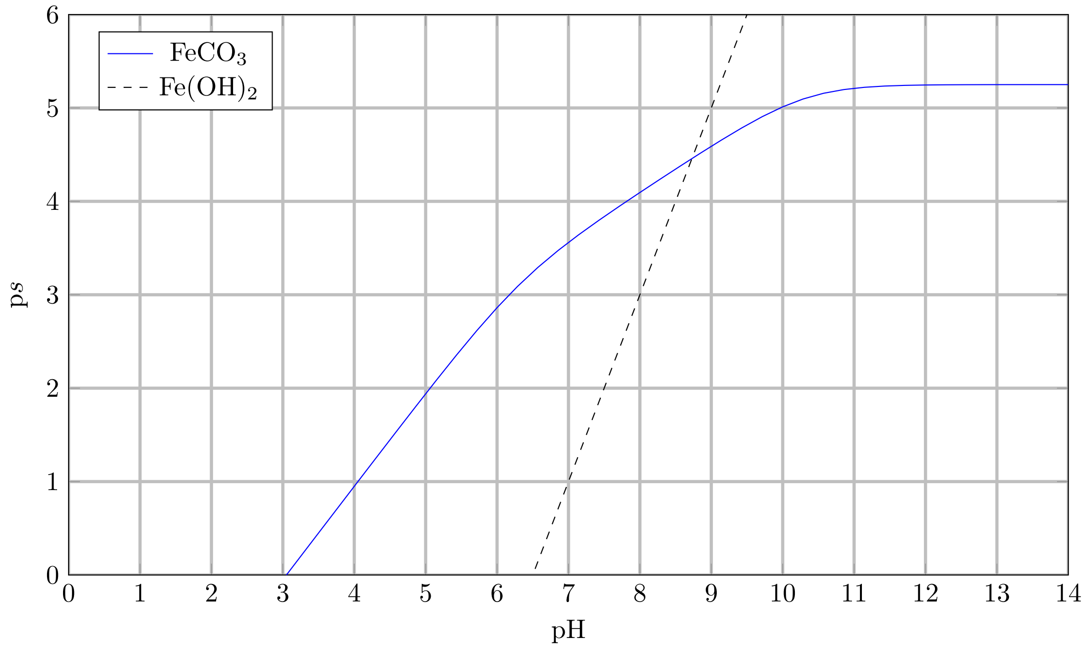
On donne pour le couple acide-base HCO_3^-/CO_3^{2-} $\mathrm{p}K_{a2} = 10{,}3$ et pour le couple acide-base H_2CO_3/HCO_3^- $\mathrm{p}K_{a1} = 6{,}3$.

Q.1 Écrire la réaction de dissolution de $FeCO_3$ et les réactions acido-basiques, puis exprimer la solubilité de $FeCO_3$ en fonction des différentes concentrations.

Q.2 Donner le diagramme de prédominance de CO_3^{2-}, HCO_3^- et H_2CO_3 en fonction du pH.

Q.3 Pour chaque domaine de prédominance des espèces carbonées, déterminer la solubilité s (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$) du carbonate de fer en fonction de $\left[H_3O^+\right]$, puis $\mathrm{p}s = -\log(s)$ en fonction du pH.

La figure suivante représente ps en fonction du pH pour le carbonate de fer (II) $FeCO_3$ et pour l'hydroxyde de fer (II) $Fe(OH)_2$. Les résultats précédents sont-ils en accord avec la courbe tracée pour le carbonate de fer ?



Q.4 On considère le cas d'une eau de pH=6,0 contenant $c = 1{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ de carbonate de fer dissous. Le pH est augmenté progressivement par ajout d'une solution de base forte. Vérifier qu'initialement la solution n'est pas saturée et déterminer à partir de quel pH un précipité apparaît. Quel est ce précipité ?

Q.5 Mêmes question pour une eau de pH=6.0 contenant $c = 1{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ de carbonate de fer dissous.

Exercice 6 : Précipitation sélective des ions manganèse

Données : $\mathrm{p}K_s(Mn(OH)_2) = 12{,}7$, $\mathrm{p}K_s'(Mn(OH)_3) = 35{,}7$.

Q.1 Déterminer la concentration en ion HO^- à partir de laquelle précipitent en $Mn(HO)_2$ les ions Mn^{2+} d'une solution d'ions Mn^{2+} à la concentration $0{,}010\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. En déduire le pH de précipitation de $Mn(OH)_2$ puis représenter le diagramme de prédominance/existence du couple $Mn(OH)_2/Mn^{2+}$ en fonction du pH.

Q.2 Déterminer le concentration en ion HO^- à partir de laquelle précipitent en $Mn(OH)_3$ les ions Mn^{3+} d'une solution d'ions Mn^{3+} à la concentration $0{,}010\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. En déduire le pH de précipitation de $Mn(OH)_3$ puis représenter le diagramme de prédominance/existence du couple $Mn(OH)_3/Mn^{3+}$ en fonction du pH.

Q.3 On dispose d'une solution contenant les ions Mn^{3+} et Mn^{2+} à la même concentration $0{,}010\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Dans quel domaine de pH doit-on se placer pour précipiter 99,99% des ions Mn^{3+} sans précipiter Mn^{2+}.

Chimie 7 : Réaction d'oxydo-réduction

Exercice 1 : Réaction d'oxydoréduction

On mélange $V_1 = 10{,}0\,\text{mL}$ de solution de chlorure d'étain (II), (Sn^{2+},$2Cl^-$), à $0{,}100\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $V_2 = 10{,}0\,\text{mL}$ de solution de chlorure de fer (III), (Fe^{3+},$3Cl^-$) également à $0{,}100\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Les deux solutions sont non saturées.

Données :

- $E°(H_2O/H_2) = 0{,}0\,\text{V}$;
- $E°(O_2/H_2O) = 1{,}23\,\text{V}$;
- $E°(Cl_2/Cl^-) = 1{,}36\,\text{V}$;
- $E°(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = 0{,}77\,\text{V}$;
- $E°(Sn^{4+}/Sn^{2+}) = 0{,}15\,\text{V}$;

Pour calculer les domaines de stabilité, on prendre une pression de tracé $P_{tr} = 1\,\text{bar}$ et une concentration de tracé $C_{tr} = 1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Q.1 Déterminer la composition initiale du système.

Q.2 Tracer les diagrammes de prédominance des espèces présentes pour un pH=7 et en déduire la réaction prépondérante. Calculer la constante d'équilibre de cette réaction et conclure.

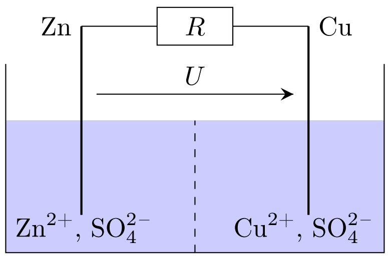
Q.3 Quelle est la composition finale du système ?

Q.4 En déduire le potentiel E de la solution à l'équilibre.

Exercice 2 : Pile Daniell

John Daniell, chimiste britannique, a inventé en 1836 une pile qui a remplacé la pile de Volta et a été utilisée pendant plusieurs décennies.

Elle est constituée de deux compartiments séparés par une paroi poreuse. Le premier contient une électrode de zinc baignant dans une solution aqueuse de sulfate de zinc $ZnSO_4$; le second contient une électrode de cuivre baignant dans une solution de sulfate de cuivre $CuSO_4$. Les concentrations apportées en zinc et en suivre sont $\left[Zn^{2+}\right] = \left[Cu^{2+}\right] = 0{,}10\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.



Données :

- $E°(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76\,\text{V}$;
- $E°(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\,\text{V}$;
- $\dfrac{RT\ln 10}{\mathscr{F}} = 0{,}0059\,\text{V}$.

Q.1 La tension à vide (ou force électromotrice) de cette pile est mesurée à l'aide d'un voltmètre de très grande résistance d'entrée. Utiliser la formule de Nernst pour calculer le potentiel de chacune des électrodes et en déduire la valeur de la tension à vite U_v mesurée.

Q.2 lorsqu'une résistance R est branchée sur la pile, celle-ci débite un courant d'intensité I. Compléter le schéma de la pile pour indiquer le sens du courant dans la résistance, le sens des réaction ayant lieu aux électrodes, puis le sens du déplacement des ions dans les deux compartiments.

Q.3 Quel est le rôle de la paroi poreuse séparant les deux compartiments ?

Q.4 Comment évolue la tension à vite U_v aux bornes de la pile lorsqu'elle débite pendant assez longtemps pour que les réactifs soient notablement consommés ?

Exercice 3 : Alcootest

Peu après avoir été consommé, l'alcool (éthanol de formule CH_3CH_2OH) passe dans le sang au niveau de l'intestin grêle. Ensuite, des échanges gazeux s'effectuent dans les alvéoles pumonaires : le sang se charge en dioxygène et se libère du dioxyde de carbone ainsi que d'une partie de l'alcool. Ces vapeurs sont expirées dans l'air, avec une concentration 2100 fois inférieure à celle du sang.

Les alcootests jetables sont constitués d'un sachet gonflable de capacité 1 L et d'un tube en verre contenant des cristaux jaunes de dichromates de potassium $K_2Cr_2O_7$ en milieu acide. Ceux-ci se colorent en vert au contact de l'alcool.

Données :

- $E°(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) = 1{,}33\,\text{V}$;
- $E°(CH_3COOH/CH_3CH_2OH) = 0{,}19\,\text{V}$;

Q.1 Écrire l'équation responsable du changement de couleur.

Q.2 Quelle est l'espèce oxydée ? Quelle est l'espèce réduite ?

Q.3 Calculer la constante d'équilibre de la réaction. Commenter.

Q.4 Déterminer la quantité de matière d'alcool expirée par litre d'air dans l'hypothèse d'une alcoolémie de 0,50 g d'alcool par litre de sang.

Q.5 En déduire la masse de dichromate de potassium devant être placée avant le trait de jauge afin que celui-ci indique le seuil des 0,50 g d'alcool par litre de sang.

Exercice 4 : Titrage des ions cuivrique en solution

Principe du titrage : on se propose dans cette partie de titrer les ions cuivrique Cu^{2+} présents dans une solution aqueuse à 298 K en les faisant réagir avec les ions iodure I^- d'une autre solution.

Données :

- $K_s(CuI) = 10^{-12}$;
- $E°(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\,V$;
- $E°(Cu^{2+}/Cu^+) = 0{,}17\,V$;
- $E°(I_2(aq)/I^-) = 0{,}62\,V$;

Q.1 Une réaction entre les ions cuivrique Cu^{2+} et les ions iodure I^- vous paraît-elle envisageable en ne tenant compte que de réactions d'oxydoréduction, compte tenu des potentiels rédox standard ?

Q.2 En fait la réaction est compliquée par l'apparition du précipité d'iodure de cuivre (I) (iodure cuivreux) de formule CuI(s), déterminer le potentiel standard associé au couple $Cu^{2+}/CuI(s)$ à 298 K. Si l'on n'arrive pas à résoudre cette question on pourra admettre la valeur, soit 0,89 V.

Q.3 Quelle réaction se produit donc lorsque l'on mélange des ions cuivrique et des ions iodure en solution dans des conditions stadard ?

Q.4 Déterminer la constante d'équilibre de cette réaction à 298 K et en déduire si celle-ci est utilisable pour un titrage des ions cuivrique.

Q.5 Pour réaliser le titrage, on se place en excès d'ions iodure et on dose le diode I_2 formé par l'ion thiosulfate $S_2O_3^{2-}$. Écrire la réaction entre l'ion thiosulfate et le diiode. Cette réaction peut-elle être considérée comme totale ?

Q.6 Réalisation pratique du dosage : À 20,0 mL d'une solution d'ions cuivrique de concentration inconnue, on ajoute 50,0 mL d'une solution d'ions iodure de concentration $2{,}00 \times 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$. On dose le diiode formé par une solution de thiosulfate de sodium de concentration $1{,}00 \times 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$. Ce dernier dosage nécessite 18,0 mL de thiosulfate.

a) Déterminer la concentration de la solution d'ions cuivrique.

b) Vérifier que le système est bien en excès d'ions iodure.

Exercice 5 : Pile bouton

La pile au mercure, appelée communément pile bouton en raison de sa forme, est formée des deux demi-piles suivantes :

$$\underbrace{Hg(l)/Hg(OH)_2(s)}_{\text{demi-pile 1}}\ ;\ K^+,\ HO^-\ ;\ \underbrace{Zn(OH)_2(s)/Zn(s)}_{\text{demi-pile 2}}$$

Le contact électrique entre les deux demi-piles est assuré par une solution de potasse K^+, HO^- concentrée.

Données :

- $pK_e = 14{,}0$;
- $K_{s,1}(Hg(OH)_2) = 2{,}36 \times 10^{-26}$;
- $K_{s,2}(Zn(OH)_2) = 7{,}08 \times 10^{-18}$;
- $E°(Hg^{2+}/Hg) = 0{,}85\,V$;
- $E°(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76\,V$;
- $M(Hg) = 200{,}6\,g \cdot mol^{-1}$.
- $\mathscr{F} = \mathscr{N}_A e = 96{,}5 \times 10^3\,C \cdot mol^{-1}$

Q.1 Sachant que l'équilibre Hg^{2+}/Hg existe dans la demi-pile 1 ; écrire le potentiel électrique E_1 de la demi-pile 1 à l'équilibre.

Q.2 Exprimer $\left[Hg^{2+}\right]_{eq}$ en fonction de $\left[H_3O^+\right]$, K_e et $K_{s,1}$.

Q.3 En déduire E_1 en fonction de $\left[H_3O^+\right]$, K_e et $K_{s,1}$.

Q.4 Sachant que l'équilibre Zn^{2+}/Zn existe dans la demi-pile 2 ; écrire le potentiel électrique E_2 de la demi-pile 2 à l'équilibre.

Q.5 Exprimer $\left[Zn^{2+}\right]_{eq}$ en fonction de $\left[H_3O^+\right]$, K_e et $K_{s,2}$.

Q.6 En déduire E_2 en fonction de $\left[H_3O^+\right]$, K_e et $K_{s,2}$.

Q.7 Exprimer la force électromotrice e de la pile.

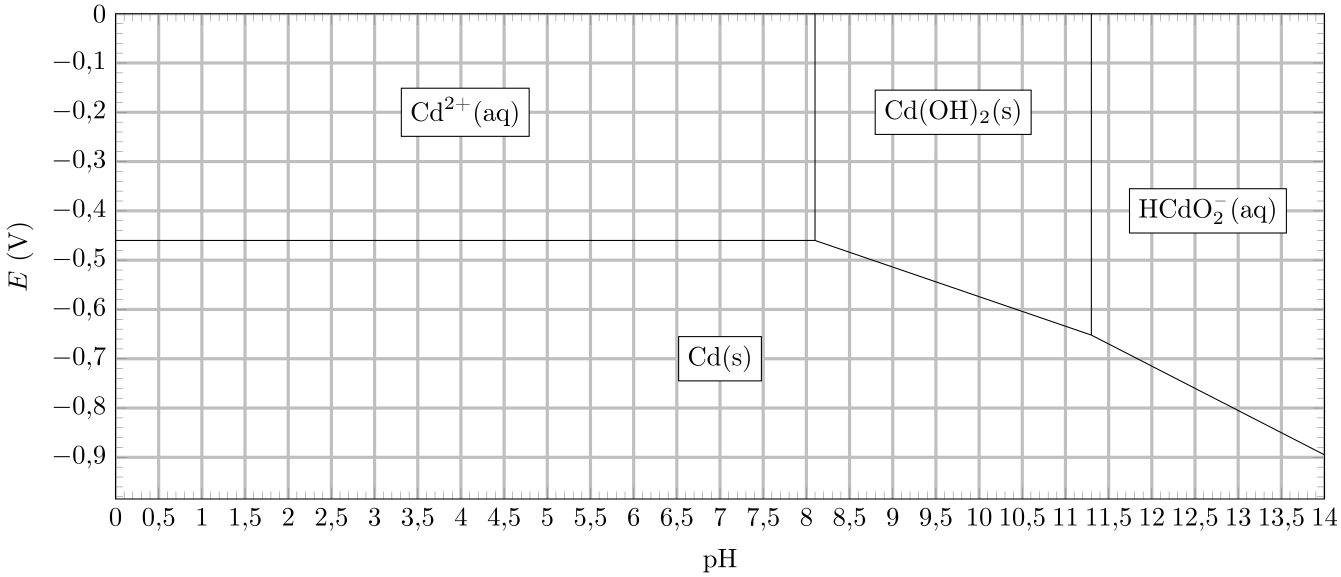
Q.8 Quelle masse d'hydroxyde de mercure (II) $Hg(OH)_2$ est nécessaire afin que la capacité de la pile soit égale à $2\,A \cdot h$?

Q.9 En supposant que la pile a fonctionné une année, que vaut le courant moyen délivrée ?

Chimie 8 : Diagramme potentiel-pH

Exercice 1 : Diagramme potentiel-pH du cadmium

Le diagramme $E - \text{pH}$ du cadmium est donné ci-dessous à 25 °C pour une concentration totale en espèces dissoutes égale à $1 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.



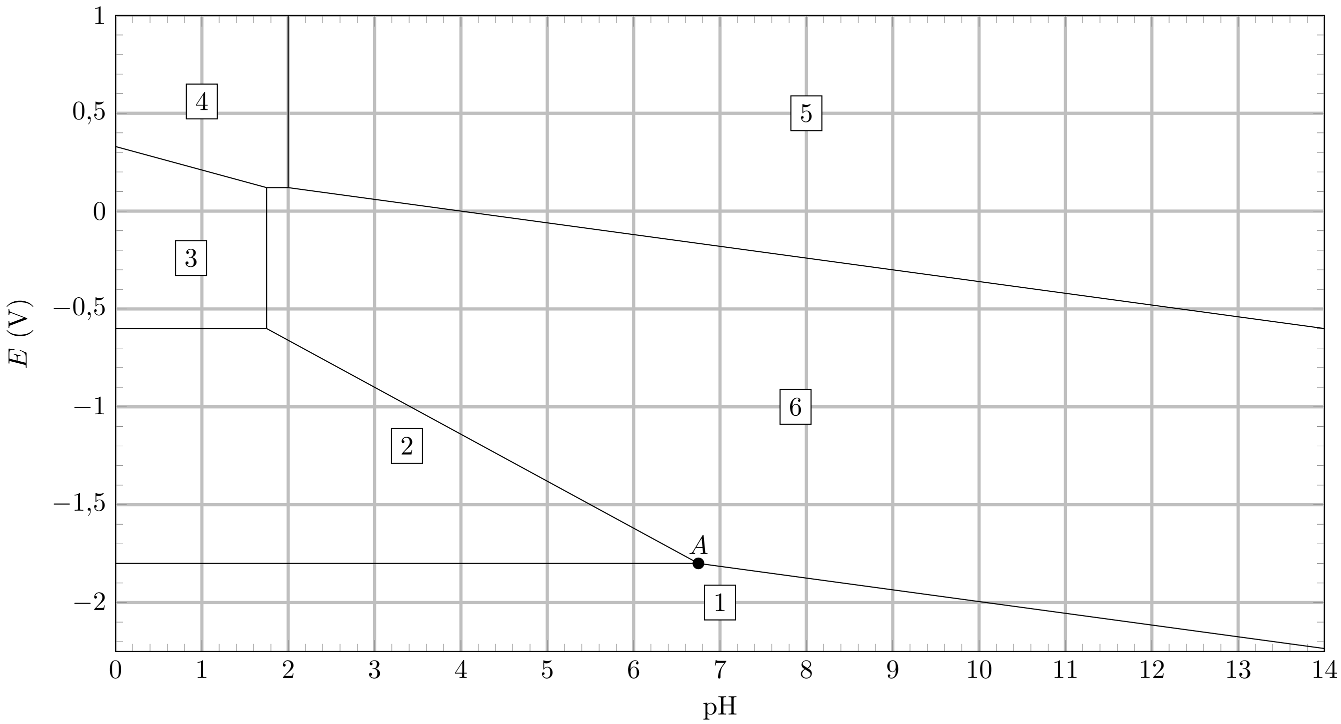
Q.1 Déterminer la constante d'équilibre de la réaction : $Cd(OH)_2(s) + HO^-(aq) = HCdO_2^-(aq) + H_2O(l)$

Q.2 Déterminer le potentiel standard du couple Cd^{2+}/Cd.

Q.3 Déterminer le produit de solubilité de $Cd(OH)_2$(s).

Exercice 2 : Traitement de l'uranium

Les centrales électriques nucléaires utilisent comme source d'énergie un combustible constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235. Le combustible est obtenu par traitement d'un minerai d'uranium. Le principal minerai d'uranium est la pechblende qui contient essentiellement U_3O_8. Les premières étapes consistent, après extraction du minerai dans la mine, à un concassage puis à un broyage afin de le réduire en fine poudre (450 µm environ) avec addition d'eau.



La poudre issue du minerai subit une attaque par l'acide sulfurique en présence d'un oxydant puissant : le chlorate de sodium $NaClO_3$.

En présence d'eau, on travaillera avec les espèces U(s), U^{3+}(aq), U^{4+}(aq), ${UO_2}^{2+}$(aq), $U(OH)_4$(s) et $UO_2(OH)_2$(s).

Sur le diagramme potentiel-pH, on utilise comme convention de tracé une concentration de $1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ pour les espèces dissoutes.

Données : $E°(ClO_3{}^-/Cl^-) = 1{,}45\,\mathrm{V}$; $\mathrm{p}K_s(U(OH)_4) = 49$; $\mathrm{p}K_s(UO_2(OH)_2) = 24$

- **Q.1** Attribuer chaque domaine à une espèce de l'uranium.
- **Q.2** Calculer les équations des deux frontières verticales.
- **Q.3** Déterminer les pentes des frontières 2/6 et 1/6.
- **Q.4** En quoi le point A est-il particulier ? Écrire la réaction que subit l'espèce 2 au delà du point A.
- **Q.5** Calculer le potentiel du couple $ClO_3{}^-/Cl^-$ en fonction du pH.
- **Q.6** Sachant qu'on travaille en excès d'acide sulfurique et de chlorate de sodium, sous quelle forme trouvera-t-on l'uranium à la fin de cette étape ?
- **Q.7** Écrire l'équation bilan de la réaction de UO_2 avec $ClO_3{}^-$.

Après une série de transformations menant au fluorure UF_4, une réduction par voie sèche permet l'obtention d'uranium métallique.

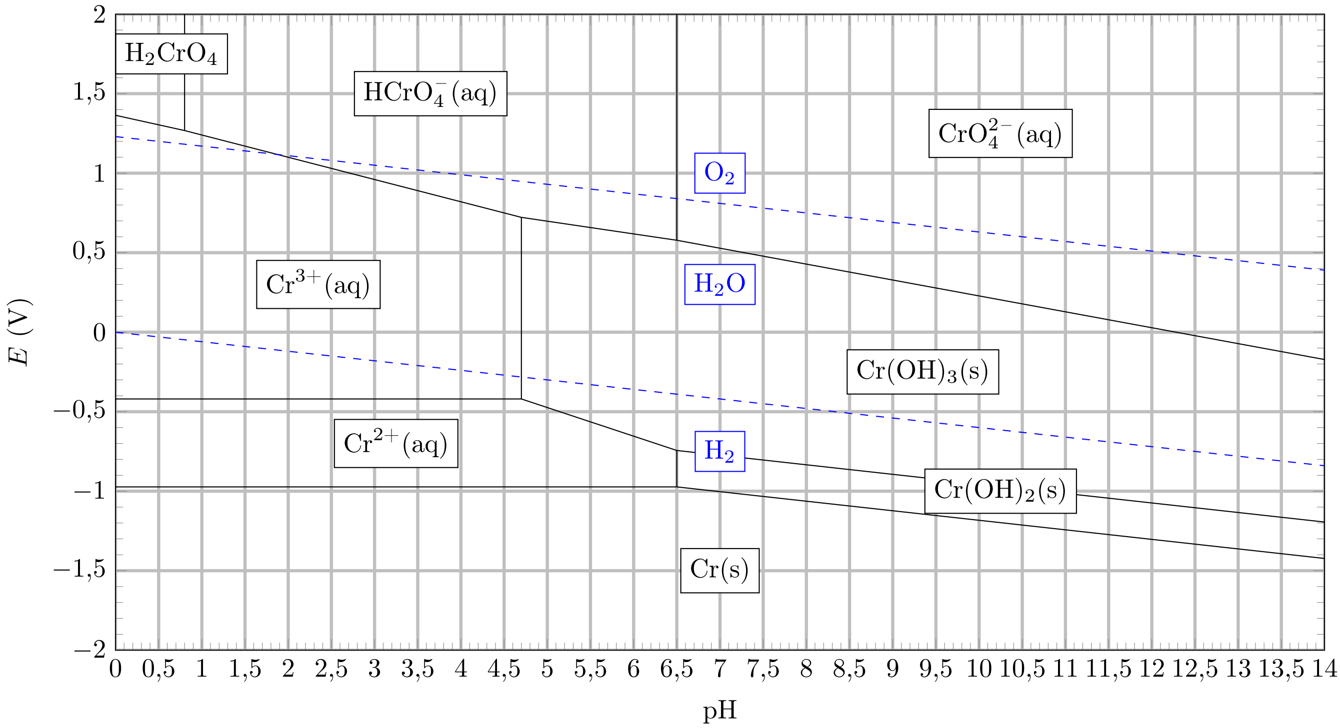
Exercice 3 : Contamination de l'eau par le chrome

Les eaux usées sont parfois contaminées par le chrome à cause de son utilisation industrielle (galvanoplastie, tannage du cuivre, etc.). Le chrome se trouve alors dans l'eau au degré d'oxydation +VI (ion chromate CrO_4^{2-}) ou +III (ion Cr^{3+}). L'ion chromate est toxique, et probablement cancérigène. On donne ci-dessous le diagramme potentiel-pH du chrome, établi avec une concentration maximale des espèces dissoutes égale à $0{,}010\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$, superposé à celui de l'eau, établi avec des pressions partielles de 1 bar.

Pour éliminer ce chrome, on utilise du sulfite de sodium Na_2SO_4.

Données :

- Potentiels standards du couple SO_4^{2-}/SO_3^{2-} : $E° = -0{,}93\,\mathrm{V}$;
- produit ionique de l'eau à 25 °C : $\mathrm{p}K_e = 14{,}0$;
- $RT\ln 10/\mathscr{F} = 0{,}059\,\mathrm{V}$.



- **Q.1** Utiliser le diagramme potentie-pH pour calculer le produit de solubilité de $Cr(OH)_3$.
- **Q.2** Exprimer le potentiel du couple SO_4^{2-}/SO_3^{2-} en fonction du pH et placer la droite sur le diagramme.
- **Q.3** Sous quelle forme le chrome se trouve-t-il en présence d'oxygène dissous dans l'eau et à pH neutre ?
- **Q.4** Comment l'ion sulfite SO_3^{2-} agit-il sur ce composé ? Écrire l'équation de la réaction et évaluer sa faisabilité thermodynamique. Dans quelle gamme de pH faut-il procéder ?
- **Q.5** Le pH de l'eau est ramené à une valeur proche de 7 après le traitement. Sous quelle forme le chrome se trouve-il ? Comment peut-il être éliminé ?