

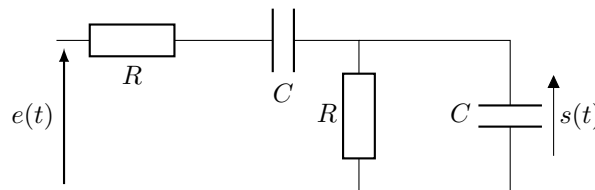
CB2 du 6/6 : Physique (4h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'aux consignes suivantes :

- Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.
- Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.
- Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).
- Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.
- La calculatrice est **autorisée**, le téléphone interdit.
- Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

Exercice 1 : Filtre de Wien

On considère le filtre suivant :



Q.1 Déterminer sans calculs la nature du filtre.

Q.2 Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est à définir. On donnera également les expressions de Q et H_0 .

Q.3 Calculer la pulsation de résonance ω_r de la tension de sortie $s(t)$. En déduire l'amplitude S_r à la résonance.

Q.4 Tracer l'allure des diagrammes de Bode du filtre en précisant les asymptotes.

Q.5 Retrouver la bande passante ainsi que les pulsations de coupure.

Q.6 La tension d'entrée est $e(t) = E_m \cos(\omega t) + E_m \cos(10\omega t) + E_m \cos(100\omega t)$. À l'aide du diagramme de Bode asymptotique, donner une estimation de la tension de sortie. On prendra $\omega = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\frac{1}{RC} = 2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 2 : Le moteur Diesel

Le moteur des locomotives diesel fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. Les premières locomotives "Diesel-mécanique" où la puissance est transmise par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse à pignons furent rapidement remplacées par des locomotives "Diesel-électrique" où le moteur diesel, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction.

On modélise le fonctionnement d'un moteur Diesel en considérant un système fermé, constitué de n moles de gaz parfait diatomique, décrivant le cycle réversible dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous.

- *Admission A_0A* : la soupape d'arrivée de l'air est ouverte, celles d'arrivée de gasoil et celle d'échappement des gaz sont fermées. La pression est $P_{\text{atm}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$ et la température $T_{\text{atm}} = 300 \text{ K}$. Le volume passe de V_{min} à $V_{\text{max}} = 57 \text{ L}$ de façon isobare.
- *Compression AB* : les soupapes sont fermées. Le volume de l'air admis passe de V_{max} à V_{min} de manière adiabatique et réversible.
- *Injection et combustion BC* : les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gasoil. Une petite quantité de gasoil est injectée et la combustion se produit. Le volume augmente jusqu'à V_C . On modélise cette phase par une évolution isobare.
- *Détente CD* : les soupapes sont toutes fermées. L'injection cesse en C et le mélange subit une détente adiabatique et réversible jusqu'à atteindre un volume V_{max} .
- *Refroidissement DA* : la soupape d'échappement est ouverte. La pression diminue brutalement jusqu'à P_{atm} , le volume restant constant.
- *Ejection AA_0* : la soupape d'échappement est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de V_{max} à V_{min} de façon isobare.

Q.1 Représenter le cycle Diesel $A_0 - A - B - C - D - A - A_0$ dans le diagramme de Watt (P, V).

- Q.2** On définit le rapport volumétrique de compression $x = V_{\max}/V_{\min} = 20$, ainsi que le rapport volumétrique de détente $y = V_{\max}/V_C = 7$. Exprimer les pressions P_B et P_D en fonction de P_{atm} , x , y et du rapport $\gamma = C_{pm}/C_{pv} = 1,4$ des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant du gaz considéré.
- Q.3** Définir le rendement thermodynamique, noté η_D , pour ce moteur et l'exprimer en fonction des températures T_A , T_B , T_C , T_D et du rapport γ .
- Q.4** Exprimer η_D en fonction de x , y et γ puis faire l'application numérique en utilisant les données. En réalité, le rendement observé est de l'ordre de 0,45. Commenter.
- Q.5** Une locomotive à moteur Diesel roule à la vitesse constante $v = 140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Le moteur tourne à la vitesse angulaire, elle aussi constante, de $2000 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$, un tour correspondant à un cycle du moteur. Calculer la puissance mécanique moyenne du moteur de la locomotive (en utilisant la valeur du rendement observé) ainsi que sa consommation en gasoil pour 100 km. On donne l'enthalpie massique de combustion du gasoil $\Delta_{\text{comb}}h = 46,8 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Exercice 3 : Étude du mouvement d'un satellite

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans (**figure 1**).

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0,1) \text{ mm} \cdot \text{an}^{-1}$ durant ces trente dernières années.

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T .

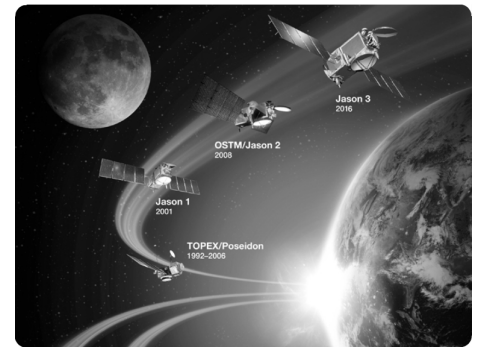


Figure 1 - Satellites altimétriques lancés depuis 1992. Vue d'artiste. Crédit : CNES

Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_T$) considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

- Q.1** Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.
- Q.2** Rappeler l'expression $\vec{F}_g$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m .
- Q.3** Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel ($\mathcal{R}_T$) le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ soit aligné avec $\vec{u}_z$. On proposera $\vec{\mathcal{L}}_O = \mathcal{L}_O \vec{u}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ) , de centre O , pour décrire le mouvement du mobile (**figure 2**).

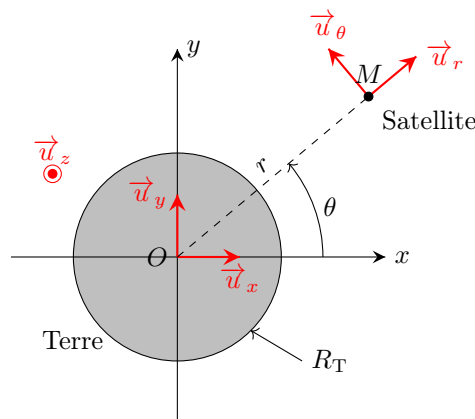


Figure 2 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

- Q.4** Rappeler la relation entre la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile et son énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

Q.5 Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé *énergie potentielle effective*, que l'on exprimera en fonction de G , m , M_T , $\mathcal{L}_O$ et de r .

Q.6 Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

Q.7 Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_O$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r . Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié.

On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

Q.8 Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R . Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m , assimilable à un point matériel.

Q.9 Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G , M_T , m et de R .

Q.10 Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire.

Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetièr », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré **figure 3**, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est située sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périégée P est sur l'orbite cimetièr (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

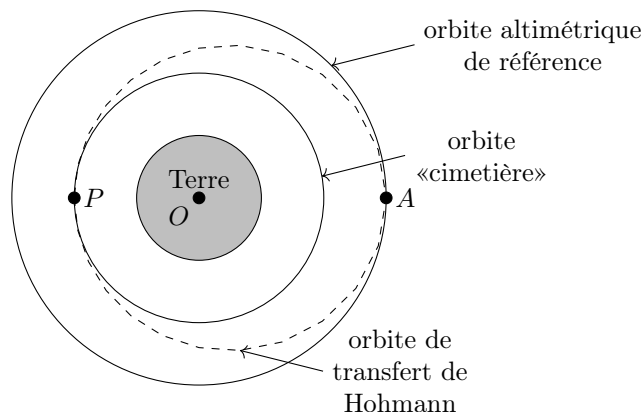


Figure 3 - Ellipse de transfert

Q.11 En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}$$

Q.12 Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Q.13 En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetièr.

Exercice 4 : Chute d'arbres

Chute d'un arbre mort

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la **figure 4(a)**.

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = l$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe $(O, \vec{u}_y)$ dirigé par le vecteur $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1 \vec{u}_x + N_1 \vec{u}_z$ appliquée au point O et satisfaisant aux lois de COULOMB avec un coefficient de frottement f . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2 \vec{u}_x + N_2 \vec{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de COULOMB avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1 , N_1 , T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note $\vec{F}$ la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble et F sa norme.

Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de $(O, \vec{u}_y)$ et on note α l'angle (positif) entre $\vec{BO}$ et $\vec{BC}$.

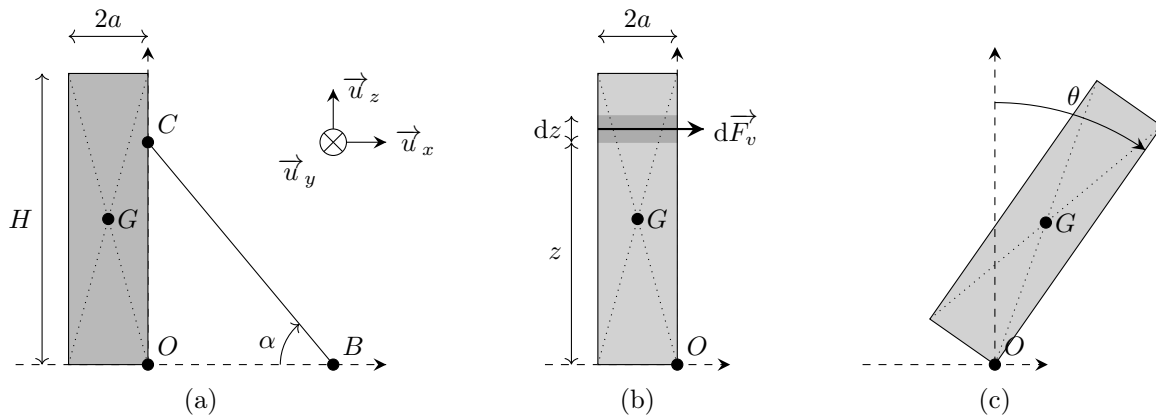


Figure 4 - Chute d'un arbre

- Q.1** Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_y)$ dans la situation initiale décrite par la figure 4(a).
- Q.2** Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g . En déduire l'expression de la valeur maximale $F_{\max}$ de F en fonction de f , m , g et α .
- Q.3** L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O .
- Q.4** Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_y)$ exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe $(O, \vec{u}_y)$?
- Q.5** En supposant F constant, justifier (avec ou sans calculs, mais rigoureusement) qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α .

On suppose que, quelque soit l'angle α , l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement : F prend alors la valeur $F_{\max}$.

- Q.6** Montrer que le moment Γ_B par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_y)$ exercé par le bûcheron via le câble s'écrit :

$$\Gamma_B = \frac{mgl}{\phi(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

En déduire l'expression de α_m en fonction de f . Vérifier que $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$ pour $f = 1$.

- Q.7** On donne $M = 1 \times 10^3$ kg, $H = 20$ m, $a = 0,5$ m, $m = 1 \times 10^2$ kg et $f = 1$. Calculer la force $F_{\max}$ et la longueur de corde l nécessaires pour initier la rotation de l'arbre. Commenter.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_y)$, repérée par l'angle θ que fait $\vec{OC}$ avec $(O, \vec{u}_z)$.

- Q.8** Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p$ de l'arbre en fonction de M , g , H , a et θ . Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. À partir de quel angle θ_s peut-il lâcher le câble ?

Chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur H , sous l'effet d'un coup de vent violent. On néglige le rôle du poids de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent. On prendra dans cette section $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- Q.9** Proposer un ordre de grandeur de la vitesse U pour un vent violent. Par une analyse dimensionnelle, justifier qu'il convient de décrire l'action d'un vent soufflant dans la direction $\vec{u}_x$ sur une tranche d'arbre supposé vertical à ce stade) comprise entre z et $z + dz$, figure 4(b) par une force élémentaire de la forme $d\vec{F}_v = 2aC_x\rho_a U^2 dz \vec{u}_x$ où ρ_a est la masse volumique de l'air et C_x un coefficient aérodynamique sans dimension.
- Q.10** L'arbre étant vertical, exprimer le moment total Γ_v des actions du vent par rapport à l'axe $\vec{u}_y$ en fonction de C_x , ρ_a , a , H et U .
- Q.11** Lorsque l'arbre commence à pencher, on repère son mouvement par l'angle θ représenté sur la figure 4(c). Le moment Γ_v varie en fonction de θ et on constate que $\Gamma_v(\theta)$ est proportionnel à $(\cos(\theta))^n$ avec n entier. Proposer une valeur de l'entier n en justifiant votre réponse.

Dans toute la suite, on omet la dépendance de Γ_v en θ car celui-ci reste inférieur à 10° . L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant Γ_r par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_y)$, qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc. Des essais de traction via un câble comme dans la partie précédente ont permis de relever les variations de Γ_r (en $1 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$) en fonction de θ (en degrés) de la figure 5 dans le domaine $\theta > 0$ auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de $\theta = 0$ que l'on modélise par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$. Par ailleurs, au-delà d'un certain angle θ_c , l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que $\Gamma_r = 0$.

Dans le domaine $0 < \theta \leq \theta_c$, on modélise les mesures expérimentales de Γ_r par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left(\beta + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 < 0 \quad (2)$$

- Q.12** Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres θ_c et β afin qu'il rende compte des mesures de la figure 5. Exprimer l'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale et la valeur Γ_m de ce minimum. Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de θ_m/θ_c et Γ_m/Γ_0 issues du modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à une barre mince en rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_y)$ avec un moment d'inertie J , soumis au moment constant Γ_v et au moment $\Gamma_r(\theta)$ décrit par le modèle de l'équation (2). Initialement l'arbre est au repos en $\theta = 0$ en présence d'un vent de vitesse U indépendante du temps et on s'interroge sur son évolution.

On définit le paramètre $p = \Gamma_v/|\Gamma_0|$ et dans la suite on négligera l'action du poids sur la stabilité de l'arbre.

- Q.13** Discuter *graphiquement* selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Cet équilibre est-il stable ? Discuter *graphiquement* selon la valeur de p l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en $\theta_e \neq 0$. Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à θ_c , expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

- Q.14** Montrer que la vitesse angulaire de l'arbre se met sous la forme $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = |\Gamma_0|\theta P(u)$ où $P(u)$ est un trinôme du second degré pour la variable réduite $u = \theta/\theta_c$ que l'on explicitera en fonction de l'unique paramètre $p = \Gamma_v/|\Gamma_0|$. En déduire, en précisant soigneusement le raisonnement adopté, la valeur minimale p_c de p permettant au vent de déraciner l'arbre. Calculer la vitesse minimale U_c du vent permettant de déraciner l'arbre correspondant au graphe de la figure 5 sachant que $H = 20 \text{ m}$ et $a = 0,5 \text{ m}$. On prendra $C_x = 0,5$.

On se place désormais dans le cas $p = \frac{4}{3}$.

- Q.15** Déterminer les bornes du mouvement de l'arbre. En réalité l'arbre finit par atteindre une position θ_∞ où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

Formulaire

Lois de Coulomb : Un solide en contact quasi-pontuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force $\vec{F}$ que l'on peut décomposer en une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$. En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement.

En présence de glissement, la composante tangentielle $\vec{T}$ est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

... FIN ...

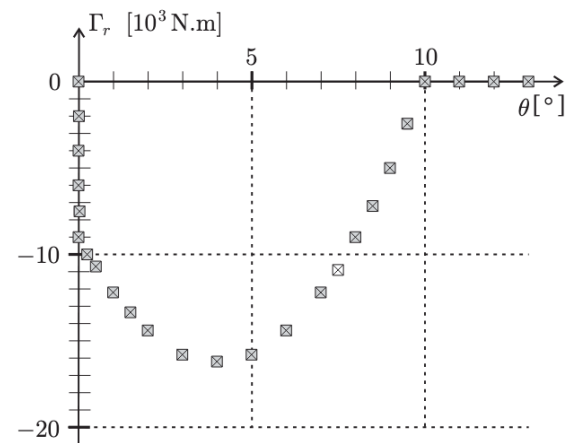


Figure 5 - Mesures du moment résistant. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.