DS1 du 14/9 : Physique-chimie (2h)

Solution de l'exercice 1 : Alimentation d'une locomotive

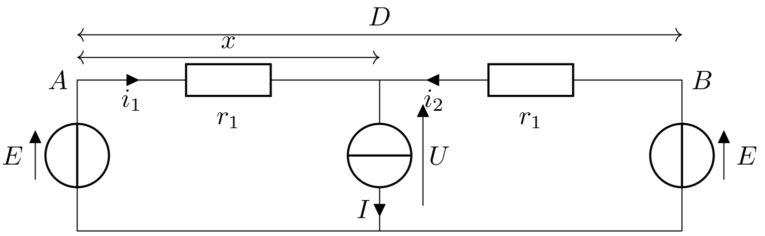
Q.1 Soit $\boxed{r_1 = \rho \times x}$

Q.2 Loi des mailles : $E = r_1 I + U \Longrightarrow \boxed{U = E - r_1 I}$ soit $\boxed{U = E - \rho I x}$

Q.3 $\Delta U = E - U = \rho I x$, strictement croissante sur $x \in [0, D]$ donc $\boxed{x_m = D}$ et $\boxed{\Delta U_{\max} = \rho D I}$

Q.4 AN : $D_{\max 1} = 1\,\text{km}$ ce qui donne une ligne de train relativement courte, à peine de quoi aller à la plage depuis le lycée Jean Bart.

Q.5 Soit le circuit équivalent avec $\boxed{r_1 = \rho \times x}$ et $\boxed{r_2 = \rho \times (D - x)}$:



Q.6 Loi des mailles : $E = r_1 i_1 + U$ et $E = r_2 i_2 + U \Longrightarrow r_1 i_1 = r_2 i_2$.

Loi des nœuds : $I = i_1 + i_2 \quad \Longrightarrow \boxed{i_1 = \dfrac{r_2}{r_1 + r_2} I}$ soit $\boxed{i_1 = \left(1 - \dfrac{x}{D}\right) I}$

Q.7 On obtient alors : $\quad U = E - r_1 i_1$ soit $\boxed{U = E - \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} I}$ et donc $\boxed{U = E - \rho \times \dfrac{x}{D} \times \left(1 - \dfrac{x}{D}\right) I}$

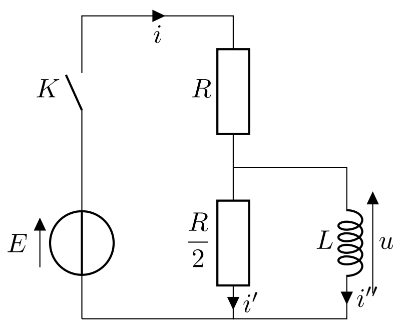
Q.8 La surtension $\boxed{\Delta U = \rho \times \dfrac{x}{D} \times \left(1 - \dfrac{x}{D}\right) I}$. On cherche x_m tel que $\Delta U(x_m) = \Delta U_{\max}$, on dérive alors :

$$\frac{\mathrm{d}\Delta U}{\mathrm{d}x} = \rho \left(1 - \frac{2x}{D}\right) \Longrightarrow \boxed{x_m = \frac{D}{2}} \Longrightarrow \boxed{\Delta U_{\max} = \frac{\rho D I}{4}}$$

Q.9 AN : $D_{\max 2} = 4 D_{\max 1} = 4\,\text{km}$

Solution de l'exercice 2 : Charge d'une bobine

Q.1 Soit le circuit suivant :



À $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Le circuit était ouvert depuis longtemps donc on a $i"(t = 0^-) = 0$, par continuité du courant dans la bobine on a :

$$\boxed{i"(t = 0^+) = 0}$$

D'après la loi des nœuds on a : $i(t = 0^+) = i'(t = 0^+)$
En appliquant la loi des mailles on obtient : $E = Ri(t = 0^+) + \frac{R}{2} i'(t = 0^+)$

$$\boxed{i(t = 0^+) = i'(t = 0^+) = \frac{2E}{3R}}$$

En utilisant la loi d'Ohm on obtient : $u(t = 0^+) = \frac{R}{2} i'(t = 0^+)$

$$\boxed{u(t = 0^+) = \frac{E}{3}}$$

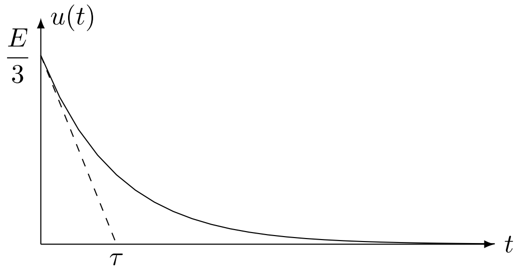
Q.2 En régime permanent on a directement $u_\infty = L \dfrac{\mathrm{d}i"_\infty}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \boxed{u_\infty = 0}$.

Q.3 Soit $E = Ri(t) + u(t) \Longrightarrow 0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. et $i(t) = i'(t) + i"(t) \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}i"}{\mathrm{d}t}$

avec $\dfrac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{R}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i"}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} \Longrightarrow 2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}u + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}u = 0}$$

Q.4 Soit $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{3L}{R}$, à $t = 0^+$: $u(t=0^+) = \dfrac{E}{3} = A \Longrightarrow \boxed{u(t) = \dfrac{E}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

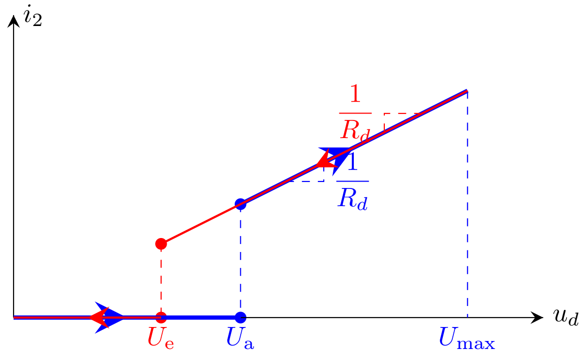


Q.5 $u(t=t_0) = \dfrac{u(t=0^+)}{10} \Longrightarrow e^{-\frac{t_0}{\tau}} = \dfrac{1}{10} \Longrightarrow \boxed{t_0 = \tau \ln 10}$

Q.6 $\boxed{L = \dfrac{t_0 R}{3 \ln 10}}$ AN : $\underline{L = 4{,}3\,\text{mH}}$

Solution de l'exercice 3 : Lampe témoin

Q.1 Soit la caractéristique :



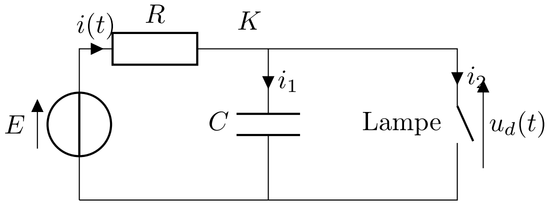
Lors de la charge en bleu :

- $i_d = 0$ pour $u_d < U_a$ (interrupteur ouvert);
- $i_d = \dfrac{u_d}{R_d}$ pour $u_d > U_a$ (résistance R_d);

Lors de la décharge en rouge :

- $i_d = \dfrac{u_d}{R_d}$ pour $u_d > U_e$ (résistance R_d);
- $i_d = 0$ pour $u_d < U_e$ (interrupteur ouvert);

Q.2 Soit le schéma pour $t < T_a$:



On applique alors la loi des mailles : $E = Ri(t) + u_d(t)$

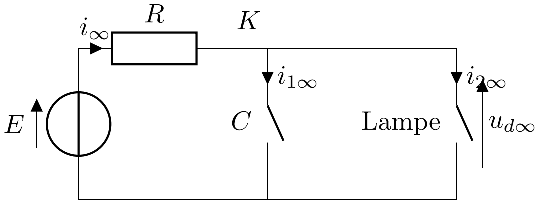
Comme $i_2(t) = 0$ pour $t < T_a$ on a avec la loi des nœuds :

$$i(t) = i_1(t) + \cancel{i_2(t)} \qquad \text{soit} \qquad i(t) = i_1(t)$$

d'où $E = Ri_1(t) + u_d(t)$ or $i_1(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow E = RC\dfrac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}t} + u_d$ sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}t} + \frac{u_d}{RC} = \frac{E}{RC}} \qquad \boxed{\tau = RC}$$

Q.3 On dessine le schéma circuit équivalent en régime permanent :



On a : $\boxed{i_{1\infty} = i_{2\infty} = 0} \Longrightarrow \boxed{i_\infty = 0}$

et la loi des mailles donne : $E = R\cancel{i_\infty} + u_{d\infty}$

$$\boxed{u_{d\infty} = E}$$

La lampe s'allume ssi : $\boxed{E > U_a}$

On cherche ensuite l'instant T_a pour lequel $u_d(T_a) = U_a$. Soit $u_d(t) = u_{dh}(t) + u_{dp}(t)$

avec $u_{dh}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ et $u_{dp}(t) = C^{te}$: $\dfrac{\mathrm{d}u_{dp}}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow u_{dp} = E$

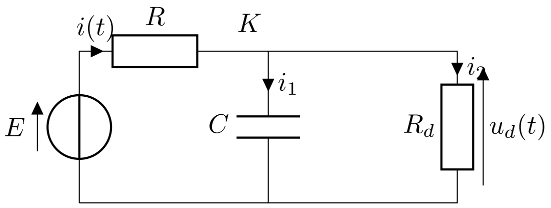
CI : $u_d(0^+) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé donc $A + E = 0 \Longrightarrow A = -E$

$$u_d(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Soit $u_d(T_{\mathrm{a}}) = U_{\mathrm{a}} \iff E\left(1 - e^{-\frac{T_{\mathrm{a}}}{\tau}}\right) = U_{\mathrm{a}}$

$$\iff \frac{E - U_{\mathrm{a}}}{E} = e^{-\frac{T_{\mathrm{a}}}{\tau}} \quad \iff \quad \boxed{T_{\mathrm{a}} = \tau \ln\left(\frac{E}{E - U_{\mathrm{a}}}\right)}$$

Q.4 Pour $t > T_{\mathrm{a}}$ on a le schéma suivant :



Loi d'Ohm : $u_d(T_{\mathrm{a}}^+) = R_d i_2(T_{\mathrm{a}}^+)$

$$\implies \boxed{i_2(T_{\mathrm{a}}^+ = \frac{U_{\mathrm{a}}}{R_d}}$$

Loi des mailles : $E = Ri(T_{\mathrm{a}}^+) + u_d(T_{\mathrm{a}}^+)$

$$i(T_{\mathrm{a}}^+) = \frac{E - U_{\mathrm{a}}}{R}$$

Par continuité on a : $\boxed{u_d(T_{\mathrm{a}}^+) = U_{\mathrm{a}}}$

Loi des nœuds : $i(T_{\mathrm{a}}^+) = i_1(T_{\mathrm{a}}^+) + i_2(T_{\mathrm{a}}^+) \quad \implies \boxed{i_1(T_{\mathrm{a}}^+) = \frac{E - U_{\mathrm{a}}}{R} - \frac{U_{\mathrm{a}}}{R_d}}$

Q.5 Soit le schéma ci-dessus, on applique alors la loi des mailles : $E = Ri(t) + u_d(t)$ avec la loi des nœuds : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ avec $i_2(t) = \dfrac{u_d(t)}{R_d}$ et $i_1(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}t} \implies E = RC\dfrac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{R_d}u_d(t) + u_d(t)$ sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}t} + \frac{R + R_d}{RR_dC}u_d(t) = \frac{E}{RC}} \qquad \boxed{\tau_e = \frac{RR_dC}{R + R_d}}$$

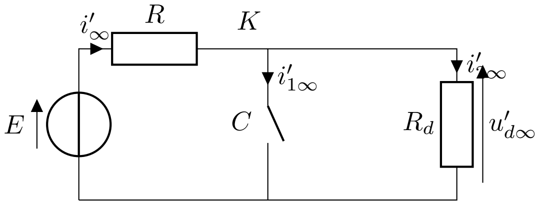
On cherche donc $u_d(t)$ pour $t > T_{\mathrm{a}}$: $u_d(t) = u_{dh}(t) + u_{dp}(t)$

avec $u_{dh}(t) = Be^{-\frac{t}{\tau_e}}$ et $u_{dp}(t) = C^{te} \implies \dfrac{\mathrm{d}u_{dp}}{\mathrm{d}t} = 0 \implies u_{dp} = \dfrac{R_dE}{R + R_d}$

CI : $u_d(T_{\mathrm{a}}^+) = U_{\mathrm{a}}$ soit $Be^{-\frac{T_{\mathrm{a}}}{\tau}} + \dfrac{R_dE}{R + R_d} = U_{\mathrm{a}} \quad \implies B = \left(U_{\mathrm{a}} - \dfrac{R_dE}{R + R_d}\right)e^{\frac{T_{\mathrm{a}}}{\tau_e}}$

$$\boxed{u_d(t) = \left(U_{\mathrm{a}} - \frac{R_dE}{R + R_d}\right)e^{\frac{T_a - t}{\tau_e}} + \frac{R_dE}{R + R_d}}$$

Q.6 On dessine le schéma circuit équivalent en régime permanent :



loi des nœuds : $i'_\infty = \cancel{i'_{1\infty}} + i'_{2\infty} \implies i'_\infty = i'_{2\infty}$
et la loi des mailles donne : $E = Ri'_\infty + R_di'_{2\infty}$

$$\boxed{i'_{2\infty} = \frac{E}{R_d + R}} \qquad \implies \boxed{u'_{d\infty} = \frac{R_dE}{R + R_d}}$$

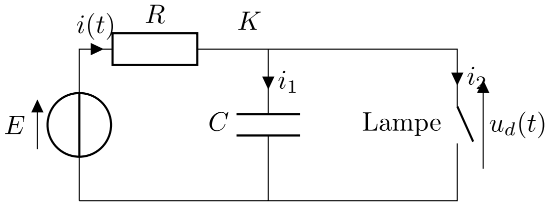
On a : $\boxed{i'_{1\infty} = 0}$

La lampe s'éteint ssi : $\boxed{\dfrac{R_dE}{R + R_d} < U_{\mathrm{e}}}$

On cherche ensuite l'instant T_{e} pour lequel $u_d(T_{\mathrm{e}}) = U_{\mathrm{e}}$:

$$\left(U_{\mathrm{a}} - \frac{R_dE}{R + R_d}\right)e^{\frac{T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{e}}}{\tau_e}} + \frac{R_dE}{R + R_d} = U_{\mathrm{e}} \iff \frac{U_{\mathrm{a}} - \dfrac{R_dE}{R + R_d}}{U_{\mathrm{e}} - \dfrac{R_dE}{R + R_d}} = e^{-\frac{T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{a}}}{\tau_e}} \iff \boxed{T_{\mathrm{e}} = T_{\mathrm{a}} + \tau_e \ln\left(\frac{U_{\mathrm{e}} - \dfrac{R_dE}{R + R_d}}{U_{\mathrm{a}} - \dfrac{R_dE}{R + R_d}}\right)}$$

Q.7 Pour chercher ΔT la période du processus, on doit d'abord chercher l'instant du second allumage $T_{\mathrm{a}2}$ après la première extinction. On considère alors que le condensateur est chargé à la tension U_{e} à $t = 0$ et on reprend le premier schéma :



on a trouvé : $u_d(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + E$

CI : $u_d(0^+) = U_{\mathrm{e}} \quad C + E = U_{\mathrm{e}} \implies C = U_{\mathrm{e}} - E$

et $u_d(t) = (U_{\mathrm{e}} - E)e^{-\frac{t}{\tau}} + E$

On cherche alors T_{a2} : $u_d(T_{\mathrm{a2}}) = U_{\mathrm{a}} \quad \Longrightarrow (U_{\mathrm{e}} - E)e^{-\frac{T_{\mathrm{a2}}}{\tau}} + E = U_{\mathrm{a}}$

$$\frac{E - U_{\mathrm{a}}}{E - U_{\mathrm{e}}} = e^{-\frac{T_{\mathrm{a2}}}{\tau}} \quad \Longleftrightarrow \quad T_{\mathrm{a2}} = \tau \ln\left(\frac{E - U_{\mathrm{e}}}{E - U_{\mathrm{a}}}\right)$$

On a alors $\Delta T = T_{\mathrm{e}} + T_{\mathrm{a2}} - T_{\mathrm{a}}$:

$$\Delta T = \tau_e \ln\left(\frac{U_{\mathrm{e}} - \dfrac{R_d E}{R + R_d}}{U_{\mathrm{a}} - \dfrac{R_d E}{R + R_d}}\right) + \tau \ln\left(\frac{E - U_{\mathrm{e}}}{E - U_{\mathrm{a}}}\right)$$

· · · FIN · · ·