

# Cours de Ondes MPSI 2024-2025

Quentin Roveillo

3 novembre 2024



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Lois de l'optique géométrique</b>	<b>3</b>
1	Sources lumineuses . . . . .	3
2	Modèle de l'optique géométrique . . . . .	4
3	Changement de milieu . . . . .	5
4	Notion d'objet et d'image : . . . . .	6
5	La fibre à saut d'indice . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Formation des images</b>	<b>9</b>
1	Notion d'objet et d'image : . . . . .	9
2	Les lentilles minces . . . . .	9
3	L'œil . . . . .	12
4	L'appareil photo . . . . .	13
5	Instrument afocal : . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Propagation d'un signal</b>	<b>15</b>
1	Notion d'onde . . . . .	15
2	Ondes progressives harmoniques : . . . . .	16
3	Phénomène d'interférences . . . . .	17
4	Interférences lumineuses . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Introduction à la mécanique quantique :</b>	<b>21</b>
1	Introduction : . . . . .	21
2	Dualité onde-particule : . . . . .	21
3	Formalisme quantique . . . . .	23
4	Quantification de l'énergie . . . . .	25

# Ondes 1 : Lois de l'optique géométrique

## 1 Sources lumineuses

### Definition : Onde monochromatique

Une onde monochromatique est une onde sinusoïdale de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . L'onde se propage à la célérité  $v$  dans un milieu, avec la relation :

$$\lambda\nu = v \quad \text{avec} \quad v \leq c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ maximum dans le vide}$$

La lumière se propage dans ce milieu à la vitesse  $v$  et on définit l'indice optique  $n$  d'un milieu :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

On définit alors la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  et on relie la longueur d'onde  $\lambda$  dans le milieu à la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Chaque longueur d'onde dans le vide est associée à une couleur du domaine visible :

$\lambda_0$ (nm)	< 400	500	550	590	630	> 750
$\nu$ (Hz)	$> 7,5 \times 10^{14}$	$6 \times 10^{14}$	$5,5 \times 10^{14}$	$5,1 \times 10^{14}$	$4,8 \times 10^{14}$	$< 4,0 \times 10^{14}$
Couleur	ultra violet	bleu	vert	jaune orangé	rouge	infra rouge

On appelle milieu dispersif un milieu dont l'indice optique dépend de la longueur d'onde. On peut appliquer la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

On appelle milieu non dispersif un milieu dont l'indice optique ne dépend pas de la longueur d'onde ( $n = C^{te}$ ).

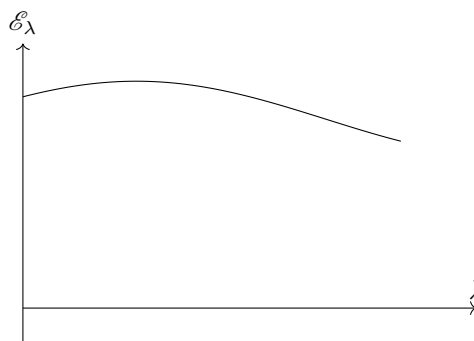
### Definition : Spectre de la lumière

On définit le spectre lumineux d'une source de lumière non-monochromatique comme la courbe qui donne l'éclairement  $\mathcal{E}_\lambda$  en fonction de  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide.

### Propriété : Lampe à incandescence

On appelle lumière blanche une lumière composée d'un large gamme de longueur d'onde (dans le visible). Son spectre lumineux est alors continu et étalé sur toutes les fréquences visibles ( $4 \times 10^{14}$  Hz à  $8 \times 10^{14}$  Hz).

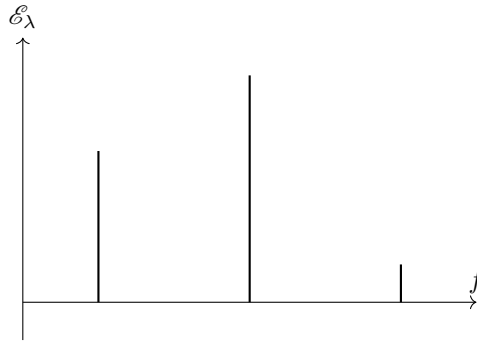
Une lumière blanche est une lumière dont le spectre est continu et contient toutes les longueurs d'onde du domaine visible.



C'est le cas de la lumière du Soleil, ainsi que de toutes les lampes thermiques qui émettent de la lumière en chauffant un corps chaud à haute température.

### Propriété : Lampes spectrales

Une lampe spectrale est une lampe dont la lumière est émise par un élément sous forme de vapeur dans laquelle une décharge électrique est produite. La décharge électrique fait passer les atomes dans un état excité qui produit des photons en passant dans un état d'excitations inférieur.



Une lampe spectrale émet une série de longueurs d'onde caractéristique de l'élément qu'elle contient. Le spectre est constitué de pics fin appelés raies spectrales. Chaque raie représente une vibration quasi-monochromatique.

**Propriété : Source ponctuelle monochromatique**

Une source ponctuelle  $S$  est une source de dimensions infiniment petites, assimilable à un point. Elle émet de la lumière dans toutes les directions.

Une source ponctuelle et monochromatique est une source ponctuelle émettant une onde lumineuse monochromatique.

## 2 Modèle de l'optique géométrique

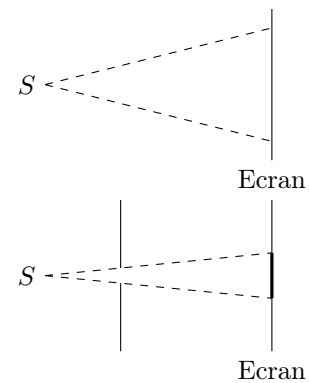
**Propriété : Notion expérimentale de rayon**

La zone lumineuse issue d'une source primaire  $S$  est située à l'intérieur d'un cône qu'on appelle faisceau lumineux.

Si on intercale sur la trajectoire de la lumière un écran percé d'un trou on restreint l'ouverture de la zone éclairée. On a alors une tache lumineuse réduite. Si on réduit la taille du trou, la tache lumineuse diminue également.

Lorsque le trou est trop petit, la tache lumineuse s'élargit de nouveau, on assiste alors à la diffraction du faisceau lumineux.

On définit alors un rayon lumineux comme la trajectoire parcourue par une onde lumineuse lors de sa propagation.



**Définition : Approximation de l'optique géométrique**

Les lois de l'optique géométrique étudiées dans la suite sont valables tant que les instruments utilisés sont de grande taille par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière.

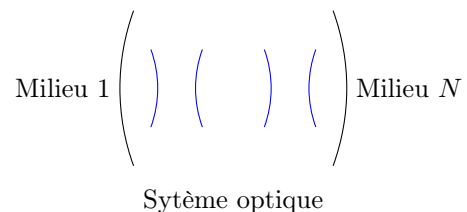
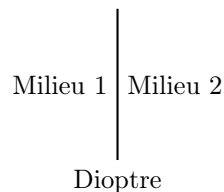
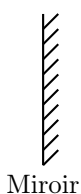
**Définition : Milieu homogène, isotrope et transparent**

On étudiera toujours le trajet des rayons dans des milieux d'indice  $n$  :

- homogène :  $n = C^{te} \quad \forall M \in \text{milieu}$  ;
- isotrope :  $n_x = n_y = n_z = n$  ;
- transparent : permet la propagation de la lumière.

**Vocabulaire :**

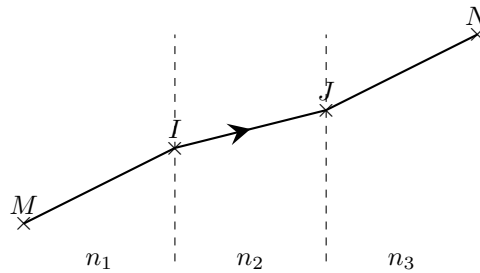
- Un **dioptré** comme la surface séparant deux milieux homogènes d'indices différents.
- Un **miroir** comme une surface réfléchissant la lumière.
- Un **Système optique** comme un ensemble de milieux transparent, homogène et isotopes séparés par des dioptrés ou des miroirs.



**Propriété : Propagation rectiligne de la lumière**

On considère un milieu homogène, isotrope et transparent, la lumière se propage alors de manière rectiligne et les rayons lumineux sont des droites.

Dans une suite de milieu homogènes et isotropes. Le trajet d'un rayon lumineux sera formé d'une succession de segment de droite.

**Propriété : Retour inverse de la lumière**

La trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas du sens de parcours. La lumière parcourt la même trajectoire pour aller de A vers B que pour aller de B vers A.

**Propriété : Indépendance des rayons lumineux**

Les rayons lumineux issus des sources  $S_1$  et  $S_2$  sont la somme des rayons issus de  $S_1$  et des rayons issus de  $S_2$ . On reste dans le cas où les deux ondes lumineuses n'interfèrent pas.

### 3 Changement de milieu

**Remarque : Observation**

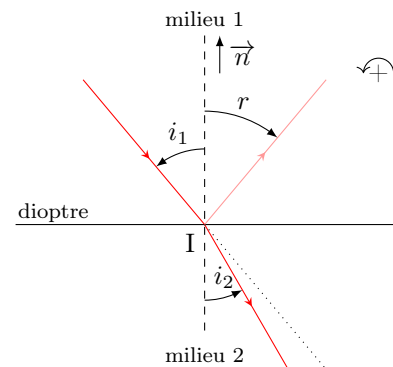
Lorsqu'un **rayon incident** arrive sur un dioptre on observe deux rayons :

- un **rayon réfléchi** qui reste dans le milieu 1 ;
- un **rayon réfracté** qui traverse le dioptre en subissant une déviation ;

**Definition : Paramétrage géométrique**

**Vocabulaire :**

- $I$  : point d'incidence ;
- $\vec{n}$  : normale à la surface du dioptre ;
- $\mathcal{P}$  : plan d'incidence contenant  $I$ ,  $\vec{n}$  et le rayon incident ;
- $i_1$  : angle d'incidence ;
- $i_2$  : angle réfracté ;
- $r$  : angle réfléchi ;
- $D_{\text{refra}} = i_2 - i_1$  déviation du rayon lors de la réfraction ;
- $D_{\text{refle}} = \pi - i_1 + r$  déviation du rayon lors de la réflexion.



Attention, les angles ici sont orientés, c'est-à-dire qu'il y a un sens de rotation arbitrairement pris comme positif, il faut indiquer ce sens par un petit symbole  $\curvearrowright$ .

**Lois de Snell-Descartes**

- **Première loi** : Les rayons réfléchi et réfracté sont situés dans le plan d'incidence.
- **Deuxième loi** : L'angle réfléchi et l'angle d'incidence sont liés

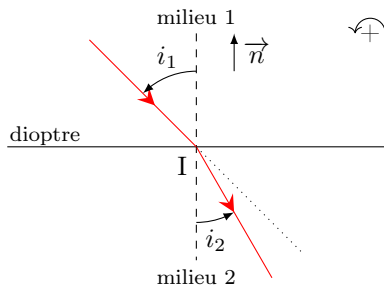
$$i_1 = -r$$

- **Troisième loi** : L'angle réfracté et l'angle d'incidence sont liés

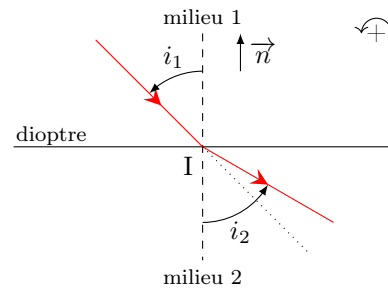
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

**Remarque : Deux situations possibles de réfraction**

Soit on a la situation où  $n_2 > n_1$  dans ce cas on dit que le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1.



Soit on a la situation où  $n_2 < n_1$  dans ce cas on dit que le milieu 2 est moins réfringent que le milieu 1.

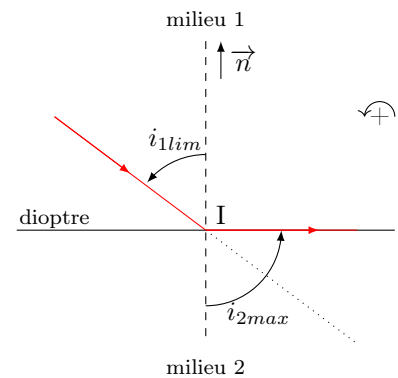


**Propriété : Réflexion totale**

Si  $n_1 > n_2$  alors d'après la deuxième loi de Descartes on a  $i_2 > i_1$ . Si on augmente l'angle d'incidence jusqu'à une valeur limite  $i_1 = i_{1lim}$ , on obtient alors l'angle réfracté à la valeur maximale  $i_2 = i_{2max} = \frac{\pi}{2}$ . La loi de Descartes nous donne alors :

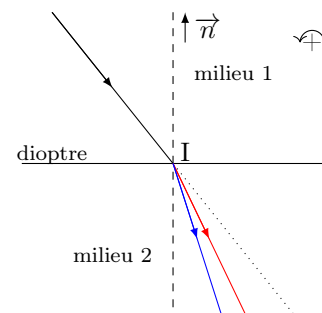
$$n_1 \sin i_{1lim} = n_2 \sin i_{2max} \implies i_{1lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

La totalité de l'énergie est alors réfléchi, il ne reste que le rayon réfléchi. On parle alors de réflexion totale.



**Propriété : Dispersion de la lumière**

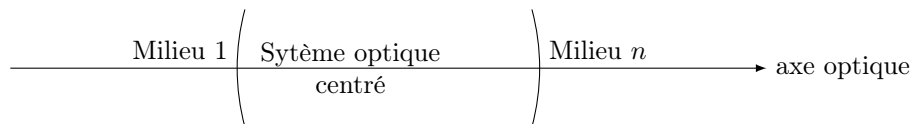
Si le milieu 2 est dispersif alors  $n_2 = n_2(\lambda_0)$  et chaque couleur aura son propre indice optique. D'après la loi de Descartes, chaque couleur aura donc un angle réfracté  $i_2 = i_2(\lambda_0)$  différent. D'après la loi de Cauchy, plus la longueur d'onde dans le vide est grande, plus l'indice optique est faible, plus l'angle réfracté est grand. On a donc le rayon rouge de grande longueur d'onde qui est moins dévié que le rayon bleu.



**4 Notion d'objet et d'image :**

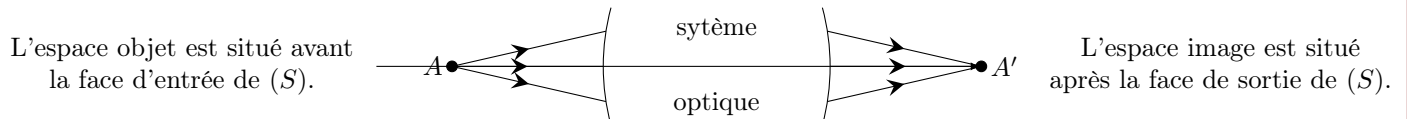
**Definition : Axe optique**

Si tous les composants d'un système optique ont un axe de symétrie en commun, système est dit **centré**. L'axe de symétrie est alors appelé **axe optique**.



**Definition : Image/Objet**

On considère une source ponctuelle  $A$ , si tous les rayons issus de  $A$  convergent en  $A'$  après avoir traversé  $(S)$ , on dit que  $A'$  est l'image de  $A$  à travers  $(S)$ . Les points  $A$  et  $A'$  sont conjugués par le système.

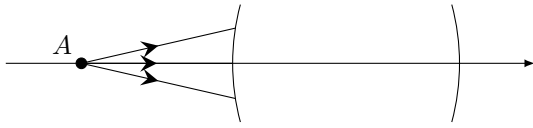


Pour voir un point image, il faut utiliser un écran à la position de l'image qui va diffuser les rayons dans toutes les directions.

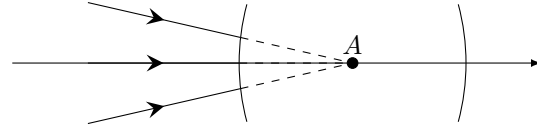
**Propriété : Objet réel/virtuel**

Si le faisceau entrant dans un système optique ( $S$ ) est divergent depuis un point  $A$  situé dans l'espace objet. Alors  $A$  est un objet réel, sinon c'est un objet virtuel.

Objet réel



Objet virtuel



Les rayons après le premier dioptrés sont déviés, on trace donc leurs prolongements en pointillés.

**Propriété : Image réelle/virtuelle**

Si le faisceau sortant d'un système optique est convergent vers un point  $A'$  situé dans l'espace image. Alors  $A'$  est une image réelle, sinon c'est une image virtuelle.

Image réelle

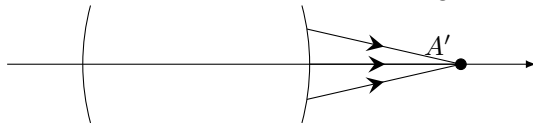
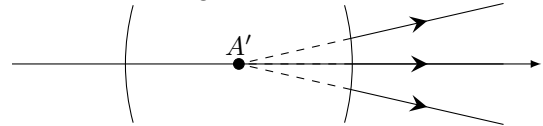


Image virtuelle



On ne peut pas projeter une image virtuelle sur un écran, mais on peut la voir avec notre œil (voir fin du chapitre).

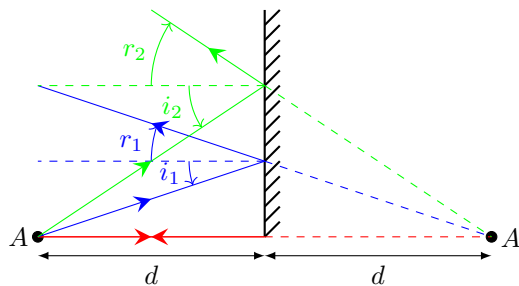
**Propriété : Objet/Image à l'infini**

Un objet situé à l'infini émet des rayons qui sont parallèle entre eux.

Une image située à l'infini est formée à partir de rayons parallèles entre eux.

**Propriété : Image à travers un miroir**

On considère un objet réel  $A$  situé à une distance  $d$  d'un miroir plan. L'objet  $A$  est considéré comme une source ponctuelle de lumière :



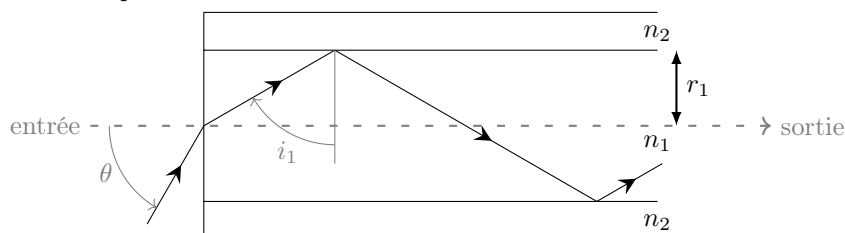
Le faisceau de rayon réfléchi est divergent. Le miroir produit donc une **image virtuelle** située à l'intersection du prolongement des rayons réfléchis.

D'après la loi de Snell-Descartes de la réflexion, l'image virtuelle  $A'$  est le symétrique de l'objet réel  $A$  par rapport au plan du miroir.

## 5 La fibre à saut d'indice

**Definition : Présentation**

La fibre à saut d'indice est constituée d'une cœur cylindrique transparent de rayon  $r_1$  et d'indice  $n_1$  entouré par une gaine coaxiale également transparente, de rayon  $r_2$  et d'indice  $n_2$ . Le but de la fibre optique est de guider les rayons lumineux tout en minimisant les pertes.



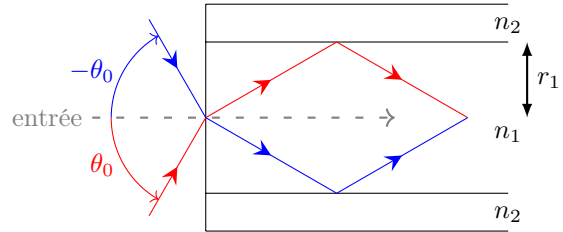
Pour une utilisation optimale

- il faut que les rayons à l'entrée de la fibre soit inclu dans un **cône d'acceptance** ;

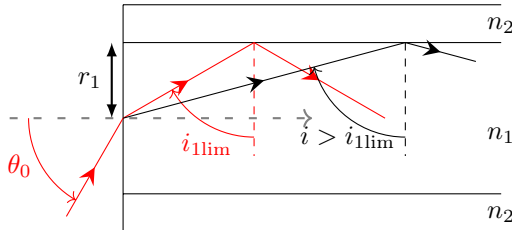
- la **dispersion intermodale** ne brouille pas le signal.

**Propriété : Cône d'acceptance**

Le cône d'acceptance est caractérisé par le demi-angle  $\theta_0$  au sommet tel que tous les rayons qui sont contenu dans ce cône traverse la fibre sans perte.

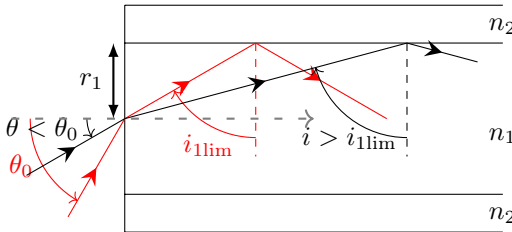


**Condition de propagation :**



On définit  $\theta_0$  à partir de la condition de réflexion totale

**Condition sur  $\theta$  :**



En utilisant la condition de réflexion totale on obtient :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \implies \theta_0 = \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$$

Et on a alors la condition :  $\theta < \theta_0$  à partir de  $i > i_{1\text{lim}}$ .

à l'interface gaine-cœur :

$$n_1 \sin i_{1\text{lim}} = n_2 \implies i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

De cette manière on obtient la condition sur  $i_1$  :

$$i_1 > i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Cherchons d'abord une relation entre  $\theta_0$  et  $i_{1\text{lim}}$  :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{1\text{lim}}\right)$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \cos(i_{1\text{lim}})$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(i_{1\text{lim}})}$$

**Propriété : Dispersion intermodale**

La dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice est définie par la différence de temps de parcours de la fibre entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide :

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$$

Le rayon le plus rapide correspond au rayon parcourant la distance la plus courte. C'est le rayon entrant dans la fibre avec un angle  $\theta = 0$ . Son temps de trajet est tout simplement

$$t_{\text{min}} = \frac{L}{v_1} = \frac{n_1 L}{c}$$

Le rayon le plus lent correspond au rayon parcourant la distance la plus longue. C'est le rayon faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe de la fibre. Son temps de trajet est

$$t_{\text{max}} = \frac{l}{v_1} = \frac{n_1 l}{c}$$

avec  $l$  la distance parcourut par le rayon. On a

$$l = \frac{L}{\sin i_{1\text{max}}} = \frac{n_1 L}{n_2} \implies t_{\text{max}} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c}$$

On obtient alors l'expression de la dispersion modale :

$$\Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$$

Si la dispersion modale est trop importante on peut perdre de l'information lors de la transmission de signaux.

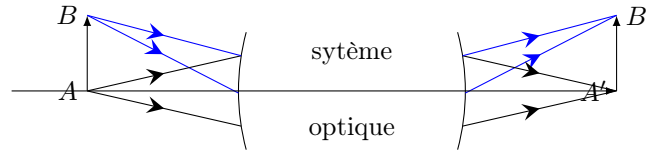


## Ondes 2 : Formation des images

### 1 Notion d'objet et d'image :

#### Definition : Stigmatisme/Aplanétisme

On considère un système optique ( $S$ ) centré. On place un objet réel  $AB$  tel que  $A$  est situé sur l'axe optique et  $AB$  est orthogonal à l'axe optique.



Le système optique ( $S$ ) est dit :

- **stigmatique** si tous les rayons issus de  $A$  passent par  $A'$  après avoir été déviés par le système optique.
- **aplanétique** si l'image  $A'B'$  est elle aussi orthogonale à l'axe optique.

De cette manière pour déterminer la position de  $A'$  on doit déterminer de  $B'$  puis  $A'$  est la projection de  $B'$  sur l'axe optique.

#### Propriété : Miroir plan

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique et aplanétique.

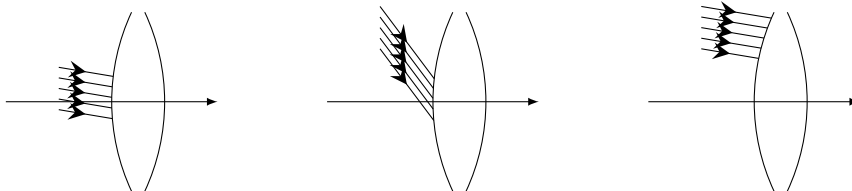
#### Conditions de Gauss

En pratique les systèmes ne sont jamais parfaitement stigmatique et aplanétiques. Pour permettre d'avoir un stigmatisme approché et un aplanétisme approché on se place dans les conditions de Gauss :

- Les rayons sont proches de l'axe optique ;
- L'angle entre les rayons et l'axe optique est faible.

Dans ces conditions on parle de rayons paraxiaux.

Si un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss, il peut être considéré comme stigmatique et aplanétique.



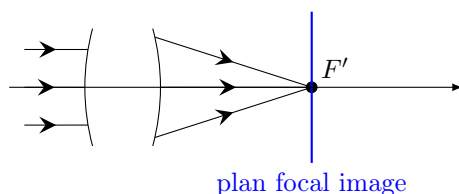
### 2 Les lentilles minces

#### Definition : Lentille mince

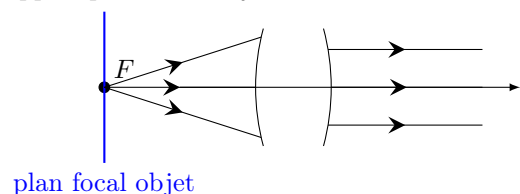
Une lentille sphérique est un milieu transparent, homogène et isotrope limité par deux dioptries sphériques. Les lentilles convergentes sont les lentilles à bords fin.

#### Propriété : Foyers

On appelle **foyer image**  $F'$ , l'image à travers ( $S$ ) d'un objet situé sur l'axe optique à l'infini. Le plan orthogonal à l'axe passant par  $F'$  est appelé plan focal image.

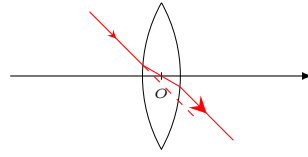


On appelle **foyer objet**  $F$ , le point situé sur l'axe optique dont l'image à travers ( $S$ ) est située à l'infini sur l'axe optique. Le plan orthogonal à l'axe optique passant par  $F$  est appelé plan focal objet.



#### Propriété : Centre optique

On définit le centre optique comme le point par lequel passe tous les rayons qui ressortent de la lentille sans déviation.



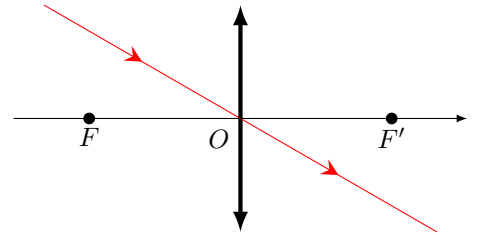
### Propriété : Modélisation d'une lentille convergente

On schématise les lentilles convergentes comme ceci, et dans les conditions de Gauss on suppose que le rayon émergent passant par le centre optique est dans le prolongement du rayon incident.

La lentille possède un foyer image  $F'$  et un foyer objet  $F$ . On définit la distance focale objet  $f$  et la distance focale image  $f'$  comme :

$$f = \overline{OF} < 0 \text{ m} \quad f + f' = 0 \text{ m}$$

$$f' = \overline{OF'} > 0 \text{ m}$$



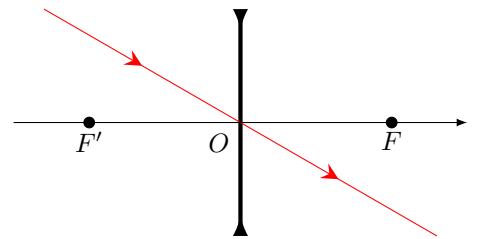
### Propriété : Modélisation d'une lentille divergente

On schématise les lentilles divergentes comme ceci, et dans les conditions de Gauss on suppose que le rayon émergent passant par le centre optique est dans le prolongement du rayon incident.

La lentille possède un foyer image  $F'$  et un foyer objet  $F$ . On définit la distance focale objet  $f$  et la distance focale image  $f'$  comme :

$$f = \overline{OF} > 0 \text{ m} \quad f + f' = 0 \text{ m}$$

$$f' = \overline{OF'} < 0 \text{ m}$$



### Definition : La vergence

La vergence : est définie comme l'inverse de la distance focale image, elle s'exprime en dioptrie notée  $\delta$  homogène à l'inverse d'une longueur.

$$V = \frac{1}{f'}$$

### Formules de conjugaisons

On peut retrouver géométriquement les relations :

**Formule de Newton** :  $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = -f^2$

**Formule de Descartes** :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$

### Definition : Grandissement

Pour un objet étendu  $AB$  on définit le grandissement comme le rapport de la mesure algébrique  $\overline{A'B'}$  de l'image par la mesure algébrique  $\overline{AB}$  de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Si  $|\gamma| > 1$  l'image est agrandie, si  $\gamma > 0$  l'image est droite.

### Méthode : Construction graphique des images

Pour obtenir l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  à travers une lentille (convergente ou divergente), on utilise trois rayons :

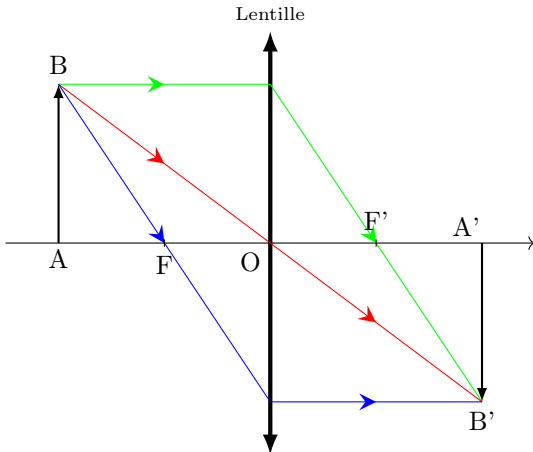
- Un rayon incident passant par  $B$  et  $O$  qui donne un rayon émergent passant par  $O$  et  $B'$  parallèle au rayon incident (pas dévié) ;
- Un rayon incident passant par  $B$  et parallèle à l'axe optique qui donne un rayon émergent passant par  $F'$  et  $B'$  ;

- Un rayon incident passant par  $B$  et  $F$  qui donne un rayon émergent passant par  $B'$  et parallèle à l'axe optique.

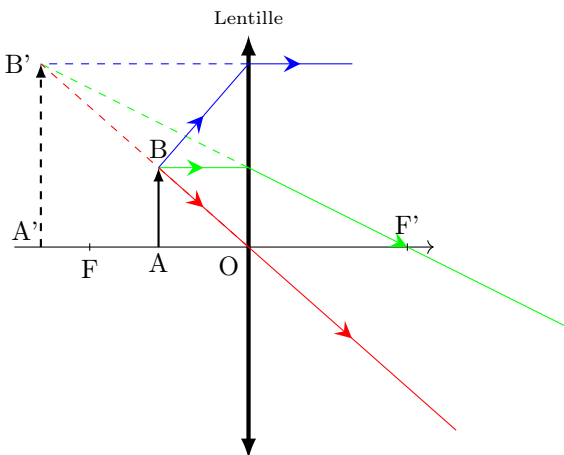
Deux rayons suffisent pour tracer  $B'$ , mais une infinité de rayons sont émis par  $B$  pour former l'image  $B'$ .  $A'$  est la projection de  $B'$  sur l'axe optique car le système est aplanétique.

**Exemple :**

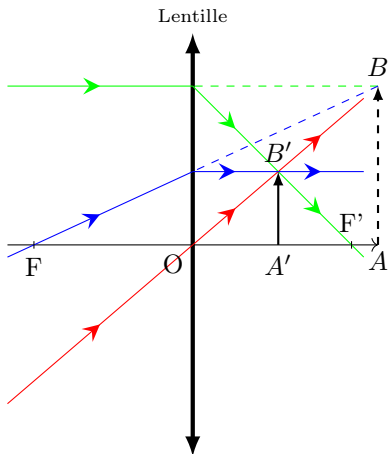
**Cas 1 :**  $AB$  est réel placé avant  $F$  d'une lentille convergente  $\rightarrow A'B'$  réelle. Représenté ci-dessus.



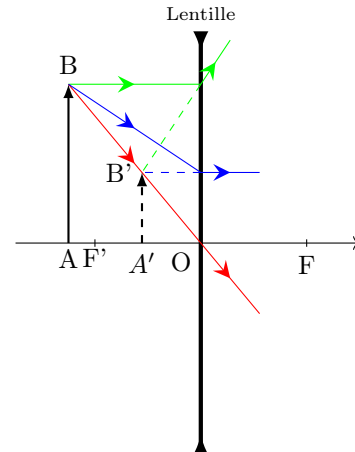
**Cas 2 :**  $AB$  est réel placé après  $F$  d'une lentille convergente  $\rightarrow A'B'$  virtuelle.



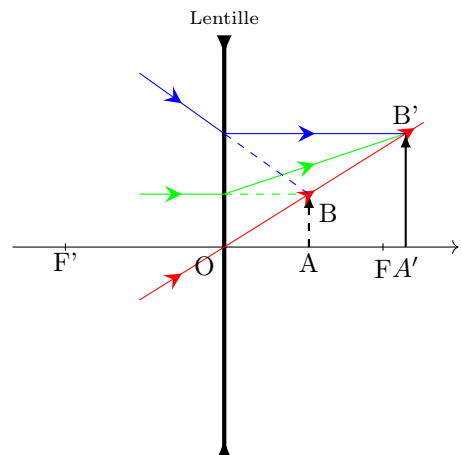
**Cas 3 :**  $AB$  est virtuel après  $O$  d'une lentille convergente  $\rightarrow A'B'$  réelle.



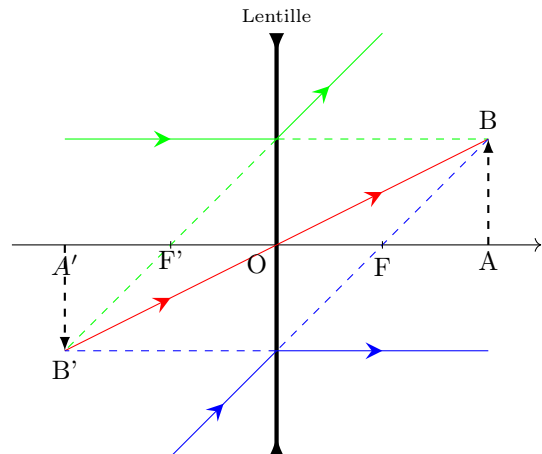
**Cas 4 :**  $AB$  est réel placé avant  $O$  d'une lentille divergente  $\rightarrow A'B'$  virtuelle.



**Cas 5 :**  $AB$  est virtuel placé avant  $F$  d'une lentille divergente  $\rightarrow A'B'$  réelle.



**Cas 6 :**  $AB$  est virtuel après  $F$  d'une lentille divergente  $\rightarrow A'B'$  virtuelle.



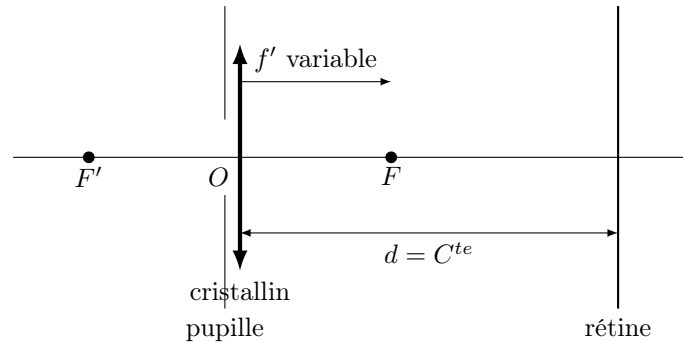
### 3 L'œil

#### Definition : Modélisation

L'œil est composé de différentes parties :

- L'iris composé d'une pupille dont le diamètre est variable (de 2 mm à 8 mm)  $\iff$  diaphragme ;
- Le cristallin est assimilable à une lentille convergente de distance focale image variable ;
- La rétine est constituée de cellules sensible à la lumière (cônes et bâtonnets)  $\iff$  Ecran.

On modélise l'œil par une lentille mince convergente variable formant une image sur un écran fixe :

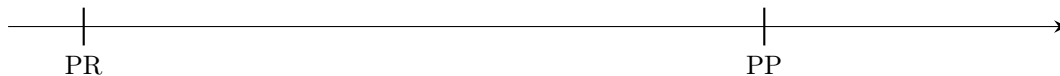


#### Propriété : Plage d'acomodation

On définit la plage d'acomodation comme la zone de l'espace ou l'oeil peut accomoder pour former une image nette. La plage d'acomodation est située entre :

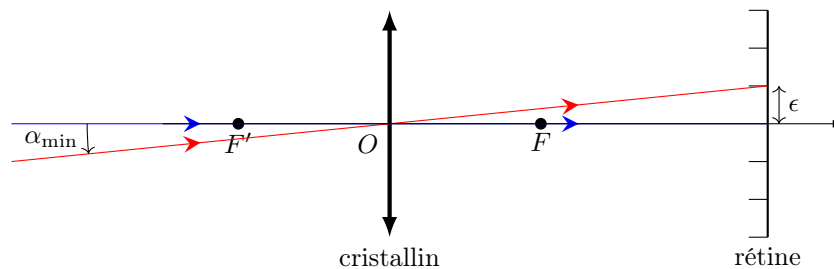
- Le Punctum Remotum (PR) le point le plus loin que l'on peut voir net au repos ( $f' = f'_{max}$ ) ;
- Le punctum proximium (PP) le point le plus proche que l'on peut voir net en accomodant ( $f' = f'_{min}$ ).

acomoder = faire diminuer la distance focale de l'oeil. au repos = distance focale maximale.



#### Propriété : Limite de résolution angulaire

La rétine est composée de cellules qui permettent de détecter l'intensité lumineuse ainsi que la couleur. Ces cellules possèdent une taille caractéristique qu'on nomme  $\epsilon$ . Si deux images se forment sur la même cellule, elle superpose celles-ci, donc pour distinguer deux images il faut qu'elles se forment sur deux cellules différentes et qu'elles soient distante de  $\epsilon$  au minimum et donc les rayons arrivant dans l'œil doivent arriver avec un angle minimum entre eux. Ceci constitue la limite de résolution angulaire.

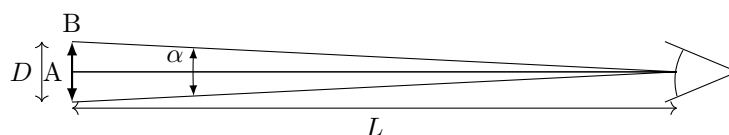


#### Remarque : Ordre de grandeur

Pour un oeil normal, le PR est situé à l'infini et le PP à environs 25 cm pour un adulte. Dans de bonnes conditions d'éclairément (ni trop sombre, ni trop lumineux), l'œil distingue des détails d'environ 1 minute d'arc, soit  $3 \times 10^{-4}$  rad.

#### Definition : Diamètre apparent

On définit le diamètre apparent d'un objet de diamètre  $D$  situé à une distance  $L$  comme l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit l'objet :



**Propriété : Le grossissement**

On définit le grossissement  $G$  comme :

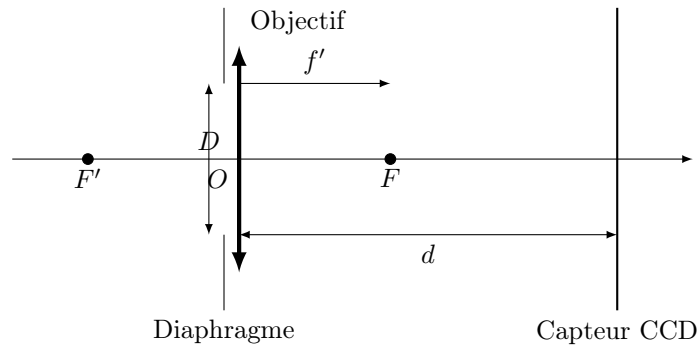
$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

avec  $\alpha'$  le diamètre apparent de l'image vu par l'œil à travers un instrument d'optique, et  $\alpha$  le diamètre apparent de l'objet vu directement par l'œil.

**4 L'appareil photo****Definition : Modélisation**

Un appareil photo est constitué :

- D'un objectif, modélisé par une lentille convergente de distance focale  $f'$  ;
- D'un diaphragme, ouverture de forme circulaire de diamètre  $D$  réglable situé juste devant la lentille ;
- D'un capteur CCD modélisé par un écran situé à une distance  $d$  réglable de la lentille.

**Propriété : Mise au point**

Pour obtenir une image nette d'un point  $A$  donné, il faut que l'image  $A'$  soit située sur le capteur. La distance  $d$  doit alors respecter

$$\overline{OA'} = d$$

**Exemple : Mise au point à l'infini**

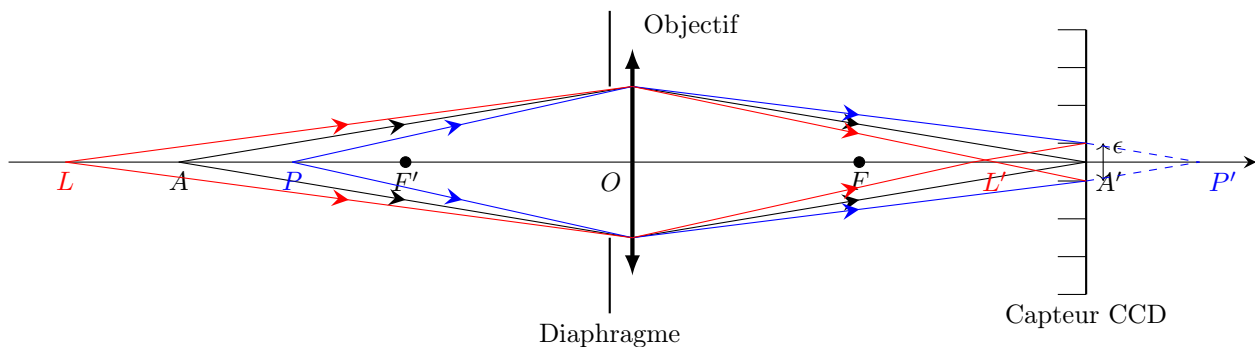
Pour un appareil photo avec un objectif de focale  $f'$ , lors d'une mise au point sur un objet situé à l'infini. La distance  $d$  entre l'objectif et le capteur doit valoir

$$d = f'$$

**Propriété : Profondeur de champ**

Le capteur d'un appareil photo possède des cellules de taille  $\epsilon$  qui renvoie la même image que l'image formée sur la cellule soit ponctuelle ou sous forme de tâche lumineuse.

On en déduit que pour un réglage donné tel que  $d = \overline{OA'}$  pour faire la mise au point d'un point objet  $A$ . On peut observer un point  $P$  plus proche et un point  $L$  plus loin tel que les faisceaux lumineux entrant dans l'objectif et convergent en  $P'$  et  $L'$  forment une tâche lumineuse sur le capteur de diamètre inférieur à  $\epsilon$ .



On peut alors voir net sur l'image renvoyée par le capteur l'ensemble des objets situés entre  $P$  et  $L$  ce qui constitue la profondeur de champ de l'appareil. Plus le diaphragme est ouvert, plus la profondeur de champ est réduite.

## 5 Instrument afocal :

### Definition : Instrument afocal

Un système afocal ne possède pas de foyer, ceux-ci sont positionné en l'infini. Les instruments afocaux permettent d'observer des objets situés à l'infini avec un œil normal sans accomoder.

### Propriété : Modélisation

On cherchera souvent à modéliser un instrument afocal comme l'association de 2 lentilles :

- Un objectif de focale  $f'_1$  qui est la lentille la plus proche de l'objet.
- Un oculaire de focale  $f'_2$  qui est la lentille derrière laquelle on vient positionner notre œil.

### Propriété : Image intermédiaire

L'objectif forme une première image d'un objet  $AB$  à observer. L'objet situé à l'infini est noté  $A_\infty B_\infty$  et forme une image à travers l'objectif notée  $A_1 B_1$  appelée image intermédiaire et située dans le plan focal image de l'objectif.

Cette image est l'objet de vis à vis de l'oculaire qui doit former une image à l'infini notée  $A'_\infty B'_\infty$  pour être vue sans accomoder. L'image intermédiaire est donc également dans le plan focal objet de l'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \xrightarrow{\text{Objectif : } A_1 = F'_1} A_1 B_1 \xrightarrow{\text{Oculaire : } A_1 = F_2} A'_\infty B'_\infty$$

### Propriété : Distance entre les lentilles

On désigne par  $\Delta = \overline{O_1 O_2}$  la distance entre l'objectif de focale  $f'_1$  et l'oculaire de focale  $f'_2$ . D'après la définition de l'image intermédiaire pour un système afocale on a forcément :

$$\Delta = f'_1 + f'_2$$

### Exemple : La lunette astronomique

La lunette est composée d'une lentille convergente  $L_1$  de distance focale  $f'_1 = 60$  cm qui sert d'objectif. Ainsi que d'une lentille divergente  $L_2$  de distance focale  $f'_2 = -5$  cm qui sert d'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \longrightarrow A_1 B_1 \longrightarrow A'_\infty B'_\infty$$

Etude de l'oculaire : Pour que  $A'_\infty B'_\infty$  soit situé à l'infini, il faut que  $A_1 = F_2$  le foyer objet de la lentille  $L_2$ .

Etude de l'objectif : Or si  $A_\infty B_\infty$  est à l'infini, alors  $A_1 = F'_1$  le foyer image de la lentille  $L_1$ . On a alors  $F'_1 = F_2 = A_1$  le foyer objet de l'oculaire est confondu avec le foyer objet de l'objectif.

Pour tous les systèmes afocaux on a le foyer image de l'objectif  $F'_{ob}$  qui est confondu avec le foyer image de l'oculaire  $F_{oc}$ .

La grossissement vaut  $G = -\frac{f'_1}{f'_2}$  positif donc image droite.

Les rayons incidents de l'objectif sont parallèles avec un diamètre apparent de l'objet  $\alpha$ . Ils sont ensuite déviés par  $L_1$  et convergent vers  $B_1$  l'image intermédiaire. Avant de converger, ils sont déviés par  $L_2$  et les rayons émergents sont parallèles et le diamètre apparent de l'image est  $\alpha'$ .

On peut calculer le grossissement angulaire :  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

$$\alpha' \text{ est le diamètre apparent de l'image } \tan \alpha' = \frac{A_1 B_1}{O_2 A_1} = \frac{A_1 B_1}{-f'_2}.$$

Dans les conditions de Gauss :  $\alpha' \ll 1 \implies \tan \alpha' \approx \alpha'$

$$\alpha \text{ est le diamètre apparent de l'objet } \tan \alpha = \frac{A_1 B_1}{O_1 A_1} = \frac{A_1 B_1}{f'_1}.$$

Dans les conditions de Gauss :  $\alpha \ll 1 \implies \tan \alpha \approx \alpha$

On a alors :  $G = \frac{-f'_1}{f'_2} = 12$  l'image est droite.

## Ondes 3 : Propagation d'un signal

### 1 Notion d'onde

#### Definition : Onde

Un signal est la variation temporelle et/ou spatiale d'une ou de plusieurs grandeurs physiques.

On appelle onde un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée signal physique transporté par l'onde.

#### Definition : Célérité d'une onde

On appelle célérité d'une onde sa vitesse de propagation.

#### Remarque : Grandeurs physiques

- Onde acoustiques : vitesse-masse volumique ;
- Onde électromagnétique : Champ électrique-Champ magnétique ;
- Onde électrique : tension-intensité du courant.

#### Definition : Milieu dispersif/non-dispersif

On définit un milieu non-dispersif comme un milieu où toutes les ondes se propagent à la même vitesse.

Par opposition, on définit un milieu dispersif comme un milieu où la vitesse de propagation des ondes dépend de la fréquence. De cette manière une onde composée de plusieurs fréquence va se "dispenser".

#### Definition : Onde progressive 1D

On définit une onde progressive comme une onde se propageant sans transport de matière selon une direction  $\vec{u}_x$  dans un milieu :

- non dispersif : les ondes ne se déforment pas ;
- non dissipatif : l'amplitude de l'onde est constante.

On peut alors modéliser l'enveloppe de l'onde par une fonction  $f$  ou  $g$  tel que :

- Pour une onde  $s_+(x, t)$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants :

$$s_+(x, t) = f(x - ct) \text{ ou } s_+(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Pour une onde  $s_-(x, t)$  se propageant dans le sens des  $x$  décroissants :

$$s_-(x, t) = f(x + ct) \text{ ou } s_-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où  $c$  la célérité de l'onde.

#### Propriété : retard temporel

Si on considère un signal émis en  $O$  se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants. On mesure le signal en  $M$  et en  $N$  on trace respectivement :

- $s_O(t) = s(x = 0, t)$  ;
- $s_M(t) = s(x = x_M, t)$  ;
- $s_N(t) = s(x = x_N, t)$ .



avec  $\tau_M$  et  $\tau_N$  le temps de propagation de l'onde de  $O$  vers  $M$  puis  $N$ . On a alors la relation :

$$s_M(t) = s_O(t - \tau_M) \quad \text{et} \quad s_N(t) = s_O(t - \tau_N) \quad \text{donc} \quad s(x, t) = s_O(t - \tau(x))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants on peut poser :

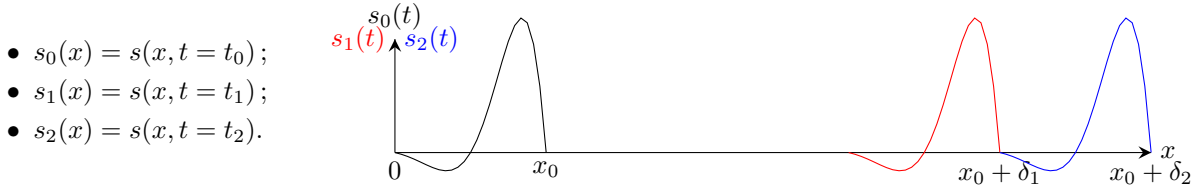
$$\tau(x) = \frac{x}{c}$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants on peut poser :

$$\tau(x) = -\frac{x}{c}$$

### Propriété : Déplacement spatial

Si on considère un signal émis en  $O$  se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants. On prend une "photo" de l'onde à l'instant  $t_0$ , puis  $t_1 > t_0$  et  $t_2 > t_1$  :



avec  $x_0$  la position où le début du signal est reçu à l'instant  $t_0$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les déplacements de l'onde par rapport à l'instant  $t_0$  aux instants  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$ . On a alors la relation :

$$s_1(x) = s_0(x - \delta_1) \quad \text{et} \quad s_2(x) = s_0(x - \delta_2) \quad \text{donc} \quad s(x, t) = s_0(x - \delta(t))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants on peut poser :

$$\delta(t) = +c(t - t_0)$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants on peut poser :

$$\delta(t) = -c(t - t_0)$$

## 2 Ondes progressives harmoniques :

### Definition : Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation temporelle  $\omega$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants avec la vitesse  $c$  a pour expression :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

avec  $k$  le vecteur d'onde (pulsation spatiale) tel que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma \quad \sigma \text{ est le nombre d'onde (fréquence spatiale)}$$

### Propriété : Vitesse de phase

La célérité d'une onde progressive harmonique est appelée vitesse de phase et s'exprime en fonction de  $\omega$  et  $k$  ou  $f$  et  $\lambda$  :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

avec  $f$  la fréquence de l'onde et  $\lambda$  sa longueur d'onde.

### Propriété : Déphasage entre les signaux en deux points

Si on considère une onde émise en  $O$  et qui se propage dans le sens des  $x$  croissants telle que :

$$s(x = 0, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \implies s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x))$$

avec  $\varphi(x) = -kx + \varphi_0$  le déphasage de l'onde en  $x$  par rapport à l'onde émise en  $O$  à l'instant  $t$ .

Alors le déphasage entre  $s_1(t)$  l'onde reçue en  $x_1$  et  $s_2(t)$  l'onde reçue en  $x_2$  vaut :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = -k(x_1 - x_2) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$$



**Propriété : Signaux en phase / en opposition de phase**

- Si le déphasage vaut  $m \times 2\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  alors les signaux sont en phase ;
- Si le déphasage vaut  $\left(m + \frac{1}{2}\right)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  alors les signaux sont en opposition de phase.

**Remarque : Ordre de grandeur de fréquences**

- Ondes acoustiques audibles :  $f = 20 \text{ Hz}$  à  $20 \times 10^3 \text{ Hz}$  ;
- Ondes électromagnétiques téléphoniques :  $f = 900 \text{ MHz}$  à  $2100 \text{ MHz}$  ;
- Ondes électromagnétiques wifi :  $f = 2,4 \text{ GHz}$  à  $5 \text{ GHz}$  ;
- Ondes électromagnétiques EDF :  $f = 50 \text{ Hz}$  ;
- Ondes optiques visibles :  $f \sim 500 \text{ THz}$ .

**Exemple : Milieu dispersif**

- La propagation d'ondes élastiques transversales dans un solide lorsque la longueur d'onde est grande devant la dimension transversale du milieu :

$$v_{\varphi}(k) = \alpha k \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

- La propagation d'ondes à la surface de l'eau :  $v_{\varphi}(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}$
- La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu matériel (verre) :  $v_{\varphi}(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)} < c$

**Exemple : Milieu non dispersif**

- La propagation d'ondes acoustiques dans un fluide :  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$
- La propagation des ondes élastiques longitudinales dans un solide :  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$
- La propagation des ondes électromagnétiques dans la vide :  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### 3 Phénomène d'interférences

**Definition : Interférences**

Lorsque deux ondes de même nature se propagent dans une zone de l'espace, elles s'additionnent en tout point et à chaque instant. Lorsque l'onde résultante a une amplitude modulée dans l'espace. On a alors un phénomène d'interférences.

Les conditions d'interférences sont :

- Ondes de même nature ;
- Ondes harmoniques ;
- Ondes de même fréquence.

**Definition : Interférences constructives / destructives**

La superposition de deux ondes harmoniques qui interfèrent ensemble est une onde harmonique de même fréquence et d'amplitude  $A(M)$  qui dépend du point  $M$  où on observe l'onde.

On dit que les interférences sont constructives aux points  $M$  où l'amplitude de l'onde résultante est maximale.

$$A(M) = A_{\max}$$

On dit que les interférences sont destructives aux points où l'amplitude de l'onde résultante est minimale.

$$A(M) = A_{\min}$$

**Propriété : Somme de deux ondes harmoniques**

On considère deux ondes harmoniques de même fréquence qu'on note émis en  $x_1$  et  $x_2$  :

$$s_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(x)) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(x))$$

On peut montrer que :

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))}$$

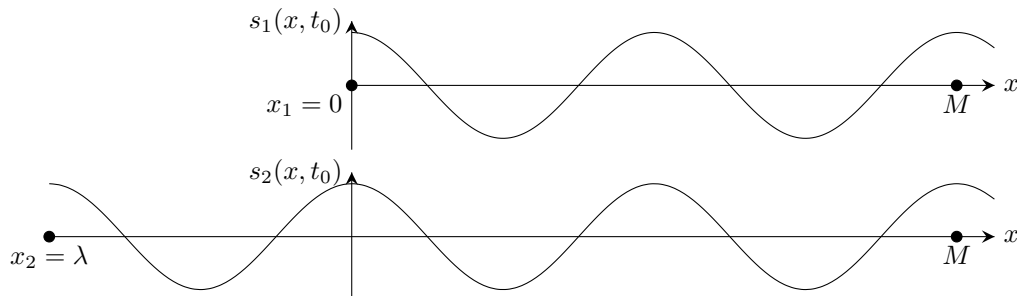
Avec  $\varphi_1(x) = -k(x - x_1)$  et  $\varphi_2(x) = -k(x - x_2)$ , on a alors :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right]}$$

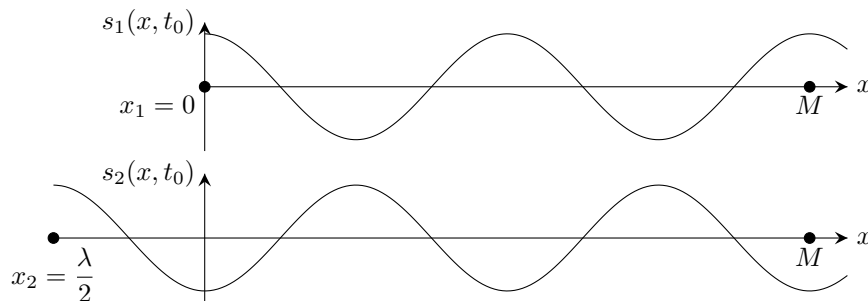
**Propriété : déphasage et interférences**

On montre alors que pour que les interférences soient :

- constructives :  $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = m \times 2\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  soit  $A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$  ;



- destructives :  $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times 2\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  soit  $A_{\min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$ .

**4 Interférences lumineuses****Propriété : Ondes cohérentes**

Dans le domaine de l'optique on dit que deux ondes peuvent produire une figure d'interférence elles sont cohérentes. La particularité des ondes lumineuse est que les récepteurs (capteur ou œil) sont sensible à l'intensité lumineuse :

$$I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2} K A^2(M)$$

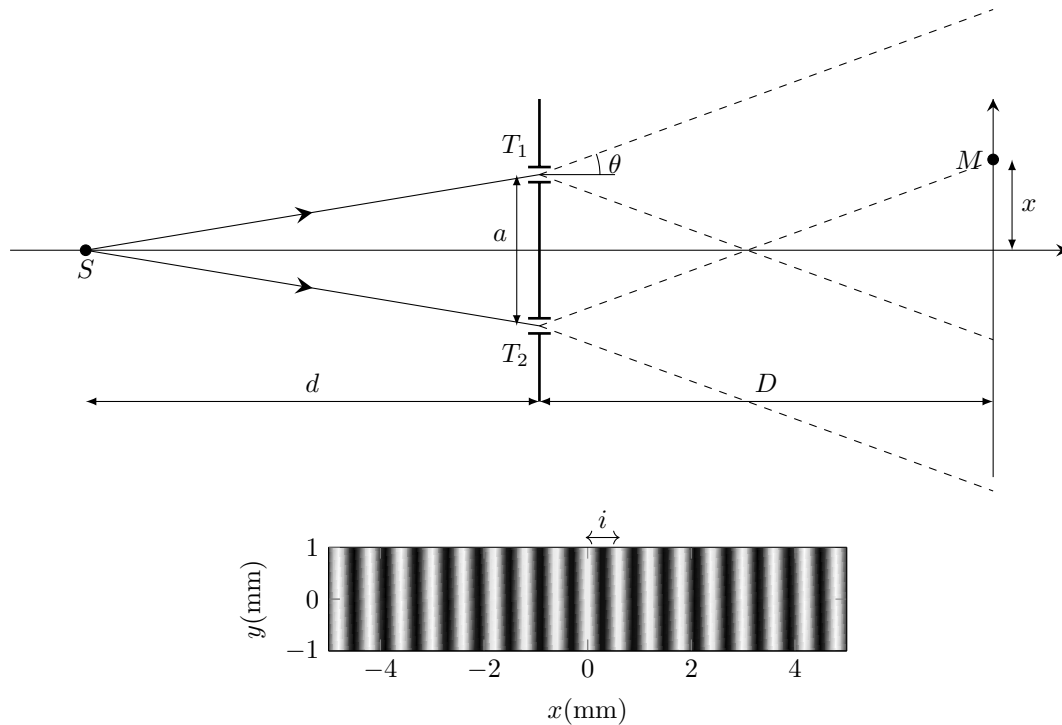
pour une onde harmonique lumineuse.

**Définition : Dispositif des trous de Young**

Le dispositif de l'expérience représenté sur la figure suivante comporte :

- Une source ponctuelle  $S$  monochromatique émettant une onde de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide ;
- Un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  identiques de diamètre très petit (de l'ordre de 0,1 nm) dont la distance  $a = S_1S_2$  est de l'ordre du millimètre ;
- Un écran de projection parallèle à  $S_1S_2$  placé à une distance  $D$  des trous ;  $D$  est de l'ordre du mètre.

La lumière émise par  $S$  arrive en un point  $M$  de l'écran en passant soit par le trou  $S_1$ , soit par le trou  $S_2$ . Ceci nécessite une déviation de la lumière au niveau de chaque trou rendue possible par le phénomène de diffraction provoqué par la très petite taille des trous. Ainsi, les trous de Young se comportent comme des sources ponctuelles appelées sources secondaires.



### Definition : Chemin optique

On définit le chemin optique ( $OM$ ) comme la distance parcouru par une onde lumineuse dans le vide pendant la durée du trajet de l'onde a  $O$  à  $M$  dans le milieu d'indice  $n$ .

On calcule le chemin optique en multipliant la longueur parcouru par une onde depuis sa source multiplié par l'indice  $n$  du milieu traversé, soit :

$$(OM) = ct_{OM} = \frac{c}{v_\varphi} OM = nOM$$

### Propriété : Différence de marche et interférences

On définit la différence de marche comme la différence de chemin optique entre deux ondes qui interfèrent au point  $M$ . Sur le dispositif des trous de Young, on compare un rayon provenant de la source  $S$  et passant par  $S_1$  jusqu'en  $M$  à un rayon provenant de  $S$  et passant par  $S_2$  jusqu'en  $M$  :

$$\delta(M) = (SM)_1 - (SM)_2 = [(SS_1) + (S_1M)] - [(SS_2) + (S_2M)] = (S_1M) - (S_2M)$$

On a alors la relation avec le déphasage :

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

On en déduit alors les conditions d'interférence :

- constructive si  $\delta(M) = m \times \lambda_0$  ;
- destructive si  $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda_0$ .

On retient la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_2 I_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

### Exemple : Application

Calculons la différence de marche pour le dispositif des trous de Young :

$$(S_1M) = n\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad (S_2M) = n\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

En sachant que  $D \gg x$  et  $D \gg y$  :

$$(S_1M) \simeq nD + n \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D} \quad \text{et} \quad (S_2M) \simeq nD + n \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$$

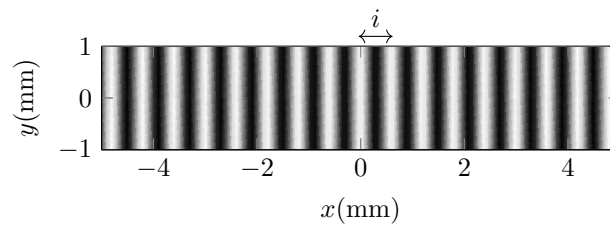
Soit  $\delta(x) \simeq \frac{na x}{D}$ .

On en déduit alors les positions  $x_m$  franges d'interférences constructives :

$$\delta(x_m) = \frac{na x_m}{D} = m \times \lambda_0 \implies x_m = \frac{m \lambda_0 D}{na}$$

On peut en déduire l'interfrange, la distance entre deux franges lumineuse de maximum d'intensité.

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0 D}{na}$$



## Ondes 4 : Introduction à la mécanique quantique :

### 1 Introduction :

#### Remarque : État des lieux de la physique début du XX<sup>e</sup>

Au début du 20<sup>e</sup> siècle, la physique classique est dominée par deux théories : la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme de Maxwell. Ces théories sont déterministes : à partir d'équations dynamiques (équations différentielles) et étant données des conditions initiales, elles permettent de prévoir l'évolution exacte de systèmes étudiés.

#### Remarque : deux objets d'études dans l'univers

On distingue alors dans l'univers deux catégories d'objets : la matière et le rayonnement.

- La matière est faite de corpuscules parfaitement localisables ; les lois de la mécanique permettent de prévoir leur trajectoire, leur vitesse. On utilise notamment la seconde loi de Newton  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  où  $\vec{F}$  est la résultante des forces appliquées sur la particule et  $\vec{p} = m\vec{v}$  sa quantité de mouvement.
- Le rayonnement suit les lois de Maxwell (énoncées en 1855) ; ses variables dynamiques sont les composantes en chaque point de l'espace des champs électrique et magnétique. Il présente un caractère ondulatoire qui se manifeste par les phénomènes de diffraction et d'interférences (Chapitre 2).  
À cette époque, suite aux expériences d'interférences lumineuses de Thomas Young, on est persuadé que la lumière est une onde.

#### Remarque : Limites des théories classiques

Il reste cependant un certain nombre d'expériences inexplicables avec les théories classiques. On peut citer l'effet photoélectrique, le spectre du rayonnement d'un corps noir, ...

La volonté d'expliquer ces observations va bouleverser les concepts et donner naissance entre autre à la mécanique quantique.

### 2 Dualité onde-particule :

#### Definition : Notion de photon

Le photon est l'objet qui décrit le rayonnement électromagnétique. Il a :

- un aspect ondulatoire, caractérisé par une fréquence  $\nu$  (ou pulsation  $\omega$ ) et une longueur d'onde  $\lambda$  (ou vecteur d'onde  $k$ ) ;
- un aspect corpusculaire, caractérisé par une énergie  $E_V$  et une quantité de mouvement (ou impulsion)  $p$ .

Les relations qui relient la description corpusculaire à la description ondulatoire sont appelées relations de Planck-Einstein. En fonction du phénomène observé, on peut considérer la lumière comme une onde, ou comme un faisceau de photon.

#### Propriété : Énergie d'un photon

On relie l'énergie d'un photon à la fréquence  $\nu$  (ou pulsation  $\omega$ ) du rayonnement électromagnétique associée par la relation :

$$E_V = h \times \nu \quad \text{ou} \quad E_V = \hbar \times \omega$$

avec  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck, et  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck réduite.

#### Propriété : Quantité de mouvement ou impulsion d'un photon

On relie la quantité de mouvement (ou impulsion)  $p$  d'un photon à sa longueur d'onde  $\lambda$  (ou son vecteur d'onde  $k$ ) par la relation :

$$p = \frac{E_V}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{ou} \quad p = \frac{E_V}{c} = \hbar k$$

avec  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck, et  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck réduite.

#### Definition : L'effet photoélectrique

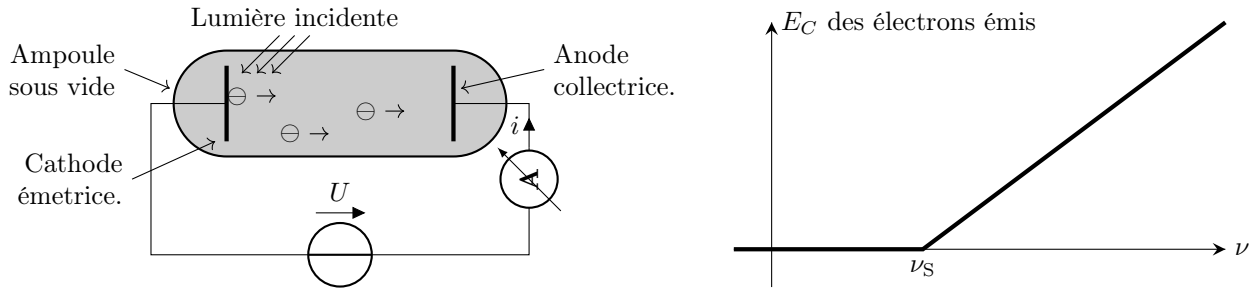
L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par un rayonnement du domaine visible ou ultraviolet.

L'expérience de Lenard de 1902 : composée de deux électrodes dans une ampoule sous vide. La cathode est éclairée par un rayonnement de fréquence  $\nu$ . Si des électrons sont émis par la cathode, ils sont collectés par l'anode et un ampèremètre mesure l'intensité du courant. Un générateur de tension idéal impose une différence de potentiel  $U = V_a - V_c$  entre l'anode et la cathode.

Le phénomène présente deux particularités remarquables :

- il n'apparaît qu'au-delà du fréquence seuil  $\nu_S$  qui dépend de la nature du métal.
- pour  $\nu < \nu_S$  il n'y a pas effet photoélectrique quelque soit l'intensité lumineuse du rayonnement.
- pour  $\nu > \nu_S$  l'effet photoélectrique s'annule (le courant s'annule) si on impose  $U < U_a < 0$ .

Si on considère système émetteur et collecteur d'électrons on peut mesurer l'énergie cinétique des électrons émis sous l'effet du rayonnement de fréquence  $\nu$  :



### Propriété : Interprétation quantique

En 1905, Albert Einstein propose une interprétation de l'effet photoélectrique en reprenant l'idée de Planck et en allant plus loin : il suppose que le rayonnement est constitué de particules de lumière nommées photons. Chaque photon véhicule une énergie  $E$  tel que :

$$E = h\nu \quad \text{avec la fréquence du rayonnement : } \nu$$

L'hypothèse d'Einstein pour l'effet photoélectrique est qu'un électron du métal ne peut absorber qu'un seul quantum de lumière (un seul photon). Il est alors arraché au métal si l'énergie du photon est supérieure au travail donc si :  $h\nu > W_{ext}$ . Entre 1905 et 1915 Robert Andrews Millikan réalisa plusieurs expériences qui aboutirent à une mesure de  $h$  compatible avec la valeur du rayonnement thermique.

Prix nobel d'Enstein en 1921 pour son interprétation de l'effet photoélectrique.

### Definition : Onde de matière

À une particule de masse  $m$  et de quantité de mouvement  $\vec{p}$ , on associe une onde de matière de longueur d'onde  $\lambda$  et de fréquence  $\nu$ .

### Propriété : Longueur d'onde de de Broglie (1924)

Un corps matériel de quantité de mouvement  $p$  peut présenter un aspect ondulatoire :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

### Propriété : Fréquence de l'onde de de Broglie

Un corps matériel d'énergie totale  $E$  peut présenter un aspect ondulatoire :

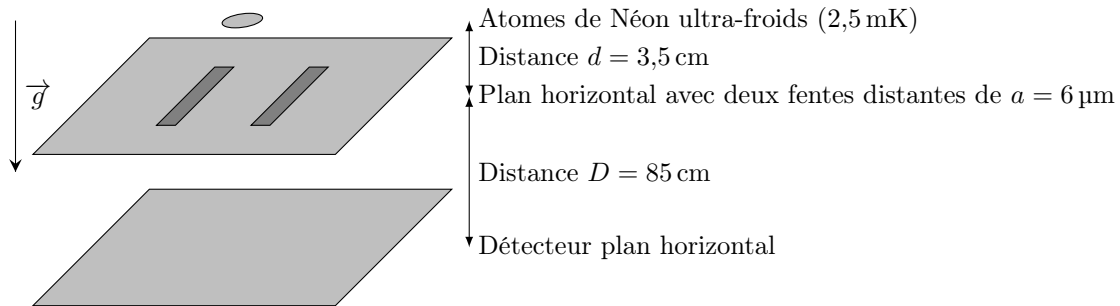
$$\nu_{DB} = \frac{E}{h}$$

### Propriété : Interférences atomiques expérience de 1992

On utilise le dispositif décrit sommairement. Il utilise des atomes de Néon piégés et refroidis à une température de 2,5 mK. Ils sont alors libérés et tombent en chute libre et atteignent un écran percé de deux fentes avec une vitesse  $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le piège est situé à une hauteur  $l = 76 \text{ mm}$  au-dessus de deux fentes séparées d'une distance  $a = 6 \mu\text{m}$ . La longueur d'une fente est de  $2 \mu\text{m}$ . Un écran MPC (microchannel plate detector) est placé à une distance  $D = 85 \text{ cm}$  de la double fente et

détecte les atomes de Néon avec une résolution de l'ordre de  $20\ \mu\text{m}$ . L'ensemble du dispositif est disposé verticalement.



La figure d'interférence obtenue en libérant les atomes du piège, est constituée d'environ 6000 impacts atomiques. Chaque impact est clairement identifié attestant du caractère corpusculaire des entités détectées mais l'ensemble des impacts dessine des franges d'interférences.

Confirmer que cette expérience permet de montrer la nature ondulatoire de l'atome.

Pourquoi faut-il refroidir les atomes ?

Calculer la longueur d'onde de de Broglie et l'interfrange de la figure d'interférences. Conclure sur la nécessité de refroidir.

### 3 Formalisme quantique

#### Remarque : Expérience d'interférence photon par photon

Reprenons l'expérience d'interférences lumineuses dite des fentes de Young évoquées en introduction en utilisant une source de photon unique. Le détecteur enregistre les impacts des photons qui reconstituent progressivement les franges d'interférence :

Les constats sont les suivants :

- Le point où les photon frappe l'écran est aléatoire. On peut juste définir une probabilité  $p(M)$  de détection de la particule en  $M$ .
- l'accumulation des impacts reconstitue la figure d'interférences.

#### Remarque : Interprétation probabiliste

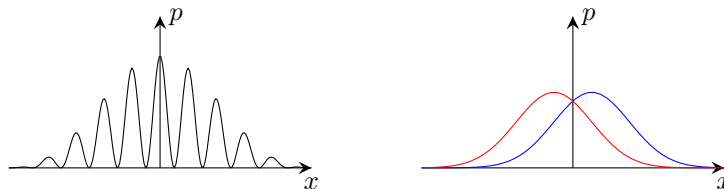
Le point  $M$  où le photon frappe l'écran est aléatoire. On peut juste définir une probabilité  $p(M)$  de détection de la particule en  $M$ .

La particule peut à priori passer par la fente 1 ou par la fente 2. Le résultat observé peut être considéré comme la superposition des deux expériences réalisées avec uniquement la fente 1 ou uniquement la fente 2.

I on appelle  $p_1(M)$  et  $p_2(M)$  les probabilités de détecter le photon en  $M$  en présence d'une seule fente, on pourrait s'attendre à ce que les probabilités associées aux deux chemins s'ajoutent lorsque les deux fentes sont ouvertes. Or on constate que :

$$p(M) \neq p_1(M) + p_2(M)$$

Plus étonnant encore, il y a des points où la probabilité  $p(M)$  est nulle alors que  $p_1(M)$  et  $p_2(M)$  ne sont pas nulles. Les particules semblent guidées par l'onde classique. C'est une manifestation de la dualité onde-corpuscule.



#### Definition : Fonction d'onde

On associe à une particule quantique une fonction mathématique appelée fonction d'onde  $\underline{\psi}(M, t)$  dépendant des coordonnées d'espace et du temps. Cette fonction à valeur complexe contient toutes les informations relatives à l'état de la particule. On définit alors la probabilité de trouver une particule au point  $M$  à l'instant  $t$  :

$$p(M, t) = |\underline{\psi}(M, t)|^2$$

**Propriété : Théorème de superposition**

Si on note  $\underline{\psi}_1(M, t)$  la fonction d'onde de la particule lorsque seule la fente 1 est ouverte et  $\underline{\psi}_2(x, t)$  la fonction d'onde de la particule lorsque la fente 2 est ouverte.

La fonction d'onde de la particule dans l'expérience des fentes d'Young s'écrit :

$$\underline{\psi}(M, t) = \underline{\psi}_1(M, t) + \underline{\psi}_2(M, t)$$

La probabilité de détection de la particule est proportionnelle au module au carré de la fonction d'onde :

$$|\underline{\psi}(M, t)|^2 = \underline{\psi}(M, t)\underline{\psi}^*(M, t) = (\underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2)(\underline{\psi}_1^* + \underline{\psi}_2^*) = |\underline{\psi}_1|^2 + |\underline{\psi}_2|^2 + \underline{\psi}_1\underline{\psi}_2^* + \underline{\psi}_1^*\underline{\psi}_2$$

**Compléments :** On ne peut pas savoir par quel trou la particule est passée. Si on essaie de faire la mesure, on perd la figure d'interférence. La mesure perturbe le système et donc on ne peut pas décrire à 100% le système. Soit on mesure la position finale des atomes, soit on mesure leurs trajectoires.

**Definition : Indétermination quantique**

L'indétermination quantique spatiale  $\Delta x$  correspond à la largeur typique (écart-type) de la densité de probabilité de présence  $|\psi(x, t)|^2$ .

**Remarque :**

Attention!  $u(x) \neq \Delta x$ , le premier dépend du protocole et des instruments de mesures, l'autre est intrinsèque.

**Definition : Inégalité de Heisenberg**

Les indéterminations quantiques sur la position  $x$  et la quantité de mouvement  $p_x$  suivant le même axe ( $Ox$ ) vérifient l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  est la constante de Planck réduite. Cette relation est appelée principe d'indétermination de Heisenberg.

**Propriété : Interprétation par la diffraction d'une particule**

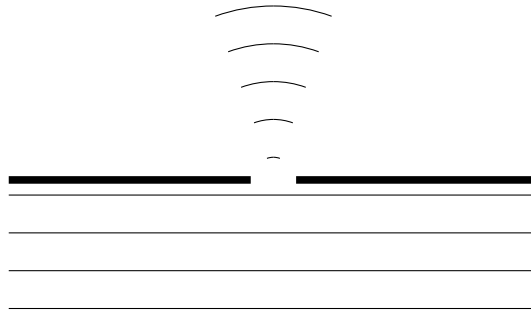
On considère une quantité de mouvement  $\vec{p} = p\vec{u}_x$ . La particule passe à travers une fente de largeur  $a$  et on place un détecteur tout de suite derrière la fente.

Le détecteur pourra détecter la particule avec une indétermination spatiale  $\Delta x \sim a$  la largeur de la fente.

Après la fente, dû à la diffraction, la particule peut avoir sa quantité de mouvement  $\vec{p}$  orientation sera aléatoire mais contenu dans le cône de demi-angle au sommet  $\theta$  tel que :

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$$

En prenant  $\lambda = \lambda_{dB} = \frac{h}{p}$  on a alors une indétermination sur la projection  $\vec{p} \cdot \vec{u}_x$  soit  $\Delta p_x \sim p \sin(\theta) = \frac{h}{a}$



On obtient alors :  $\Delta x \Delta p_x \sim h$



## 4 Quantification de l'énergie

### Definition : Modèle de Bohr

En 1913, Niels Bohr propose le premier modèle quantique de l'atome d'hydrogène afin d'expliquer l'existence de spectre de raies atomiques.

Le modèle de Bohr repose sur les hypothèses suivantes :

- hypothèse mécanique : quantification du moment cinétique de l'électron qui possède une trajectoire circulaire autour du noyau supposé fixe.

$$L_{O,n} = n\hbar \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

- hypothèse optique : l'électron passe d'une trajectoire circulaire à une autre en absorbant ou en émettant des énergie électromagnétique.

Expérimentalement, les longueurs d'ondes pour l'atome d'hydrogène vérifient :

$$\frac{1}{\lambda_{n,m}} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ avec } R_H = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \text{ est la constante de Rydberg}$$

### Propriété : Rayon de Bohr

L'orbite de l'électron autour du noyau d'hydrogène est quantifié et peut prendre les valeurs :

$$r_n = n^2 a_B \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 52,9 \times 10^{-12} \text{ m le rayon de Bohr}$$

### Démonstration : Rayon de Bohr

**Système :**  $\{M(m_e)\}$  électron ponctuel.

**Référentiel :** Terrestre supposé galiléen.

**Bilan :**  $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$  interaction coulombienne entre un électron et un proton.

**PFD :**  $m_e \vec{a}(M)_{/S} = \vec{F}$  en projetant suivant  $\vec{u}_r \implies -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iff \dot{\theta} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$

On peut alors calculer le moment cinétique au centre de force  $O$  :

$$\overline{L_O(M)} = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \implies L_O = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}}$$

On applique alors l'hypothèse mécanique :

$$L_O = n\hbar \iff n^2 \hbar^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0} \implies r_n = n^2 \times \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

### Propriété : Quantification de l'énergie

L'énergie mécanique de l'électron est alors quantifiée et seules les valeurs suivantes sont permises :

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \times \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

### Démonstration : Niveaux d'énergie

On calcule l'énergie mécanique de l'électron :

$$E_m = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{L_O^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B}$$

**Propriété : Le photon comme quantum d'énergie**

En utilisant le modèle du photon comme quantum d'énergie on obtient :

$$E_n - E_m = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_{n,m}} \iff \frac{1}{\lambda_{n,m}} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

On obtient alors  $R_{H,\text{th}} = 1,098 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$