Mécanique 1 : Cinématique du point matériel

Exercice 1 : Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Considérons un point matéiel défini par une vitesse initiale $\overrightarrow{v}(0)$ de norme v_0 et par une accélération constante de norme a_0, colinéaire au vecteur cinématique vitesse initiale dans le référentiel lié au sol.

Q.1 Définir le repère et le système de coordonnées adaptés à l'étude de ce problème.

Q.2 Donner l'expression du vecteur cinématique accélération dans le repère choisi.

Q.3 En utilisant l'expression du vecteur cinématique accélération donnée dans l'énoncé, obtenir les équations du mouvement.

Q.4 Obtenir le vecteur vitesse en intégrant les équations du mouvement précédemment obtenues. En déduire l'expression de la vitesse, c'est-à-dire la norme du vecteur vitesse.

Q.5 Faire de même pour obtenir le vecteur position en intégrant les expressions obtenues pour les composantes de la vitesse.

Q.6 Représenter sur un schéma la trajectoire du mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Q.7 Représenter la position et la vitesse du point en fonction du temps dans le cas $a_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

Q.8 Faire de même dans le cas $a_0 > 0$ et $v_0 < 0$.

Exercice 2 : courbe uniformément accéléré

Considérons un point matériel défini par une vitesse initiale $\overrightarrow{v}(0)$ de norme v_0 et par une accélération constante de norme a_0, orthogonale au vecteur cinématique vitesse initiale dans le référentiel lié au sol.

Q.1 Définir le repère et le système de coordonnées adaptés à l'étude de ce problème, puis donner les expressions des vecteur cinématique vitesse et accélération dans le repère choisi.

Q.2 En utilisant l'expression du vecteur cinématique accélération donnée dans l'énoncé, obtenir les équations du mouvement.

Q.3 Obtenir le vecteur vitesse en intégrant les équations du mouvement précédemment obtenues. On sera particulièrement attentif à la prise en compte du vecteur vitesse initiale, $\overrightarrow{v}(0)$. En déduire l'expression de la vitesse, c'est-à-dire la norme du vecteur vitesse.

Q.4 Faire de même pour obtenir le vecteur position en intégrant les expressions obtenues pour les composantes de la vitesse.

Q.5 Représenter la position et la vitesse du point en fonction du temps dans le cas $a_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

Q.6 Déterminer analytiquement l'expression de la trajectoire du point, $y(x)$, dans le plan (x, y). La représenter sur un schéma en faisant apparaître les vecteurs vitesse et accélération à différents instants.

Exercice 3 : Dérivation de vecteurs dans la base cylindrique

Q.1 Représenter la base polaire et exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$.

Q.2 En se plaçant dans le référentiel où le repère cartésien est fixe, exprimer les dérivées premières des vecteur $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.

Q.3 En déduire l'expression du vecteur vitesse dans le repère cylindrique.

Q.4 En déduire l'expression du vecteur accélération dans le repère cylindrique.

Exercice 4 : Étude de mouvements circulaires

Q.1 Le mouvement étant circulaire, que valent $r(t)$ et $z(t)$ dans le repère cylindrique ? En déduire l'expression du vecteur position.

Q.2 En déduire l'expression du vecteur cinématique vitesse dans ce cas particulier.

On suppose le mouvement uniforme.

Q.3 Justifier que $v(t)$ et $\dot{\theta}(t)$, respectivement la norme de la vitesse et la vitesse angulaire sont constantes. On posera dans la suite $\dot{\theta} = \omega > 0$.

Q.4 En déduire l'expression de T, la période du mouvement, et du vecteur vitesse dans la base polaire.

Q.5 En déduire l'expression du vecteur accélération dans la base polaire.

Q.6 Faire de même dans la base de Frenet. Commenter.

Q.7 On cherche maintenant à caractériser la trajectoire. En supposant la norme du vecteur accélération constante de valeur a_0. Intégrer l'équation du mouvement pour obtenir $\theta(t)$ en utilisant $\theta(0) = 0$. En déduire l'expression du vecteur position dans la base cartésienne.

On suppose maintenant le mouvement non uniforme.

Q.8 Donner l'expression des vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire.

Q.9 Faire de même dans la base de Frenet.

Exercice 5 : Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

Q.1 Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180\,\text{m}$. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.

Q.2 Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de $7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Exercice 6 : Interpellation pour vitesse scessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à $100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de $90\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ au bout de 10 s.

Q.1 Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ? Quelle distance aura-t-il parcourue ? Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

Exercice 7 : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il ressent une accélération :

$$a = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

où $R = 6400\,\text{km}$ est le rayon de la terre, $g_0 = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et r est le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la terre sur elle-même.

Q.1 Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis la vitesse angulaire Ω.

Q.2 Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Q.3 Déterminer sa vitesse sur sa trajectoire et calculer sa norme.

Exercice 8 : Clothoïde, courbe des autoroutes

Pour éviter les secousses et adoucir le transport de passager, les trajectoires de certains moyens de transports ne peuvent pas passer de rectiligne à circulaire en un instant. La variation d'accélération serait très inconfortable pour tout voyageur d'un train, d'une voiture, d'une attraction de type montagne russes.

On doit alors parcourir une courbe intermédiaire entre la partie rectiligne et la partie circulaire. Cette courbe, appelée clothoïde ou courbe de Cornu, est caractérisée par sa courbure qui varie proportionnellement avec le temps :

$$\frac{1}{R(t)} = \alpha t$$

Q.1 Montrer alors que pour un mouvement uniforme, l'accélération varie linéairement avec le temps.

Q.2 Exprimer le vecteur accélération d'un point M parcourant cette courbe à la vitesse v_0 constante dans le repère de Frenet.

Q.3 Exprimer le vecteur tangentielle dans le repère cartésien en fonction de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et v_0.

Q.4 Exprimer le vecteur normal dans le repère cartésien en fonction de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et v_0.

Q.5 En déduire deux équations différentielles couplées vérifiées par $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

Mécanique 2 : Dynamique du point matériel

Exercice 1 : Chute libre sans frottements

On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\cos(\alpha)\overrightarrow{u}_x + v_0\sin(\alpha)\overrightarrow{u}_y$ qui n'est soumise qu'à son poids.

Q.1 Réaliser l'étude complète du problème afin d'obtenir les équations scalaires du mouvement.

Q.2 Déduire des équations précédentes les lois horaires du mouvement.

Q.3 Déterminer l'altitude maximale de la particule au cours du mouvement.

Q.4 Déterminer la distance parcourue par la particule au cours du mouvement.

Q.5 Déterminer la trajectoire de la particule au cours du mouvement, et la tracer en faisant apparaître toutes les grandeurs définies plus tôt.

Exercice 2 : Chute libre avec frottements fluides linéaires

On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ soumise à une force de frottement fluide. Le mouvement est supposé plan et s'effectue dans le plan xOz.

On fait l'hypothèse de frottements linéaires avec la vitesse c'est-à-dire qu'on suppose que $\overrightarrow{F_f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.

Q.1 Écrire l'équation vectorielle du mouvement. La projeter sur les axes adaptés pour obtenir deux équations différentielles scalaires à coefficients constants d'ordre un.

Q.2 Résoudre les deux équations différentielles.

Q.3 En posant une vitesse caractéristique v_∞, un temps caractéristique τ et un vecteur adimensionné $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{v_\infty}$, déterminer l'équation vectorielle adimensionnée à partir de l'équation obtenue précédemment.

Q.4 Quel est le comportement de la particule aux temps longs ?

Q.5 Quel est le comportement de la particule aux temps cours ? On distinguera deux cas.

Exercice 3 : Chute libre avec frottements fluides quadratiques

On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ soumise à une force de frottement fluide. Le mouvement est supposé plan et s'effectue dans le plan xOz.

On fait l'hypothèse de frottements quadratiques avec la vitesse c'est-à-dire qu'on suppose que $\overrightarrow{F_f} = -\kappa v\overrightarrow{v}$.

Q.1 Écrire l'équation vectorielle du mouvement.

Q.2 En posant une vitesse caractéristique v_∞, un temps caractéristique τ et un vecteur adimensionné $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{v_\infty}$, déterminer l'équation vectorielle adimensionnée à partir de l'équation obtenue précédemment.

Q.3 Quel est le comportement de la particule aux temps longs ?

Q.4 Quel est le comportement de la particule aux temps cours ? On distinguera deux cas.

Exercice 4 : Le pendule simple

Étudions un pendule simple constitué d'une masse m au bout d'un fil inextensible et sans masse de longueur l, oscillant dans un plan vertical.

Q.1 Réaliser l'étude complète du problème afin d'obtenir les équations scalaires du mouvement. On précisera en particulier de quel type est l'équations différentielle portant sur $\theta(t)$.

Q.2 À partir de l'équation différentielle obtenue, déterminer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des conditions initiales.

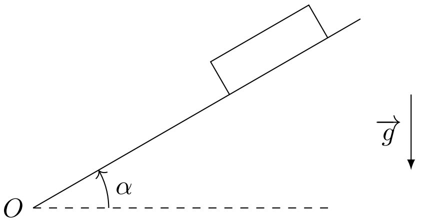
Q.3 En déduire l'expression de la tension du fil T, en fonction de l'angle θ et des conditions initiales.

Q.4 Pour quelle(s) valeur(s) de θ le fil est-il détendu ? Que se passe-t-il alors ?

Q.5 Proposer une solution pour résoudre l'équation différentielle sur $\theta(t)$, au prix d'une approximation que l'on précisera.

Q.6 Quelle est alors la période du mouvement ? De quoi dépend-elle ?

Exercice 5 : Plan incliné



On fait glisser un objet de masse $m = 200\,\mathrm{g}$ sur un plan incliné en lui communiquant une vitesse initiale $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans le sens de la montée.
Le centre de masse G se trouve initialement en O. La pente du plan incliné est définie par l'angle $\alpha = 20°$. Le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ est supposé galiléen et l'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Nous négligeons tous les frottements.

Q.1 Choisir un repère adapté au problème.

Q.2 Faire un bilan des forces appliquées à la pelle.

Q.3 Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la pelle dans $\mathscr{R}$.

Q.4 Projeter l'équation du mouvement sur les vecteurs de base.

Q.5 Déterminer l'équation horaire du mouvement.

Q.6 En déduire la distance maximale parcourue par G dans le sens de la montée.

Q.7 Quelle est la durée Δt nécessaire pour que l'objet revienne à sa position initiale O ?

Exercice 6 : Balle immergée

On considère une balle de masse $m = 2{,}7\,\mathrm{g}$ et de diamètre $d = 40\,\mathrm{mm}$. La balle est lâché sans vitesse initiale au fond du bassin rempli d'eau. La balle remonte à la surface.

Le centre de masse G de la balle est repéré par son altitude z, initialement nulle. Lorsque $z = 30\,\mathrm{cm}$ la partie supérieure de la balle affleure la surface du bain. La balle subit une force de frottement fluide de norme $F_f = hv^2$ proportionnelle au carré de sa vitesse v et opposée à son déplacement vertical.

Nous prendrons $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $h = 0{,}30\,\mathrm{USI}$ et $\mu_e = 1{,}0\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ (masse volumique de l'eau).

Q.1 Faire un bilan des forces s'exerçant sur la balle lors de sa remontée vers la surface. Quelle est l'unité de h ?

Q.2 Appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

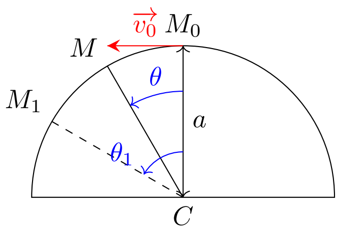
Q.3 Exprimer et calculer l'accélération initiale de la balle.

Q.4 Quelle serait la vitesse de la balle pour $z = 30\,\mathrm{cm}$ s'il n'y avait pas de force de frottement ?

Q.5 Commenter la trajectoire de phase puis évaluer la durée de la remontée de la balle vers la surface en précisant les éventuelles approximations effectuées.

Exercice 7 : Glissade sur un igloo

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un pingouin, assimilé à un point matériel M de masse m, mobile sur la surface d'un igloo sphérique S, de centre C et de rayon a, subit de la part de celui-ci une action de contact sans frottements. Le pingouin M quitte le sommet de l'igloo avec la vitesse v_0, il glisse sur l'igloo puis décolle en M_1.



Q.1 Déterminer l'équation du second ordre vérifiée par θ tant que le pingouin reste en contact avec la sphère.

Q.2 On pose $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire $\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{g}{a}\sin\theta$. Intégrer l'équation différentielle par rapport à θ. En déduire le calcul de la réaction de l'igloo sur le pinguin.

Q.3 Calculer la réaction à $t = 0$. En déduire que si $v_0 > V$ que l'on déterminera, le pingouin quitte l'igloo dès le sommet. On se place dans le cas $v_0 < V$. Calculer l'angle θ_1 pour lequel le pingouin quitte l'igloo. Calculer le chemin parcouru sur l'igloo par le point lorsque $v_0 = \dfrac{V}{2}$.

Mécanique 3 : Les oscillateurs mécanique

Exercice 1 : Ressort horizontal

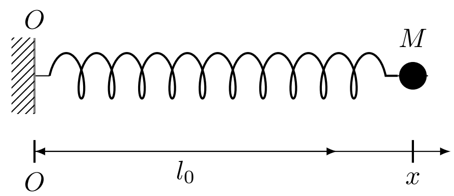
Q.1 Représenter un système masse-ressort horizontal :
- quand son élongation est maximale,
- un quart de période plus tard,
- une demi-période plus tard.

Q.2 Représenter également par des vecteurs la force de tension sur l'extrémité mobile et le vecteur vitesse de ce point à chacun de ces instants.

Q.3 Si l'élongation du ressort est maximale (notée Δl_{max} à $t = 0\,\mathrm{s}$, donner une expression de son élongation en fonction du temps.

Exercice 2 : Ressort non amorti horizontal

Considérons un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 fixé à un mur par une de ses extrémités. On attache à l'autre extrémité une masse m. On étire le ressort d'une certaine longueur L puis on lâche la masse sans lui communiquer de vitesse initiale. La masse est posée sur le sol ce qui impose un mouvement horizontal. On néglige tout frottement avec le sol.



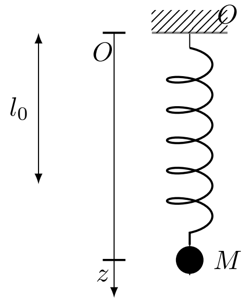
Q.1 Réaliser un bilan des forces s'appliquant sur la masse.

Q.2 En déduire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse $x(t)$.

Q.3 Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 3 : Ressort non amorti vertical

Considérons cette fois un système masse-ressort mais vertical. Une extrémité du ressort est fixée au plafond tandis que l'autre est libre. Sur cette extrémité libre, on place une masse m. On admet que la masse subit une force de frottement fluide de la forme $-\lambda\overrightarrow{v}$. À l'instant initial, on communique une vitesse initiale v_0 vers le bas à la masse qui était à sa position d'équilibre.



Q.1 Exprimer la position z_{eq} d'équilibre du ressort et vérifier que son expression est bien homogène à une distance.

Q.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Donner l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre.

Exercice 4 : Oscillations d'un flotteur sur l'eau

Un flotteur (assimilé à un cylindre de section s, de hauteur h et de masse volumique ρ) flotte à la surface de l'eau (de masse volumique ρ_e). On note $z(t)$ la position du centre de gravité G du flotteur par rapport à la surface de l'eau et on suppose que le flotteur n'est jamais entièrement immergé. On appuie dessus pour enfoncer son centre de gravité d'une profondeur z_0 et on le relâche sans vitesse initiale. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air.

Q.1 Exprimer la poussée d'Archimède exercée sur le flotteur en fonction de s, h, z, ρ_e et g.

Q.2 Déterminer la période des oscillations du flotteur.

Q.3 Déterminer $z(t)$.

Exercice 5 : Amortisseur de voiture

On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement fluide α. La force de frottement a pour expression $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Une masse $m/4$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer le long de l'axe vertical $\overrightarrow{u}_z$ orienté vers le haut. On prend $m = 1200\,\mathrm{kg}$ et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Étude statique :

Q.1 Déterminer la longueur à l'équilibre de la suspension en fonction de l_0, m, g et k. Justifier physiquement chacun des termes de la formule.

Q.2 Lorsque l'on enlève la rouse, le ressort a une longueur totale de 40 cm. En déduire la valeur numérique de l_0.

Q.3 Lors du changement d'une roue, lorsque l'on soulève d'une hauteur $h = 15\,\text{cm}$ la masse $m/4$, le ressort est détendu. En déduire la longueur d'équilibre l_{eq} du ressort puis vérifier que : $k = 20 \times 10^3\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

Étude dynamique :

Q.4 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur $l(t)$ du ressort. La mettre sous forme canonique.

Q.5 En déduire l'expression du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.

Q.6 Déterminer et calculer α afin que le dispositif fonctionne en régime critique. On prendra soin de bien donner son unité.

Q.7 On enfonce la masse $m/4$ d'une hauteur $d = 5\,\text{cm}$ par rapport à sa position d'équilibre et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Calculer $z(t)$ puis tracer l'allure de la position de la masse au cours du temps dans le cas du régime critique.

Q.8 On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut $m = 2200\,\text{kg}$. Déterminer les nouveaux paramètres de l'amortisseur Q et ω_0.

Q.9 Le nombre d'oscillations est-il satisfaisant pour l'utilisation de l'amortisseur ?

Exercice 6 : Étude d'un haut-parleur

Un haut-parleur est constitué d'une bobine et d'un aimant sur lequel on a fixé une membrane. On modélise le système de la façon suivante : une masse $m = 10\,\text{g}$ se déplace horizontalement le long de l'axe Ox, cette masse est reliée à un ressort de raideur $k = 15\,\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide l_0, est est soumise à des frottements fluides modélisés par la force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Cette masse est soumise à une force d'excitation proportionnelle à l'intensité du courant qui circule dans la bobine du haut-parleur, force donnée par $\overrightarrow{F} = \beta i(t)\overrightarrow{u}_x$ avec $\beta = 200\,\text{N}\cdot\text{A}^{-1}$.

On impose un courant sinusoïdal $i(t) = I_9\cos(\omega t)$ avec $I_0 = 1\,\text{A}$.

Q.1 Donner l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

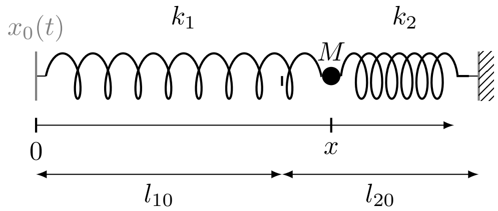
Q.2 On pose $\underline{X}(t) = l_0 + \underline{X_0}e^{j\omega t}$. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X_0}$.

Q.3 Pour quelles valeurs de α le système est-il résonnant ?

Q.4 On se place dans le cas où le système est résonnant, discuter et donner la bande passante du système en fonction du paramètre α, c'est-à-dire la gamme de fréquence pour lesquelles $\left|\underline{X_0}\right| > X_{\max}/\sqrt{2}$.

Exercice 7 : Système à deux ressorts

Un solide M, de masse m, peut se déplacer sur une tige horizontale parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.



M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide l_{10} et l_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'asvcisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = l_{10} + l_{20}$.

Q.1 Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

Q.2 Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de hauche est immobile en $x = 0$.

Q.3 On introduit $X = x - x_{\text{eq}}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par X lorque la paroi bouge.

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x_0}(t) = X_{0m}e^{j\omega t}$, $\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\underline{v} = V_m e^{j(\omega t+\phi)}$ associées à $x_0(t)$, $x(t)$ et $v(t) = \dot{X}(t)$.

Q.4 En exprimant ω_0, Q et α, établir la relation :

$$V_m e^{j\phi} = \frac{\alpha X_{0m}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Q.5 Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

Mécanique 4 : Énergie, travail, puissance

Exercice 1 : Applications directes

Q.1 Rappeler le nom des unités usuelles de puissance et de travail. Les exprimer avec les unités de base du système international.

Q.2 La puissance d'une force est négative. Est-elle motrice ou résistance ?

Q.3 Citer l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force de rappel élastique.

Q.4 Citer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur. Le point M est repéré en coordonnées cartésiennes avec l'axe (Ox) orienté vers le bas. Exprimer cette énergie en fonction de l'abscisse x du point M.

Q.5 Les forces de Van der Waals dérivent d'une énergie potentielle dont l'expression en coordonnées sphériques est $\mathscr{E}_\mathrm{p} = -\dfrac{A}{r^6}$ avec A une constante positive. On donne l'expression du gradient en sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathscr{E}_\mathrm{p} = \frac{\partial \mathscr{E}_\mathrm{p}}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathscr{E}_\mathrm{p}}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathscr{E}_\mathrm{p}}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

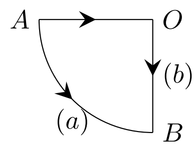
Donner la forme de la force associée et préciser s'il s'agit d'une force attractive ou répulsive. Donner également l'unité de A.

Q.6 Un objet accroché à un ressort idéal n'est soumis qu'à son poids et à la force exercée par le ressort. Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

Exercice 2 : Curling

On considère un point M soumis à une force $\vec{F}$ qui peut parcourir deux chemins (a) et (b). Le point M est repéré par ses coordonnées polaires r et θ. Le chemin (a) est un arc de cercle de rayon R tandis que le chemin (b) est constitué de deux segments de droite AO et OB de longueur R. Les deux chemins sont issus de A et mènent à B.

La force $\vec{F}$ s'écrit $\vec{F} = r^2 d^2 \vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires, où d est une constante.



Q.1 Déterminer le travail W de la force $\vec{F}$ pour les deux chemins envisagés. Conclure quant au caractère conservatif de $\vec{F}$.

Q.2 Réitérer avec la force $\vec{F'} = r^2 d^2 \vec{u}_r$.

Q.3 Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force envisagée qui est conservative. On pourra par exemple utiliser un déplacement élémentaire sur le chemin OB.

Exercice 3 : Étude du pendule simple

On considère un pendule simple : une masse m est suspendue à un fil sans masse inextensible de longueur l, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilisera les coordonnées polaires pour faire cette étude, le mouvement étant supposé contenu dans le plan vertical. On prendra O, origine du repère, comme point d'attache du pendule et on notera x la verticale descendante.

Q.1 Faire l'étude du problème (schéma, bilan des forces, expression du vecteur cinématique vitesse).

Q.2 En utilisant le théorème de la puissance cinétique, retrouver l'équation différentielle du pendule sur $\theta(t)$.

L'équation du mouvement n'est pas linéaire, de plus il n'existe pas de solution analytique de cette équation. On se propose donc d'utiliser la courbe d'énergie potentielle pour étudier la trajectoire.

Q.3 Justifier que le mouvement est conservatif.

Q.4 Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ. On prendra l'origine des potentiels en $\theta = 0$ et on commentera son comportement avec θ.

Q.5 Tracer le graphe de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(\theta)$. Existe-t-il des points d'équilibre ? Sont-ils stables ?

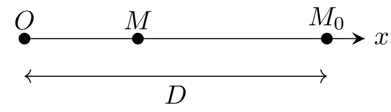
Q.6 Considérons un état initial du pendul lâché à un angle θ_0 sans vitesse initiale. À l'aide de la courbe d'énergie potentielle, décrire le type de mouvement observé. Préciser la répartition de l'énergie mécanique entre énergie potentielle et énergie cinétique.

Q.7 Prenons maintenant θ_0 quelconque mais $\dot{\theta}_0 < 0$ telle que $\mathscr{E}_\mathrm{m} > \mathscr{E}_\mathrm{p,max}$. À l'aide de la courbe d'énergie potentielle, décrire le type de mouvement observé.

Exercice 4 : Curling

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison.

Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point M de masse $m = 20\,\mathrm{kg}$ glissant selon l'axe Ox vers le point M_0 visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale O avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0 \overrightarrow{u}_x$, la maison se trouvant à la distance $D = OM_0 = 25\,\mathrm{m}$ du point O.



Nous supposerons que la force de frottement $\overrightarrow{F} = -F_0 \overrightarrow{u}_x$ de la glace sur la pierre est constante pendant toute la glissade et s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Nous prendrons $F_0 = 3{,}0\,\mathrm{N}$. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide. Le lancé étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête !

Q.1 Que valent les énergies cinétiques initiales $\mathscr{E}_\mathrm{c,i}$ et finale $\mathscr{E}_\mathrm{c,f}$ de la pierre ?

Q.2 Calculer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.

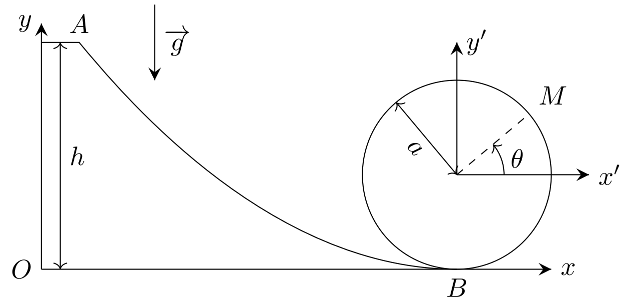
Q.3 Appliquer la loi de l'énergie cinétique à la pierre et en déduire la vitesse v_0 adaptée.

Exercice 5 : Looping

Une voiture de manège de masse $m = 24\,\mathrm{kg}$ est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon $a = 4{,}7\,\mathrm{m}$ de la figure ci-contre.

La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude $h > a$.

h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en constact avec les rails.



Q.1 Exprimer la vitesse v_B en B de la voiture en fonction de g et h.

Q.2 Exprimer la vitesse $v_M(\theta)$ en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.

Soit $\overrightarrow{R}$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.

Q.3 Exprimer $\overrightarrow{R}$ en M en fonction de g, h, m, a et θ.

Q.4 Pour quel point M_0 du cercle la norme de $\overrightarrow{R}$ est-elle minimale ?

Q.5 Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.

Exercice 6 : Cycliste au Tour de France

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante P, les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste ($\overrightarrow{F} = -kv\overrightarrow{v}$) où k est une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

Q.1 En appliquant le théorème de la puissance cinétique, établir une équation différentielle en v et montrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$mv^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k(v_l^3 - v^3)$$

où v_l est une constante dont on cherchera la signification physique.

Q.2 On pose $f(x) = k(v_l^3 - v^3)$, déduire des résultats précédent l'équation différentielle vérifiée par f.

Q.3 Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, s'il aborde la ligne droite avec une vitesse v_0.

Q.4 Application numérique : lors d'un sprint, la puissance développée vaut $P = 2\,\mathrm{kW}$ et la vitesse limite vaut $v_l = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Déterminer la valeur de k et en déduire la distance caractéristique pour qu'un coureur de masse $m = 85\,\mathrm{kg}$ avec son vélo atteigne cette vitesse. Conclure.

Mécanique 5 : Mouvement de particules chargées

Exercice 1 : Action d'un champ magnétique sur un proton ou sur un électron

Un électron et un proton de même énergie cinétique décrivent des trajectoires circulaires dans un champ magnétique uniforme. Comparer :

Q.1 Leur vitesse ;

Q.2 Le rayon de leur trajectoire ;

Q.3 Leur période.

Exercice 2 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

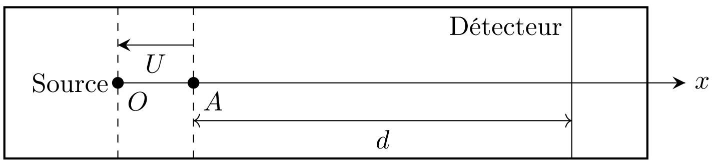
On considère une particule de charge $q > 0$ de masse m animée à l'instant $t = 0$, d'une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$. Elle fait un angle α avec l'axe (Ox) tel que $\overrightarrow{v}_0 = v_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_z)$. Elle est plongée dans un champ $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_z$ avec $E_0 = C^{te} > 0$ uniforme.

Q.1 Déterminer les équations horaires du mouvement.

Q.2 En déduire la trajectoire de la particule.

Exercice 3 : Analyseur à temps de vol linéaire

L'analyse d'un faisceau ionique consiste à séparer les ions les uns des autres selon leur rapport m/q. Dans son principe, l'analyseur à temps de vol linéaire est le plus simple de tous.



La source d'ions fournit des ions de masse m et de charge positive q qui entrent en O avec une vitesse négligeable dans une zone d'accélération (comprise entre O et A) où une tension électrique $U = 15\,\text{kV}$ est appliquée. Les ions parcourent librement la région suivante jusqu'au détecteur situé à la distance $d = 1{,}0\,\text{m}$ de la zone d'accélération. On mesure le "temps de vol" t_v mis par la particule pour parcourir la distance d.

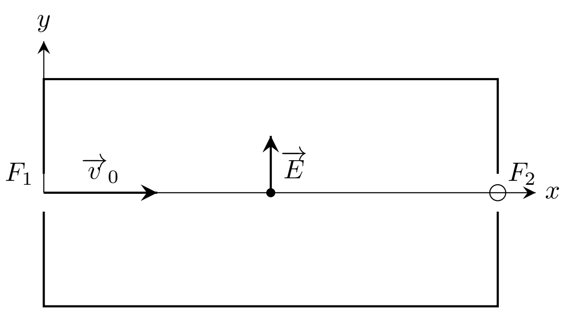
Q.1 Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v}_A$ de l'ion en A.

Q.2 Montrer que la mesure du temps de volt t_v permet de déduire le rapport m/q. Calculer t_v dans le cas d'un ion de masse $m = 3{,}8 \times 10^{-26}\,\text{kg}$ et de charge $q = e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C}$.

Exercice 4 : Filtre de vitesse

Afin de diminuer la dispersion des vitesses des ions dans un spectromètre de masse, il est nécessaire de réaliser un filtrage de vitesse. Le filtre de Wien présenté sur le schéma ci-dessous combine l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_y$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$ perpendiculaires entre eux.

Les deux champs sont uniformes et permanents.



Q.1 Un ion de masse m et de charge q pénètre dans le filtre par la fente F_1 avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Écrire la force de Lorentz alors ressentie par l'ion.

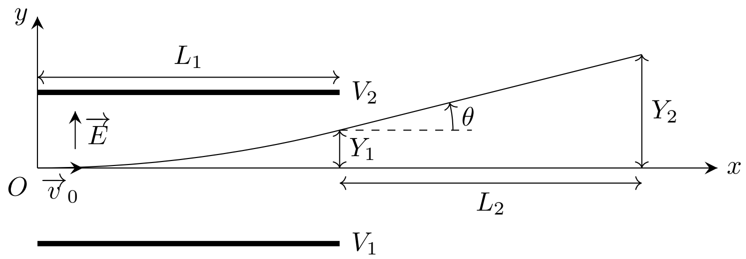
Q.2 À quelle condition l'ion peut-il avoir une trajectoire rectiligne l'amenant à la fente F_2 ?

Q.3 Exprimer en fonction de E et B la vitesse v_0 de l'ion lui permettant d'atteindre la fente F_2.

Exercice 5 : Imprimante jet d'encre

Dans un dispositif d'impression industriel, les gouttelettes d'encre sont chargées puis déviées de manière contrôlée par un déflecteur électrostatique avant d'atteindre le support d'impression.

Une gouttelette de volume $V = 10\,\text{pL}$, de charge $q = 3{,}4 \times 10^{-15}\,\text{C}$ et de vitesse $v_0 = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ entre en O dans le déflecteur constitué de deux électrodes planes portées aux potentiels électriques V_1 et V_2 générant un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_y$ avec $E = 5{,}0 \times 10^5\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. La longueur du déflecteur est $L_1 = 5{,}0\,\text{cm}$. Le support d'impression se trouve à la distance $L_2 = 20\,\text{cm}$ de la sortie du déflecteur. L'encre est enssentiellement consituée d'eau de masse volumique $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



Q.1 Quel est le signe de $V_1 - V_2$ pour que la gouttelette d'encre soit effectivement déviée dans le sens des y croissants ?

Q.2 Calculer la masse m de la gouttelette et montrer que l'on peut négliger son poids devant la force électrique de Lorentz. On donne $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Q.3 Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la gouttelette entre les électrodes et déterminer l'équation de sa trajectoire. En déduire le déplacement Y_1 en sortie du déflecteur.

Q.4 Caractériser la trajectoire de la gouttelette après sa sortie du déflecteur, en négligeant son poids.

Q.5 Exprimer puis calculer la déflexion angulaire θ. En déduire le déplacement Y_2

Exercice 6 : Action de 2 champs magnétiques successifs

Dans le demi-espace $x > 0$, règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_1 = B_0\overrightarrow{u}_z$ et dans le demi-espace $x < 0$, règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_2 = \dfrac{B_0}{2}\overrightarrow{u}_z$. Une particule de masse m de charge $q > 0$ est placée au point origine O du référentiel d'étude galiléen $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$, à $t = 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}(t = 0) = v_0\overrightarrow{u}_x$, $v_0 > 0$.

Q.1 Décrire et dessiner la trajectoire de la particule pour $x > 0$.

Q.2 Décrire et dessiner la trajectoire de la particule pour $x < 0$.

Q.3 Quelle est la vitesse moyenne de la particule suivant (Oy), appelée vitesse de dérive $\overrightarrow{D}$.

Q.4 Reprendre les questions précédentes avec dans les demi-espace $x < 0$ un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_2} = -B_0\overrightarrow{u}_z$.

Exercice 7 : Mesure du rapport e/m

Les bobines d'Helmholtz, du nom d'Hermann Ludwig von Helmholtz, sont un dispositif constitué de deux bobines circulaires de même rayon, parallèles, et placées l'une en face de l'autre à une distance égale à leur rayon. En faisant circuler du courant électrique dans ces bobines, un champ magnétique est créé dans leur voisinage, qui a la particularité d'être relativement uniforme au centre du dispositif dans un volume plus petit que les bobines elles-mêmes.

Un canon à électrons délivre des électrons accélérées sous une tension de $U = 200\,\text{V}$. Ils sont injectés perpendiculairement au champ $\overrightarrow{B}$ entre les bobines de Helmholtz.

Q.1 Calculer la vitesse v_0 de sortie des électrons.

Q.2 Décrire leur trajectoire entre les bobines.

Q.3 Donner le rayon de cette trajectoire en fonction de v_0, e, m, B puis en fonction de $\dfrac{e}{m}$, U et B.

Q.4 Calculer le rapport $\dfrac{e}{m}$ pour un champ de $1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{T}$ et un rayon mesuré de $4{,}7\,\text{cm}$. La tension est toujours de $200\,\text{V}$

Mécanique 6 : Loi du moment cinétique

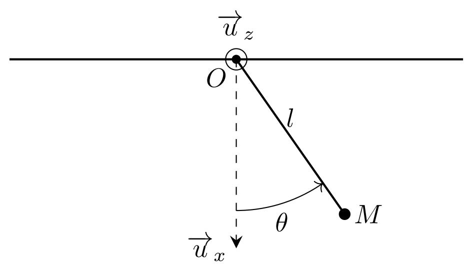
Exercice 1 : Ordres de grandeur des moments cinétiques

Q.1 Lors de son mouvement révolutif autour du Soleil, la Terre T parcourt une trajectoire quasi-circulaire de centre confondu avec le centre du Soleil S et de rayon égal à la distance Terre-Soleil $D_{\mathrm{TS}} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$. Calculer la valeur du moment cinétique de la Terre par rapport à S dans le référentiel héliocentrique. La masse de la Terre vaut $m_{\mathrm{T}} = 6{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Q.2 Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire et uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53\,\mathrm{pm}$ est parcourue à la fréquence $f = 6{,}6 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$. Calculer le moment cinétique de l'électron. On rappelle que sa masse vaut $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 2 : Pendule simple

On considère un pendule simple, constitué d'un fil inextensible de longueur l, sans masse, dont une extrémité est attachée en un point O fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen, et à l'autre extrémité duquel est placé un point matériel M de masse m. On note $\overrightarrow{u}_x$ l'axe vertical vers le bas, et $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la pesanteur. On étudie le mouvement dans le base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$, dans laquelle l'angle θ est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{OM}})$.



Q.1 Exprimer par trois méthodes différentes (calcul de produit vectoriel par composantes, normes et angles, ou bras de levié) le moment cinétique en O de la masse au cours du mouvement, noté $\overrightarrow{L_O}(M)$.

Q.2 Déterminer le moment en O de la tension du fil.

Q.3 Déterminer de trois manières différentes l'expression du moment en O du poids.

Q.4 Démontrer le théorème du moment cinétique à partir de la seconde loi de Newton.

Q.5 En déduire l'équation du mouvement.

Q.6 En déduire l'expression de la période des oscillations de faible amplitude du pendule.

Q.7 Peut-on obtenir l'expression de la tension du fil au cours du mouvement, uniquement à l'aide de considération de moments cinétique ?

Exercice 3 : Pendule conique

On considère un pendule simple, constitué d'un fil inextensible de longueur l, sans masse, dont une extrémité est attachée en un point O fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen, et à l'autre extrémité duquel est placé un point matériel M de masse m.

Un enfant fait tourner le pendule de manière à ce que la masse effectue un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω le plan xO_1y. Le fil OM garde une inclinaison constante α par rapport à la verticale au cours du mouvement.

On étudie le mouvement dans le base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ telle que $\overrightarrow{O_1M} = \rho\overrightarrow{u}_r$.

Q.1 Faire un schéma en perspective de la situation, en faisant apparaître la base cylindrique, puis un schéma dans le plan contenant les points O, O_1 et M.

Q.2 Déterminer le moment cinétique de M et le moment des forces par rapport à l'axe Oz.

Q.3 Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz au pendule. Que peut-on en conclure ?

Q.4 Déterminer le moment cinétique de M et le moment des forces par rapport au point O.

Q.5 Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au point O au pendule. En déduire l'expression reliant ω et α.

Exercice 4 : Enroulement autour d'un cylindre

On considère un palet autoporteur assimilé à un point matériel M de masse m, se déplaçant sans frottements sur un plan horizontal. Il est attachée à l'extrémité d'une ficelle de longueur L dont l'autre extrémité est attachée en un point H_0 de la priphérie d'un cylindre de centre O et de rayon R.

Le fil étant tendu et aligné avec OH_0, on lance M avec une vitesse othoradiale. Au cours de l'enroulement, on note $H(t)$ le point du fil le plus proche de M en contact avec le cylindre, que l'on décrit par ses coordonnées polaires (r, θ). La vitesse initiale de M est donc $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u}_\theta$.

Q.1 Après quelle durée τ le fil commence-t-il à s'enrouler autour du cylindre ? On choisit cet instant comme origine des temps.

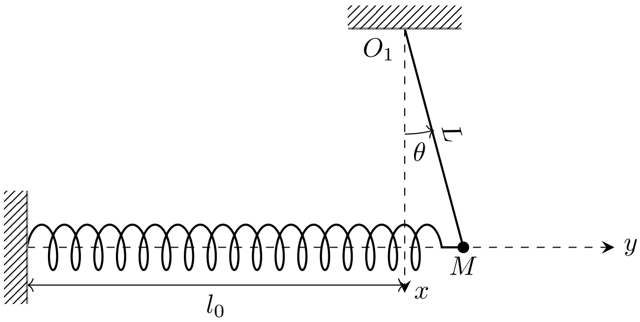
Q.2 Montrer qu'au cours de cet enroulement, le vecteur vitesse de M est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OH}(t)$ et est de norme constante.

Q.3 En déduire l'expression de $\theta(t)$.

Q.4 Déterminer la tension du fil au cours de l'enroulement en fonction des paramètres du problème, et montrer que le fil casse avant que le palet (ponctuel) n'atteigne le cylindre.

Exercice 5 : Oscillations d'un pendule

Un point matériel M (masse m) est relié à un fil inextensible (longueur $O_1M = L$, masse négligeable) et à un ressort horizontal de raideur k et de longueur l_0 au repos. Le fil est vertical lorsque le point matériel se trouve au repos en O_1'. On suppose des petites oscillations quasi horizontales du point M, telles que $O_1'M \ll L$. La position du point M est repérée par l'angle d'inclinaison θ du pendule par rapport à la verticale (angle θ supposé faible).

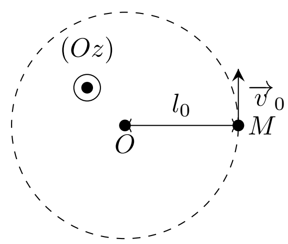


Q.1 Établir l'équation du mouvement pendulaire en utilisant le théorème du moment cinétique.

Q.2 En déduire la période T_0 des petites oscillations.

Exercice 6 : Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil

Une sphère de petite taille et de masse $m = 0{,}10\,\mathrm{kg}$ est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $l_0 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ dont l'autre extrémité est fixée en O. Elle se déplace sur un cercle horizontal de rayon l_0. Sa vitesse est $v_0 = 1{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



Q.1 Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).

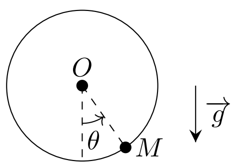
Q.2 On réduit brutalement la longueur du fil à $l_1 = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Que devient la vitesse de la sphère ?

Q.3 Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de la longueur du fil.

Q.4 Quelle force provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère ? Commenter.

Exercice 7 : Particule sur un cerceau immobile

Une particule M, de masse m, glisse dans la rainure intérieure d'un cerceau de rayon R. M est soumise à des frottements fluides, opposés à la vitesse, de coefficient de proportionnalité α. M est initialement placée en $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ sans vitesse initiale.



Q.1 Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la position $\theta(t)$ de M. On se placera ensuite dans le cas de petits angles.

Q.2 Pour quelle valeur critique R_c du cerceau, M atteint-il le plus rapidement possible la position d'équilibre ? Établir dans ce cas l'expression de la position $\theta(t)$ de M et en tracer l'allure.

Q.3 Établir l'expression de la vitesse de M ; tracer l'allure temporelle de sa norme.

Mécanique 7 : Champ de force centrale conservatif

Exercice 1 : Paramètres cosmologiques

Un mobile gravite autour d'un astre sur une trajectoire elliptique de période T et de demi-grand axe a.

Q.1 Rappeler la 3e loi de Kepler.

Q.2 Déterminer la valeur de ce rapport pour un corps qui gravite autour du Soleil en utilisant les paramètres de l'orbite terrestre $T = 1\,\text{an}$ et $a = 1\,\text{ua} = 150 \times 10^6\,\text{km}$.

Q.3 Sachant que $\mathscr{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-3}$, montrer que l'expression théorique de cette constante en fonction de la constante graviationnelle $\mathscr{G}$ et de la masse du Soleil $M_\odot$ permet de déterminer la masse du Soleil.

Q.4 Le produit $\mathscr{G}M_\text{T}$ de la masse de la Terre par la constante de gravitation est égal à $\mathscr{G}M_\text{T} = 3{,}986 \times 10^{14}\,\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. La période de révolution de la Lune autour de la Terre (mois lunaire sidéral) vaut $T = 27{,}3\,\text{jour}$. Déterminer le demi grand-axe de l'orbite de la Lune.

Exercice 2 : Orbite circulaire et géostationnaire

Q.1 Démontrer l'expression de la vitesse d'un corps (de masse m) en orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre attracteur (de masse M).

Q.2 En déduire l'expression de l'énergie mécanique de la masse m sur son orbite circulaire de rayon r_0.

Q.3 Énoncer la 3ème loi de Kepler et la démontrer dans le cas du mouvement circulaire.

On appelle satellite géostationnaire un satellite survolant à chaque instant le même point de la Terre.

Q.4 Dans quel plan la trajectoire d'un satellite géostationnaire est-elle nécessairement comprise ?

Q.5 Calculer l'altitude h d'un satellite géostationnaire. Commenter. Application numérique.

Exercice 3 : Vitesses cosmiques

Le Petit Prince réside sur un astéroïde de rayon $R = 30\,\text{cm}$ et de masse $m = 2{,}0 \times 10^8\,\text{kg}$. La constante de gravitation vaut $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

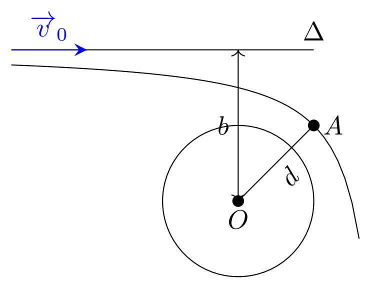
Q.1 Calculer la vitesse de satellisation v_s, c'est-à-dire la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il parcoure une orbite basse autour de l'astéroïde.

Q.2 Calculer la vitesse de libération v_l, c'est-à-dire la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction de l'astéroïde. Conclure.

Q.3 Plus sérieusement, qu'en est-il sur Terre ? La masse de la Terre est $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ et son rayon $R_T = 6{,}4 \times 10^3\,\text{km}$.

Exercice 4 : Chute d'une météorite

Une météorite de masse m a , très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0$ de module v_0 portée par une droite Δ située à une distance b du centre O de la Terre. On suppose que la météorite est soumise uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire tel que la distance Terre-Météorite soit minimale. On note $OA = d$. On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen.
On veut déterminer à partir de quelle valeur de b la météorite s'écrasera sur la Terre. On notera G la constante de gravitation, M la masse de la Terre, supposée sphérique, homogène, de masse volumique ρ, de rayon R.



Q.1 Donner l'expression de la force de gravitation en un point P de la trajectoire tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de la météorite en ce point. On prendra $E_p(r \to +\infty) = 0$.

Q.2 Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ? Justifier. En déduire que la trajectoire est plane.

Q.3 Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Montrer qu'en A, point de la trajectoire le plus proche de O, la vitesse (de norme v_1) est orthogonale à OA.

Q.4 En explicitant la question 2, trouver deux relations liant b, d, G, M, v_0, v_1. En déduire l'expression de d en fonction de G, M, b, v_0.

Q.5 Soit R le rayon de la Terre. Quelle condition doit satisfaire b pour que le météorite rencontre la Terre ?

Exercice 5 : Vitesse d'un satellite à son périgée

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1$ tonnes. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\,\mathrm{km}$ au périgée et $d_A = 35{,}9 \times 10^3\,\mathrm{km}$ à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3{,}5 \times 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Q.1 Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

Q.2 Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.

Q.3 En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

Q.4 On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.

Q.5 En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

Exercice 6 : Énergie mécanique d'un satelite en orbite elliptique

Cet exercice permet de démontrer l'expression, admise de l'énergie mécanique d'un satellite de masse m en orbite sur une ellipse de demi grand-axe a autour de la Terre de masse M_T :

$$E_m = -\mathscr{G}\frac{mM_\mathrm{T}}{2a}$$

On admet que le mouvement est plan et vérifie la loi des aires. On l'étudie en polaire et on note $\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}$ la constante des aires.

Q.1 r varie entre deux valeurs, r_P et r_A, qui correspondent au périgée et à l'apogée de la trajectoire. Réaliser un schéma de la trajectoire et faire apparaître r_A et r_P. En déduire l'expression du grand-axe $2a$ de l'ellipse en fonction de r_A et r_P.

Q.2 Montrer que le mouvement radial peut être étudié à l'aide d'une énergie potentielle effective. Donner son expression et la représenter.

Q.3 Le satellite est dans un état lié et $r \in [r_\mathrm{P}; r_\mathrm{A}]$. Montrer que r_A et r_P sont les solutions d'une équation du 2$^\mathrm{e}$ degré.

Q.4 On rappelle que si r_A et r_P sont solutions d'une équation du 2$^\mathrm{e}$ degré, elles vérifient :

$$(r - r_\mathrm{A})(r - r_\mathrm{P}) = r^2 - (r_\mathrm{A} + r_\mathrm{P}) \times r + r_\mathrm{A} \times r_\mathrm{P} = 0$$

En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction du grand-axe de l'ellipse.

Exercice 7 : Ellipse de Hohmann

Pour effectuer le voyage Terre-Mars, il faut transférer un objet de l'orbite terrestre à l'orbite martienne. Durant ce transfert, on néglige l'attraction des planètes pour ne retenir que celle du Soleil. L'une des trajectoires possibles est une ellipse, dont le Soleil est un des foyers, tangente à l'orbite terrestre en son périgée P, tangente à l'orbite martienne en son apogée A et coplanaire à l'orbite terrestre. On assimile la trajectoire de la Terre autour du Soleil à un cercle de rayon a_0 décrit à la vitesse $v_0 = 30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et celle de Mars à une orbite circulaire coplanaire à l'orbite terrestre de rayon $a_1 = na_0 = 1{,}5a_0$.

Q.1 Expliquer comment se fait le transfert à l'aide d'un schéma simple.

Q.2 Calculer la vitesse orbitale v_1 de Mars et la durée T_1 de l'année martienne en fonction de T_0 la période de révolution de la Terre.

Q.3 Pour que le transfert s'effectue bien en partant de la Terre au périgée de l'ellipse et en arrivant sur Mars à l'apogée de l'ellipse, l'angle entre la Terre et Mars au départ doit avoir une valeur α_0. Exprimer la périodicité de ce positionnement en fonction de T_1 et T_0 la période de révolution de Mars et de la Terre.

Q.4 Quelle doit être la vitesse v_p de l'engin spatial au point P de l'ellipse de Hohmann ? On exprimera v_p en fonction de v_0 et n. Faire l'application numérique.

Q.5 Quelle doit être la vitesse v_a de l'engin spatial au point A de l'ellipse de Hohmann ? On exprimera v_a en fonction de v_1 et n. Faire l'application numérique.

Q.6 Déterminer la durée du transfert entre la Terre et Mars (en années terrestres).

Mécanique 8 : Introduction à la mécanique du solide

Exercice 1 : Soulèvement d'une brouette

On étudie la force nécessaire pour soulever une brouette chargée de masse totale $m = 30\,\mathrm{kg}$, dont la roue est fixe. La distance entre l'axe de la roue et les poignées de la brouette est de $1{,}2\,\mathrm{m}$ et son centre de gravité est sur l'axe roue-poignées, à une distance de $40\,\mathrm{cm}$ de la roue.

Q.1 Quelle force minimale faut-il exercer vers le haut pour augmenter l'inclinaison de la brouette depuis l'horizontale ?

Q.2 Et lorsque l'axe roue-poignée fait un angle de $45°$ avec l'horizontale ?

Q.3 Reprendre les deux questions mais avec une force orthoradiale.

Exercice 2 : Pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'un solide dans un champ de pesanteur uniforme, lié à un bâti immobile dans le référentiel d'étude par une liaison pivot horizontale dont l'axe Δ ne passe pas par son centre de gravité G.

On nomme O le projeté orthogonal de G sur l'axe de la liaison, et on note m la masse du solide et J son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ. On repère se position par les coordonnées cylindriques de G, situé à une distance d de l'axe Δ, en prenant pour référence pour l'angle θ la verticale vers le bas On considère de plus la liaison pivot comme idéale.

Q.1 Démontrer l'expression de moment cinétique scalaire du pendule par rapport à Δ noté $L_\Delta(S)$.

Q.2 Déterminer l'équation du mouvement du pendule pesant.

Q.3 En déduire l'expression de l'intégrale première du mouvement.

Q.4 Dans le cas des petites oscillations, exprimer la période du mouvement. Que-ce passe-t-il dans le cas du pendule simple ?

Q.5 À l'aide d'un langage de programmation, montrer que les oscillations d'amplitude quelconques ont une période dépendant de l'amplitude.

Exercice 3 : Face cachée de la Lune

Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en $27{,}3\,\mathrm{jour}$. La distance du centre de la Terre au centre de la Lune vaut $D_{\mathrm{TL}} = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$. Lors de cette révolution, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

Q.1 Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. On s'attachera particulièrement à distinguer s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou de rotation.

Q.2 En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ de la révolution du centre de la Lune sur sa trajectoire.

Q.3 Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.

Q.4 Décrire le mouvement de la Lune dans le repère sélénocentrique qui a les mêmes axes de références que le référentiel géocentrique mais pour origine le centre L de la Lune.

Q.5 Déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{\mathrm{p}}$ de la rotation de la Lune sur elle-même.

Exercice 4 : Démarrage d'une machine tournante

Une machine tournante est entraînée par un moteur de fréquence nominale $1500\,\mathrm{tour}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. Celui-ci exerce un couple moteur constant de $40\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Le moment d'inertie de l'ensemble de la chaîne cinématique rapporté à l'axe du rotor est de $12{,}5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Le couple résistance dû aux frottements est supposé constant et égal à $4{,}0\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$.

Q.1 Calculer l'accélération du moteur pendant le démarrage.

Q.2 Calculer le temps mis pour atteindre la fréquence nominale.

On tient maintenant compte d'une force de frottement visqueuse qui exerce un couple proportionnel à la vitesse angulaire de rotation du type $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$.

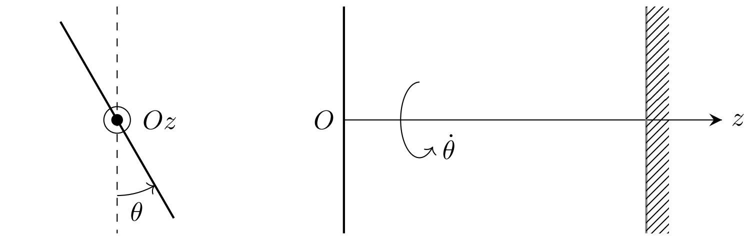
Q.3 Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Q.4 Estimer la valeur de α permettant d'obtenir une vitesse angulaire limite de $1500\,\mathrm{tour}\cdot\mathrm{min}^{-1}$.

Q.5 Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ainsi que le temps mis pour atteindre 99% de la vitesse angulaire limite.

Exercice 5 : Pendule de torsion

Lors de ses expériences d'électrostatique, qui lui permirent d'en déduire l'expression de l'interaction électrostatique, Coulom utilisait des pendules de torsion. Un pendule de torsion est constitué d'une tige homogène fixé en son milieu à une ficelle. On fait tourner le bâton sur lui même d'un angle θ afin de tordre la ficelle. Celle-ci exerce alors un couple de rappel élastique proportionnel à l'angle θ : $\overrightarrow{\Gamma}_e = -C\theta\overrightarrow{u}_z$.



Position d'équilibre

Q.1 À l'instant initial, on écarte le pendule d'un angle θ_0. Déterminer, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle du mouvement.

Q.2 Déterminer la période d'oscillation du pendule.

Q.3 Faire une analogie avec un problème déjà traité.

Q.4 Calculer la puissance $\mathscr{P}$ du couple de torsion, ainsi que le travail W du couple entre les angles θ_1 et θ_2.

Q.5 Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. L'exprimer.

Q.6 Poursuivre l'analogie.

Q.7 En appliquant le théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation du mouvement du pendule de torsion.

Exercice 6 : Volant d'inertie

Dans une machine tournante, la partie mobile nommée rotor possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation fixe. Le rotor est soumis a un couple moteur $\Gamma_m = \Gamma_0$ constant, ainsi que des frottements fluides de moment $\mathscr{M} = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire de rotation.

Q.1 Expliquer quel est le signe de α.

Q.2 Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$ par une méthode dynamique. On donnera notamment sa vitesse finale ω_f et un temps caractéristique d'évolution τ. On commentera la dépendance de ces quantités par rapport à α.

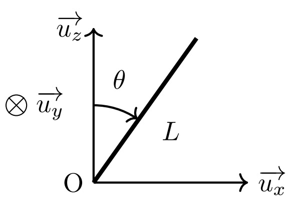
Q.3 En fait, suite à des vibrations du dispositif, le couple moteur varie comme $\Gamma_0(1+r\cos(\Omega t))$, où r est liée à l'intensité de la perturbation et Ω est sa pulsation. On cherche, après la fin du régime transitoire, une évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ sous la forme $\omega(t) = \omega_f + A\cos(\Omega t - \phi)$ où A et ϕ sont des constantes. Quelle est la durée du régime transitoire ?

Q.4 Exprimer A et $\tan\phi$ en fonction de r, Ω, τ et ω_f. On pourra utiliser la notation complexe.

Q.5 Expliquer pourquoi, afin de régulariser le fonctionnement du rotor, on lui fixe un anneau de masse assez importante et grand rayon, appelé volant d'inertie. Quelles sont les limites de cette méthode ?

Exercice 7 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il forme avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre est immobile et forme un angle de $\theta_0 = 5°$ avec la verticale. Le moment d'inertie par rapport à une extrémitié de l'arbre est $J = m\dfrac{L^2}{3}$.



Q.1 Établir l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.

Q.2 Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne : $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} \approx 5$