Cours de Mécanique
MPSI 2023-2024

Quentin Roveillo

28 décembre 2023

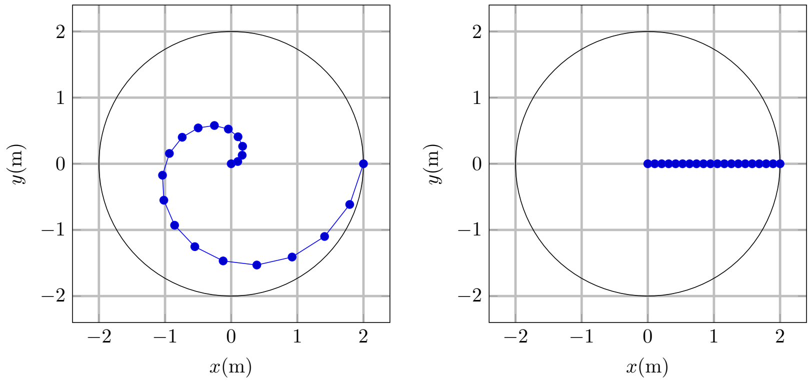
Table des matières

Mécanique 1 : Cinématique du point matériel

1 Relativité du mouvement

On considère un homme qui marche sur un manège en rotatin du centre vers le bord en ligne droite :

- une caméra située sur le plafond du manège filme ;
- une caméra située sur un arbre filme



Question : Quelle figure correspond à quel point de vue ? On voit alors que le mouvement est relatif à l'observateur.

Definition : Référentiel

C'est un solide qu'on considère comme fixe et auquel est lié l'observateur du mouvement.

Le référentiel est caractérisé par :

- un repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$;
- une horloge qui définit une origine des temps $t = 0$ et la mesure des instants suivants t.

Remarque :

- Un instant t ou t_1, qui correspond à une coordonnée temporelle par rapport à son origine.
- Une durée $\Delta t = t_2 - t_1$ qui correspond à la variation de temps séparant deux instants t_1 et t_2.
- Les trois vecteurs $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{u}_z$ peuvent être quelconques tant qu'ils ne sont pas colinéaires et qu'ils sont fixes dans $\mathscr{R}$.
- Définir un référentiel est la première étape lors d'une étude de mécanique. On ne peut étudier un mouvement si on ne sait pas dans quel référentiel on se place. Pour le définir, il faut préciser à quel objet le référentiel est lié, et donner une origine et trois axes.

Definition : Base orthonormée directe (BOND)

Une base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ est orthonormée directe si :

- Vecteurs normés : $\|\overrightarrow{u_x}\| = \|\overrightarrow{u_y}\| = \|\overrightarrow{u_z}\| = 1$
- Vecteurs orthogonaux : $\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_y} \cdot \overrightarrow{u_z} = 0$
- Base directe : $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z}$ (règle de la main droite)

Propriété : Produit scalaire

Pour deux vecteur $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$ qu'on exprime dans une BOND $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$:

$$\overrightarrow{P} = P_x \overrightarrow{u}_x + P_y \overrightarrow{u}_y + P_z \overrightarrow{u}_z \text{ et } \overrightarrow{Q} = Q_x \overrightarrow{u}_x + Q_y \overrightarrow{u}_y + Q_z \overrightarrow{u}_z$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{P} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = \|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{Q}\| \cos(\alpha) \text{ avec } \alpha(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$$

Propriété : Hypothèses non-relativistes

Lors d'une description classique on a :

- les durées $\Delta t = t_2 - t_1$ qui ne dépendent pas du référentiel d'étude ;

- les distances entre deux points M_1 et M_2 :

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$

qui ne dépendent pas du référentiel d'étude.

Ces deux propriétés ne sont valables que lorsqu'on peut décrire de manière classique le mouvement. Si la vitesse des objets devient non négligeable devant le vitesse de la lumière c, on assiste à une dilatation du temps et de l'espace en fonction du référentiel d'observation. C'est la mécanique relativiste d'Einstein.

Propriété : Produit vectoriel

Pour deux vecteur $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$ qu'on exprime dans une BOND $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ on définit le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{P} \wedge \overrightarrow{Q} = -\overrightarrow{Q} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_yQ_z - P_zQ_y \\ P_zQ_x - P_xQ_z \\ P_xQ_y - P_yQ_x \end{pmatrix} = \overrightarrow{W}$$

avec $\overrightarrow{W}$ qui est orthogonal au plan défini par $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$. On a également

$$\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{P}\|\|\overrightarrow{Q}\|\sin(\alpha) \text{ avec } \alpha(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$$

Exemple : Référentiel héliocentrique

Lié au centre du Soleil et à trois étoiles «fixes», c'est-à-dire suffisamment lointaines pour nous paraître fixes sur la durée du problème. Le soleil tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté $\mathscr{R}_K$.

Exemple : Référentiel géocentrique

Lié au centre de la Terre et à trois étoiles «fixes». En translation par rapport au référentiel héliocentrique. La Terre tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté $\mathscr{R}_G$.

Exemple : Référentiel Terrestre

Lié à la Terre, il peut se présenter en un point quelconque de la planète. Il est en rotation autour du centre de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. C'est très souvent le référentiel classique en laboratoire. Noté $\mathscr{R}_T$.

Definition : Trajectoire

La trajectoire d'un point M, dans un référentiel donné, est l'ensemble des positions de ce point au cours du temps, rapportées à un repère fixe dans ce référentiel.

2 Repérage d'un point

Definition : Point matériel

Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même.

Remarque :

Pour un même système d'étude on pourra en fonction de la situation considérer le système comme un point matériel ou pas. Par exemple dans le cas de la rotation de la Terre autour du Soleil, l'étude de la trajectoire ne nécessite pas de prendre en compte la rotation de la Terre sur elle-même ni son rayon qui est très petit devant la distance Terre-Soleil ($R_T = 6400\,\text{km} \ll d_{ST} = 150 \times 10^6\,\text{km}$). En revanche si on souhaite étudier le mouvement de rotation de la Terre on ne pourra alors plus la considérer comme un point matériel.

Definition : vecteur position

La position du point M, par rapport au point O fixe dans un référentiel $\mathscr{R}$, à un instant donné, est défini par la vecteur position :

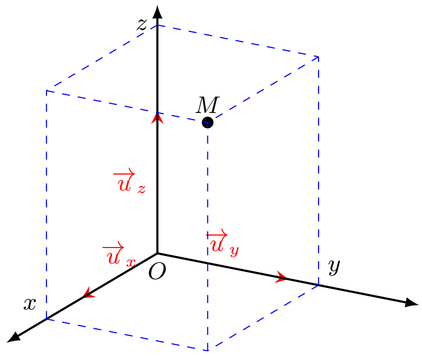
$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Definition : Coordonnées Cartésiennes

C'est le repère fixe par définition dans le référentiel d'étude. Il est définit à partir d'une origine O fixe et d'une BOND $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe également.

Le vecteur position s'exprime dans ce repère en fonction des coordonnées cartésienne (x, y, z) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z}$$



Propriété :

Pour un vecteur $\vec{P}$ quelconque dans le repère cartésien, on peut calculer ses coordonnées (P_x, P_y, P_z) en faisant la projection du vecteur sur chaque axe du repère. Pour ça on utilise le produit scalaire :

$$P_x = \vec{P} \cdot \vec{u_x}\,;\; P_y = \vec{P} \cdot \vec{u_y}\,;\; P_z = \vec{P} \cdot \vec{u_z}$$

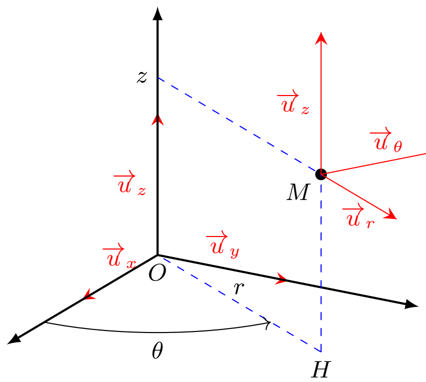
Definition : Coordonnées cylindriques

On définit une BOND mobile liée au point M tel que :

- On projette le point M dans le plan Oxy pour obtenir le point H ;
- On définit $r = \|\overrightarrow{OH}\|$ et $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$;
- On définit $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$ et $\vec{u}_\theta = \vec{u_z} \wedge \vec{u_r}$;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t) + z(t)\vec{u}_z}$$



Propriété : Liens entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

On peut projeter les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne :

$$\vec{u}_r = (\vec{u_r} \cdot \vec{u_x})\vec{u}_x + (\vec{u_r} \cdot \vec{u_y})\vec{u}_y$$

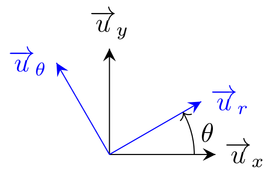
$$\vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$$

$$x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u_x} = r\cos(\theta)$$

$$\vec{u}_\theta = (\vec{u_\theta} \cdot \vec{u_x})\vec{u}_x + (\vec{u_\theta} \cdot \vec{u_y})\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y$$

$$y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u_y} = r\sin(\theta)$$



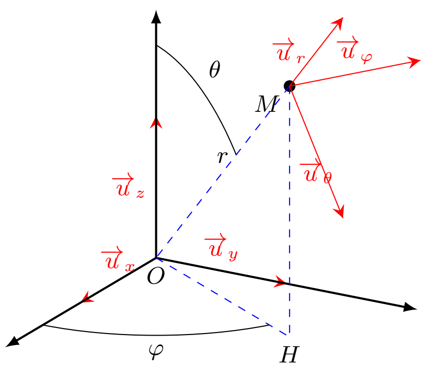
Definition : Coordonnées sphériques

On définit une BOND mobile tel que :

- $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$;
- l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r)$;
- $\vec{u}_\theta$ est orthogonal à $\vec{u}_r$ et dans le plan OMH et orienté dans le sens de θ ;
- $\vec{u}_\varphi$ correspond au $\vec{u}_\theta$ des coordonnées cylindriques ;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)}$$



Definition : Déplacement élémentaire

On définit $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ (ou $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$) tel que entre un instant t et un instant infiniment proche $t + \mathrm{d}t$, le point M s'est déplacé de :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) \qquad \text{avec } \overrightarrow{\mathrm{d}l} \text{ tangent à la trajectoire}$$

Propriété : Expression de $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ à partir d'un schéma

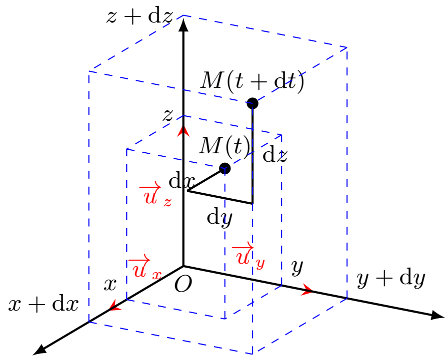
Coordonnées cartésiennes :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (x, y, z)

On a les coordonnées du point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$

où $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} \approx \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u}_x + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u}_y + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u}_z}$$



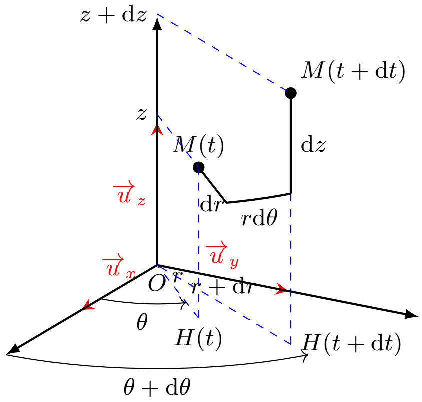
Coordonnées cylindriques :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (r, θ, z)

On a les coordonnées du point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$

où $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} \approx \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u}_z}$$



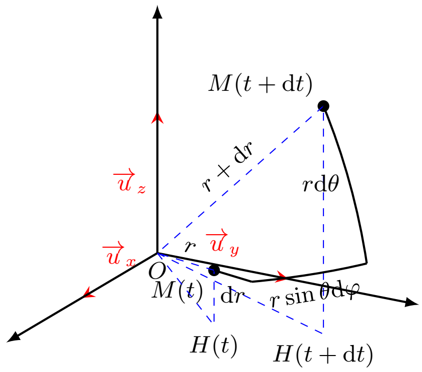
Coordonnées sphériques :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (r, θ, z)

On a les coordonnées du point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$

où $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} \simeq \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$



3 Vitesse d'un point

Definition : Vitesse expérimentale

Si on connaît la position du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à un instant t_1 et à un instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ alors on peut approcher expérimentalement la vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à l'instant t_1 tel que :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t_1) = \left.\frac{\overrightarrow{OM}(t_1 + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{\Delta t}\right|_{\mathscr{R}}$$

Definition : Vitesse instantannée

Dans la limite où $\Delta t \to 0$ on définit la vitesse instantannée du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ par :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}$$

On note généralement $v = \|\vec{v}\|$.

Remarque :

La vitesse, tout comme la position et la trajectoire, dépend du référentiel. C'est pour cela que nous préciserons toujours dans sa notation ainsi que celle de la dérivée, le référentiel.

Il ne faut pas confondre référentiel et système de coordonnée. On peut exprimer un vecteur dans une base mobile (cylindrique ou sphérique) et le dériver dans une référentiel associé à une base fixe (cartésienne).

Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir l'expression du vectuer vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ en coordonnées cartésiennes il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe :** On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}(x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z + x(t)\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_x}{\mathrm{d}t}}\right|_{\mathscr{R}} + y(t)\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_y}{\mathrm{d}t}}\right|_{\mathscr{R}} + z(t)\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t}}\right|_{\mathscr{R}}\end{aligned}$$

  On obtient alors : $\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z}$

- **À partir du déplacement élémentaire :** On divise simplement le déplacement élémentaire par $\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \frac{\mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z\end{aligned}$$

Remarque :

La norme de la vitesse en coordonnée cartésienne vaut : $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Par soucis d'allégement des notations, les dérivées des grandeurs scalaires comme x, y, z, r, θ et φ seront notée $\dot{x}$, ...

Propriété : Expression en coordonnées cylindriques

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ en coordonnées cylindriques il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe :** On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}(r(t)\vec{u}_r(t) + z(t)\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z + r(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} + z(t)\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t}}\right|_{\mathscr{R}}\end{aligned}$$

  On doit alors calculer la dérivée du vecteur $\vec{u}_r$ par rapport au temps dans le référentiel $\mathscr{R}$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\cos(\theta(t))\vec{u}_x + \sin(\theta(t))\vec{u}_y)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\sin(\theta(t))\vec{u}_x + \cos(\theta(t))\vec{u}_y) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

  On obtient alors : $\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$

- **À partir du déplacement élémentaire :** On divise simplement le déplacement élémentaire par dt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u}_\theta + \mathrm{d}z\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

4 Accélération d'un point

Definition : accélération expérimentale

Si on connaît la vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à un instant t_1 et à un instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ alors on peut approcher expérimentalement l'accélération du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à l'instant t_1 tel que :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t_1) = \left.\frac{\overrightarrow{v}(t_1+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t_1)}{\Delta t}\right|_{\mathscr{R}}$$

Definition : accélération instantannée

Dans la limite où $\Delta t \to 0$ on définit l'accélération instantanée du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ par :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathscr{R}}$$

Remarque :

Un mouvement peut être accéléré même si la norme de la vitesse reste constante. Pour savoir si un mouvement est non accéléré il faut que le *vecteur accélération* soit nul, autrement dit $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \overrightarrow{0}$.

Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes

On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}$$

On obtient alors : $\boxed{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z}$

Propriété : Expression en coordonnées cylindriques

On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \ddot{r}\overrightarrow{u}_r + \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z + \dot{r}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} + r\dot{\theta}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} + z(t)\cancel{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}} \\ &= \ddot{r}\overrightarrow{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\dot{\theta}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\ &= \ddot{r}\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z + r\dot{\theta}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}\end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u}_r$ par rapport au temps dans le référentiel $\mathscr{R}$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(-\sin(\theta(t))\overrightarrow{u}_x + \cos(\theta(t))\overrightarrow{u}_y)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\cos(\theta(t))\overrightarrow{u}_x - \sin(\theta(t))\overrightarrow{u}_y) = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}_r$$

On obtient alors : $\boxed{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = (\ddot{r} - r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z}$

Definition : Repère de Frenet

On définit le vecteur tangent à la trajectoire $\overrightarrow{u_T}$ par :

$$\overrightarrow{u_T} = \frac{\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}}{\|\overrightarrow{v(M)_{/\mathscr{R}}}\|}$$

On définit le vecteur normal $\overrightarrow{u_N}$ comme le vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_T}$ tourné d'un angle $+\frac{\pi}{2}$.
On admet alors que l'expression pour un trajectoire plane de l'accélération d'un point M dans le repère de Frenet s'exprime :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T}$$

avec R le rayon de courbure de la trajectoire au point M, v la norme du vecteur vitesse et $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ la dérivée temporelle de la norme du vecteur vitesse.

Propriété : Degrés de liberté du mouvement

Lors d'un mouvement à vecteur accélération constant, on a deux situations possibles :

- Le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ est colinéaire au vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}$, dans ce cas le mouvement est à une dimension.
- Le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ n'est pas colinéaire au vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}$, dans ce cas le mouvement est à deux dimension.

5 Exemples :

Exemple : Mouvement de vecteur accélération constant

Système : On étudie le mouvement du point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire (Terrestre).

On considère que $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \overrightarrow{C^{te}} = \overrightarrow{a}_0$. Quel est la base la plus adapté pour étudier le mouvement ?
Si le vecteur accélération est constant au cours du mouvement, alors on peut choisir un vecteur de la base constant et colinéaire à $\overrightarrow{a}_0$ dans $\mathscr{R}$. On définit donc le repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ tel que :

$$\overrightarrow{a}_0 = a_0\overrightarrow{u}_z \text{ et } \overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v}(t=0) = v_{0x}\overrightarrow{u}_x + v_{0z}\overrightarrow{u}_z = v_0(\cos\alpha\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\overrightarrow{u}_z)$$

On obtient alors le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_{0z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_{0z}t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$$

On peut alors obtenir l'équation de la trajectoire parabolique en exprimant $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ on obtient :

$$z = \frac{a_0 x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + z\tan\alpha = \frac{a_0}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$$

Exemple : Mouvement circulaire

Système : On étudie le mouvement du point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire (Terrestre).

On cherche à étudier le mouvement circulaire du point M. La base la plus adaptée pour exprimer les coordonnées du point M est la base cylindrique tel que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{u}_r + z(t)\overrightarrow{u}_z$$

Comme le mouvement est circulaire on a :

$$z(t) = C^{te} = z_0 \text{ et } r(t) = C^{te} = R$$

On choisit le base cylindrique tel que :

$$\theta(t=0) = 0 \text{ et } z_0 = 0$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r$$

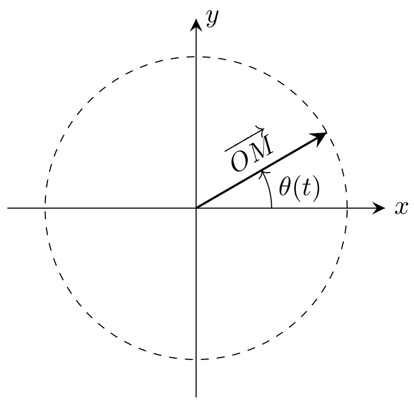
On a alors le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On a alors le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \overrightarrow{a}_N + \overrightarrow{a}_T$$



En utilisant $v = \|\overrightarrow{v}\| = R\dot{\theta}$, on peut exprimer l'accélération : $\overrightarrow{a}_N = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{a}_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_\theta$ On a alors deux types de mouvements circulaires :

- Le mouvement circulaire uniforme si $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. Alors $v = R\omega = C^{te}$ où ω est la vitesse de rotation en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
- Le mouvement circulaire non uniforme si $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Alors l'accélération comporte deux composantes.

Mécanique 2 : Dynamique du point matériel

Remarque : Contexte

Dans ce chapitre nous allons voir les trois lois fondamentales sur lesquelles reposent toute la théorie classique de la mécanique Newtonienne ainsi que la liste des forces à connaître pour le programme.

Le but est d'abord d'illustrer la méthodes de résolution sur des exemples simples vu en terminal mais dont la rédaction et la rigueur devront être en cohérence avec la manipulation des vecteurs et des coordonnées cinématique vu au chapitre précédent.

On verra ensuite l'introduction des forces de frottements et l'impact sur le mouvement d'un point.

1 Principe d'inertie

Definition : Masse inertielle

C'est une grandeur caractéristique d'un point matériel qui est :

- positive ;
- conservative, elle est constante au cours du mouvement pour un système fermé ;
- extensive, additive ;
- invariante par changement de référentiel en mécanique classique.

Remarque :

Par commodité on appelle masse intertielle : masse

Definition : Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{M/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}} \text{ en kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Definition : Système isolé ou pseudo-isolé

Si aucune action mécanique ne s'énerve sur un système on dit qu'il est isolé.

Si toutes les actions mécaniques qui s'exercent sur un système se compensent, alors il est pseudo-isolé.

Première loi de Newton

On postule l'existence de référentiels dit galiléens ou inertiels où un point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Propriété : Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen **ssi** il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

Remarque : Les référentiels supposés galiléens classiques

Il n'existe pas de référentiel strictement galiléen. En revanche on peut supposer qu'un référentiel est supposé galiléen si le temps de l'expérience est petit devant le temps caractéristique du mouvement :

- Le référentiel terrestre $\mathscr{R}_T$ $(\Delta t \ll T_{\text{jour}})$;
- Le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$ $(\Delta t \ll T_{\text{année}})$;
- Le référentiel héliocentrique $\mathscr{R}_S$ $(\Delta t \ll T_{\text{galaxie}})$;

2 Principe fondamental de la dynamique

Definition : Force

Une force est une action mécanique qui modifie le vecteur vitesse d'un point matériel.

Propriété : Modélisation d'une force

Une force se modélise mathématiquement à l'aide d'un vecteur, noté généralement $\overrightarrow{F}$ et possède :

- Un point d'application qui est l'origine du vecteur ;
- Une direction et un sens qui sont décrits dans une BOND $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u}_x + F_y\overrightarrow{u}_y + F_z\overrightarrow{u}_z$;
- Une intensité $\|\overrightarrow{F}\|$ exprimée en N.

Une force s'applique forcément d'un point M_1 sur un point M_2. On note alors :

$$\overrightarrow{F}_{M_1\to M_2}$$

Remarque :

Chaque force possède un point d'application car les objets réels ne sont pas des points matériel mais des solides. Dans le modèle du point matériel on suppose que toutes les forces s'appliquent sur le point matériel.

Seconde loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel M, de masse m est égale à la résultante $\overrightarrow{F}_{ext\to M}$ des forces extérieures s'appliquant au point matériel.

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{M/\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \overrightarrow{F}_{ext\to M}}$$

Remarque :

Le PFD est une équation différentielle vectorielle, elle cache donc trois équations différentielles scalaires appelées équations du mouvements. Les solutions de ces équations du mouvements avec les conditions initiales données sont appelées équations horaires du mouvement.

Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

Soient deux points matériels M_1 et M_2. Si M_1 exercice une force $\overrightarrow{F}_{M_1\to M_2}$ sur M_2 alors le point M_2 exercice une force $\overrightarrow{F}_{M_2\to M_1}$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}}$$

Les deux forces ont alors :

- Même direction ;
- Même intensité ;
- Des sens opposés.

L'Interaction gravitationnelle

On considère deux points matériels M_1 et M_2 de masse respectives m_1 et m_2 et de position dans le repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

On caractérise alors la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{2\to 1}$ de M_2 sur M_1 :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{F}_{2\to 1} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{2\to 1}}$

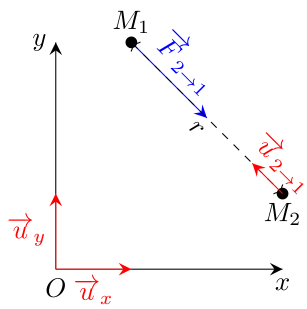
direction : colinéaire à $\overrightarrow{M_2M_1}$;

Sens : Toujours attractive.

Norme : $\|\overrightarrow{F_{2\to 1}}\| = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$;

Point d'application : Le centre de gravité ;

Type : Force à distance.



avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ la constante de gravitation universelle, r la distance entre M_1 et M_2 et $\overrightarrow{u}_{2\to 1}$ le vecteur unitaire qui part de M_2 en direction de M_1.

Le poids

On considère une masse m soumise au champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$. On caractérise alors le poids $\overrightarrow{P}$ qu'exerce la

Terre sur la masse m :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z}$

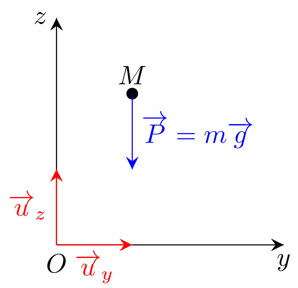
direction : verticale ;

Sens : dirigée vers le sol ;

Norme : $\|\overrightarrow{P}\| = mg$;

Point d'application : Le centre de gravité de la masse m ;

Type : Force à distance.



avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur de direction verticale et dirigée vers le bas.
La direction et la norme de $\overrightarrow{g}$ dépendent en pratique de l'altitude et des coordonnées du point M à la surface de la Terre.

La tension d'un fil

On considère une masse m accrochée à un fil. Un fil inextensible possède une tension $\overrightarrow{T}$ constante tout le long du fil.
On caractérise la tension $\overrightarrow{T}$ qu'éxerce le fil sur la masse m par :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{T} = -\|\overrightarrow{T}\|\overrightarrow{u}}$

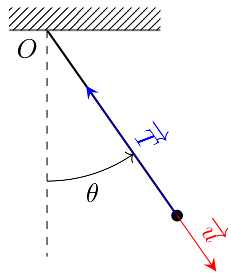
direction : colinéaire au fil ;

Sens : Du support vers le système ;

Norme : À calculer ;

Point d'application : L'attache du fil ;

Type : Force de contact.



Réaction normale du spport

On considère une masse m en contact avec une surface. La surface exerce une force appelée réaction normale et notée $\overrightarrow{R}_N$ sur la masse m. On caractérise alors $\overrightarrow{R}_N$:

Expression : $\boxed{\overrightarrow{R}_N = \|\overrightarrow{R_N}\|\overrightarrow{n}}$

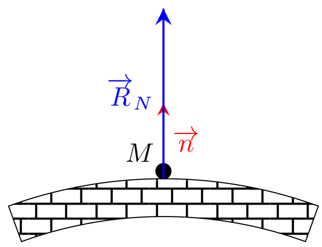
direction : orthogonale à la surface ;

Sens : De la surface vers la masse ;

Norme : À calculer ;

Pt d'application : Barycentre de la surface de contact ;

Type : Force de contact.



Les frottements fluides

On considère une masse m en mouvement par rapport à un fluide visqueux, le fluide exercice une action mécanique appelée frottement fluide $\overrightarrow{f}$ qu'on peut modéliser suivant deux modèles :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{f} = \begin{cases} -\lambda\overrightarrow{v}(M)_{/fluide} \\ -\kappa v\overrightarrow{v}(M)_{/fluide} \end{cases}}$

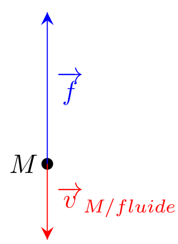
direction : tangente au mouvement, colinéaire au vecteur vitesse ;

Sens : opposé au vecteur vitesse, opposé au mouvement ;

Norme : $\|\overrightarrow{f}\| = \begin{cases} \lambda v \\ \kappa v^2 \end{cases}$;

Point d'application : barycentre de la surface de contact ;

Type : Force de contact.



Ces deux modèles découlent de l'analyse via la mécanique des fluides, le modèle linéaire s'applique pour des vitesse faibles par rapport au fluide, et le modèle quadratique pour des vitesses plus importantes.

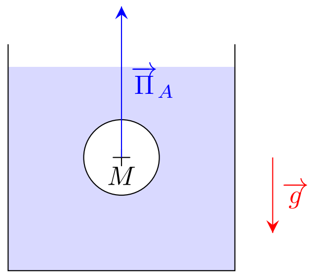
La poussée d'Archimède

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression est appelée poussée d'Archimède

$\overrightarrow{\Pi}_A$ est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

On caractérise $\overrightarrow{\Pi}_A$ par :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{\Pi}_A = -\rho_{fluide} V \overrightarrow{g}}$
direction : verticale ;
Sens : vers la surface (vers le haut) ;
Norme : $\|\overrightarrow{\Pi_A}\| = V\rho_{fluide} g$;
Point d'application : centre de gravité du fluide déplacé ;
Type : Force de contact.



Avec V le volume de fluide déplacé, et ρ_{fluide} la masse volumique du fluide déplacé.

Exemple :

Un glaçon de forme cylindrique (hauteur $h = 3\,\mathrm{cm}$, rayon $R = 1\,\mathrm{cm}$) flotte à la surface d'une eau à $0\,°\mathrm{C}$. Le cylindre est immergé d'une hauteur $x = 2{,}8\,\mathrm{cm}$. Quelle est la norme de la poussée d'Archimède ?

On calcule tout d'abord le volume du glaçon immergé $V_i = \pi R^2 x$. On en déduit alors la norme de la poussée d'Archimède :

$$\|\overrightarrow{\Pi_A}\| = \pi R^2 x \rho_l g = 3{,}14 \times (1 \times 10^{-2})^2 \times 1{,}00 \times 10^3 \times 9{,}81 \approx 30{,}1\,\mathrm{N}$$

Méthode : Résoudre un problème de dynamique du point

- Faire un schéma en utilisant des couleurs avec en évidence la ou les BOND utiles, les coordonnées du points M, d'autres paramètres importants.
- Définir le système étudié ! (Dans certains exercices plusieurs points matériels existent et il faut bien définir le système).
- Choisir un référentiel et préciser sa nature (galiléen, supposé galiléen, ou non galiléen).
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieur s'appliquant au système, dans le bilan exprimer chaque action mécanique dans la BOND utilisée.
- Appliquer le PFD.
- Faire une projection du PFD dans la BOND choisie.
- Obtenir la ou les équations du mouvement.
- Résoudre la ou les équations du mouvement pour obtenir les équations horaires du mouvement.
- Obtenir l'équation de la trajectoire en éliminant le temps dans les équations horaire.

3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Definition : Champ de pesanteur uniforme

On appelle champ de pesanteur uniforme lorsque la résultante des forces extérieure qui s'applique à un point M de masse m s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} \qquad \text{où} \quad \overrightarrow{g} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Propriété : Mouvement à accélération constante

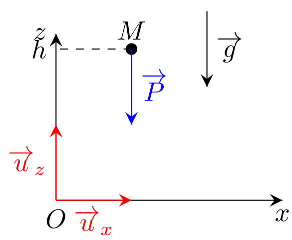
Dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$ le mouvement d'un point M de masse m est à vecteur accélération constante tel que :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{g}$$

Exemple : Chute libre

Soit un point M de masse m, lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h :

Système : $\{M(m)\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen
Bilan des forces : • $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g}$



Coordonnées : Cartésienne et mouvement à un dégrès de liberté.

$$\overrightarrow{OM} = z(t)\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

Équation du mouvement : $/\overrightarrow{u}_z$: $\quad \ddot{z} = -g$

Équation horaire : $\dot{z}(t) - \cancel{\dot{z}(0)} = -gt \Longrightarrow z(t) - h = -\dfrac{1}{2}gt^2$

Temps de chute : $z(t_f) = 0 \Longrightarrow t_f = \sqrt{2h/g}$

Vitesse d'impact : $|\dot{z}(t_f)| = \sqrt{2gh}$

Exemple : Mouvement parabolique

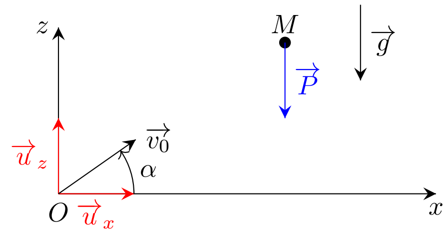
Soit un point M de masse m, lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en 0 à $t = 0$:

Système :$\{M(m)\}$

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : $\bullet \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$

PFD : $\quad m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g}$



Coordonnées : Cartésienne et mouvement à deux dégrès de liberté.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u}_x + z(t)\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

Équations du mouvements : $/\overrightarrow{u}_z$: $\quad \ddot{z} = -g$

Équation horaire :

$$\dot{z}(t) - v_0\sin(\alpha) = -gt \Longrightarrow z(t) - \cancel{z(0)} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$$

Équations du mouvements : $/\overrightarrow{u}_x$: $\quad \ddot{x} = 0$

Équation horaire :

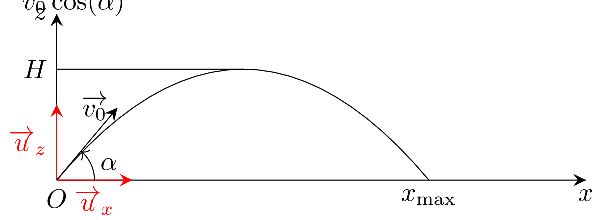
$$\dot{x}(t) - v_0\cos(\alpha) = 0 \Longrightarrow x(t) - \cancel{x(0)} = v_0\cos(\alpha)t$$

Équation de la trajectoire : soit $x(t) = v_0\cos(\alpha)t$ d'où $t(x) = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$ pour $\alpha \neq \pi/2$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)x$$



Portée : soit $x_{\max} \neq 0$ tel que $z(x_{\max}) = 0 \Longrightarrow x_{\max} = \dfrac{2v_0}{g}\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

Hauteur maximale : instant t_h tel que $\dot{z}(t_h) = 0 \Longrightarrow t_h = \dfrac{v_0\sin(\alpha)}{g}$

$$H = z(t_h) = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}$$

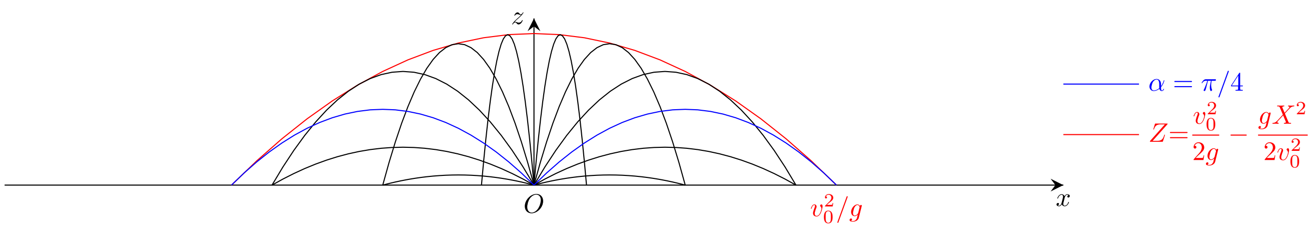
Exemple : Parabole de sureté

On cherche tous les points $M(X, Z)$ accessible via un tir de vitesse initiale v_0 fixé et en cherchant un angle initiale α :

$$Z = -\frac{1}{2}g\frac{X^2}{v_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)X \qquad \frac{1}{2}g\frac{X^2}{v_0^2}\tan^2(\alpha) - X\tan(\alpha) + Z - \frac{1}{2}g\frac{X^2}{v_0^2}$$

Il existe une solution à cette équation si : $\Delta \geqslant 0$

$$\Delta = X^2 - 4 \times \left(Z - \frac{1}{2}g\frac{X^2}{v_0^2}\right)\frac{1}{2}g\frac{X^2}{v_0^2} = X^2\left(1 - \frac{2gZ}{v_0^2} - g^2\frac{X^2}{v_0^2}\right) \Longrightarrow Z \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}$$



4 Mouvement avec forces de frottements fluides

Definition : Vitesse limite

Lorsqu'on est en présence de frottement fluide, on suppose que le point M de masse m va suivre un mouvement transitoire jusqu'à atteindre une vitesse constante où les forces se compensent et le système devient pseudo-isolé. Alors :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{v}_{\text{lim}} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Est une solution particulière de l'équation du mouvement.

Definition : Temps caractéristique

Si on lâche sans vitesse initiale une masse m dans un champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Les frottements sont initialements négligeable devant les forces de frottement.

On peut alors supposer que la vitesse va évoluer pendant une durée τ comme : $v(t) = gt$

On définit alors la durée τ comme le temps pour atteindre la vitesse limite :

$$v(\tau) = g\tau = v_{\text{lim}}$$

Exemple : Force de frottement fluide linéaire

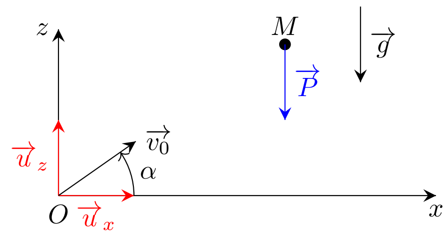
Soit un point M de masse m, lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en 0 à $t = 0$:

Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z$;
- $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$



PFD : $\qquad m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g} - \lambda\overrightarrow{v}$

Équations vectorielle du mouvements : $\quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\lambda}{m}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}$

Vitesse limite : on cherche une solution $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \overrightarrow{C^{te}} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{\text{lim}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \frac{m\overrightarrow{g}}{\lambda}$$

Temps caractéristique : soit $v(t) = gt$ et $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \frac{m}{\lambda}$$

Équation adimensionnée : on pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} + \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}_z$$

Temps long : (vitesse limite) $t \gg \tau$ alors le terme dérivé est négligeable et on obtient : $u \simeq -\overrightarrow{u}_z$.

Temps cours : soit $t \ll \tau$ alors on peut faire un DL_1 de $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}(\tilde{t}) = \overrightarrow{u}(0) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{v_0}/v_{\text{lim}}$ on obtient :

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0} - (\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}_z)\tilde{t}$$

Soit $\|\overrightarrow{u_0}\| \ll 1$:

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0} - \tilde{t}\overrightarrow{u}_z \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} - gt\overrightarrow{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit $\|\overrightarrow{u_0}\| \gg 1$:

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0}(1 - \tilde{t}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

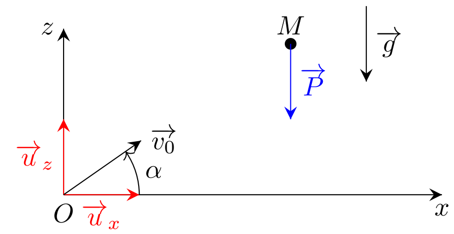
Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

Exemple : Force de frottement fluide quadratique

Soit un point M de masse m, lancé avec une vitesse $\vec{v_0}$ en 0 à $t=0$:

Système :$\{M(m)\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen
Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- $\vec{f} = -\kappa v\vec{v}$



PFD : $\quad m\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\vec{g} - \kappa v\vec{v}$

Équations vectorielle du mouvements : $\quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\kappa}{m}v\vec{v} = \vec{g}$

Vitesse limite : on cherche une solution $\vec{v} = \overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \overrightarrow{C^{te}} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{\text{lim}}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \frac{m\vec{g}}{\kappa v_{\text{lim}}} \Longrightarrow v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

Temps caractéristique : soit $v(t) = gt$ et $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \sqrt{\frac{m}{g\kappa}}$$

Équation adimensionnée : on pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\vec{u} = \vec{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} + u\vec{u} = -\vec{u}_z$$

Temps long : (vitesse limite) $t \gg \tau$ alors le terme dérivé est négligeable et on obtient : $u \simeq -\vec{u}_z$.
Temps cours : soit $t \ll \tau$ alors on peut faire un DL_1 de $\vec{u}$

$$\vec{u}(\tilde{t}) = \vec{u}(0) + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et $\vec{u_0} = \vec{v_0}/v_{\text{lim}}$ on obtient :

$$\vec{u} \simeq \vec{u_0} - (u_0\vec{u_0} + \vec{u}_z)\tilde{t}$$

Soit $\|\vec{u_0}\| \ll 1$:

$$\vec{u} \simeq \vec{u_0} - \tilde{t}\vec{u}_z \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{v_0} - gt\vec{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit $\|\vec{u_0}\| \gg 1$:

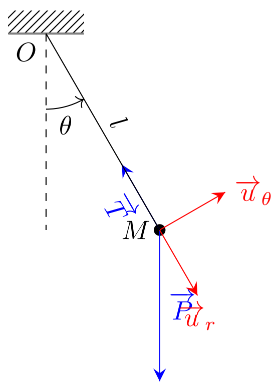
$$\vec{u} \simeq \vec{u_0}(1 - u_0\tilde{t}) \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{v_0}\left(1 - \frac{v_0 t}{v_{lim}\tau}\right)$$

Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

5 Mouvement circulaire

Exemple : Pendule simple

On considère un point matériel M de masse m attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l. On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.



Système : Point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g}\cdot\vec{u_r})\vec{u}_r + (\vec{g}\cdot\vec{u_\theta})\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ avec $T = \|\vec{T}\|$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}_{M/\mathscr{R}_T}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Longleftrightarrow m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u}_r - \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta) - T\overrightarrow{u}_r$$

Comme la longueur l est constante alors on a :

$$\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{u}_r \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + l\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On projette alors le PFD sur $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$:

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 & = -T + mg\cos\theta \\ ml\ddot{\theta} & = -mg\sin\theta \end{cases}$$

On obtient alors l'équation du moment : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta}$

et l'expression de la norme de la tension du fil : $\boxed{T = m[g\cos\theta + l\dot{\theta}^2]}$

Dans le cas où $\theta \ll 1$ on a alors :

$$\sin\theta = \theta + o(\theta) \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta \approx \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un OH de solution :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et θ_0 l'amplitude d'oscillation.

On parle d'Isochronisme car la pulsation de l'OH ne dépend pas de l'amplitude θ_0.

Remarque :

Ce n'est pas le cas général. La période du pendule peut alors se calculer numériquement ou en faisant un développement limité d'ordre plus élevé.

Mécanique 3 : Les oscillateurs mécanique

1 Le système masse-ressort

Definition : Équation différentielle d'un OH

Un OH à 1 degré de liberté est un système dont l'équation du mouvement est de la forme :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

où X est l'écart à la position d'équilibre et ω_0 la pulsation propre.
La solution est donnée par :

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

La période de l'oscillateur est la période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Loi de Hook

On considère une masse m accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Lorsque le ressort est déformé et qu'il possède une longueur l il exerce une action mécanique sur la masse m appelée force de rappel $\overrightarrow{F_r}$. On caractérise alors $\overrightarrow{F_r}$:

Expression : $\boxed{\overrightarrow{F_r} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u}}$

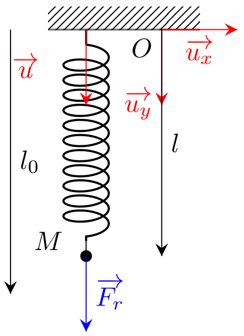
direction : colinéaire au ressort ;

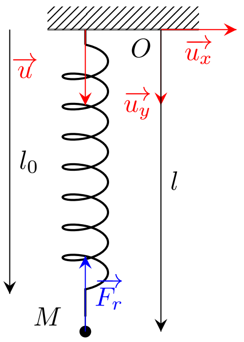
Sens : opposé à l'élongation $(l-l_0)\overrightarrow{u}$;

Norme : $\|\overrightarrow{F_r}\| = k|l-l_0|$;

Point d'application : Point d'attache du ressort ;

Type : Force de contact.





Exemple : Le ressort horizontal non amorti

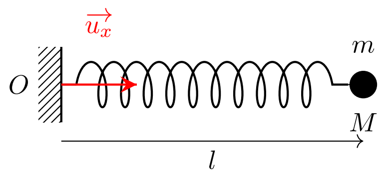
On considère un point M de masse m lié à un ressort de raideur k et longueur à vide l_0 qui est fixé à son extrémité en O. Le ressort et la masse sont posés sur un support horizontal et la masse glisse sans frottement.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Système : $\{M\ (m)\}$

Bilan des actions mécaniques :

- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{R}_N = R_N\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{F} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u}_x$;



PFD : $\quad m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{F}$

$$/\overrightarrow{u}_x \quad : \qquad m\ddot{x} = -k(x-l_0)$$

Équation du mouvement : $\quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}l_0$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2 Les oscillateurs amorti

Definition : Rappel

On considère que le système masse-ressort amorti est soumis à une force de frottement fluide linéaire :

$$\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$$

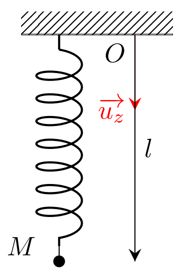
L'équation du mouvement vérifiée par l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre $X = x - X_{\text{eq}}$ peut

se mettre sous la forme :
$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$
Pour résoudre cette équation on doit chercher les racines de l'équation caractéristique :
$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

- Si $\Delta > 0$ alors $Q < \frac{1}{2}$ et le régime est apériodique :
$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \qquad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$
on pose alors $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ et la solution s'écrit :
$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\text{ch}\,(\Omega t) + B\text{sh}\,(\Omega t)\right]$$
avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.
- Si $\Delta = 0$ alors $Q = \frac{1}{2}$ et le régime est critique :
$$r_1 = r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}$$
La solution s'écrit :
$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A + Bt)$$
avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.
- Si $\Delta < 0$ alors $Q > \frac{1}{2}$ et le régime est pseudo-périodique :
$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
on pose alors $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et la solution s'écrit :
$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$
avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

Exemple : Le ressort vertical amorti

Soit un point M de masse m lié à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée à un point O.
Le point M est soumis à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.
Système : $\{M\ (m)\}$
Bilan des actions mécaniques :
- $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v} = -\lambda\dot{z}\overrightarrow{u}_z$
- $\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u}_z$;



PFD : $\quad m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}$
$$/\overrightarrow{u}_z \quad : \qquad m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg - \lambda\dot{z}$$
Position d'équilibre : On cher $z = z_{\text{éq}} = C^{te}$ solution de l'équation précédente avec $\dot{z} = \ddot{z} = 0$:
$$0 = -k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg - 0 \Longrightarrow \boxed{z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

Équation du mouvement : $\ddot{z}+\dfrac{\lambda}{m}\dot{z}+\dfrac{k}{m}z=\dfrac{k}{m}\left(l_0+\dfrac{mg}{k}\right)$

Allongement du ressort : Par commodité on pose $Z=z-z_{\text{éq}}$ tel que $\dot{z}=\dot{Z}$ et $\ddot{z}=\ddot{Z}$

$$\ddot{Z}+\frac{\lambda}{m}\dot{Z}+\frac{k}{m}Z=0$$

et on pose $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q=\dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$

3 Les oscillations forcées

Definition : Régime forcé

Soit un système masse-ressort soumis à une force excitatrice : $\overrightarrow{F}(t)=F_0\cos(\omega t)$ On définit le régime des oscillations forcées pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté, un système de masse m dont l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F(t)}{m}$$

où $F(t)$ est une force excitatrice de la forme : $F(t)=F_0\cos(\omega t)$.
La solution particulière $x_p(t)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$x_p(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi)$$

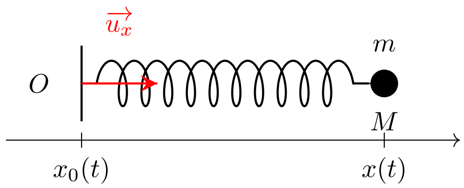
avec X_m l'amplitude d'oscillation et φ le déphasage par rapport à l'excitation.

On pose alors l'abscisse complexe $\underline{x}(t)=\underline{X_m}e^{j\omega t}$ où $\underline{X_m}$ est l'amplitude complexe tel que $x_p=\mathscr{R}e\left(\underline{x}\right)$, $X_m=\left|\underline{X_m}\right|$ et $\varphi=\arg(\underline{X_m})$.
On obtient après calcul :

$$\underline{X_m}=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2+j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$$

Exemple : Ressort horizontal accroché à un point oscillant

On considère un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et lié en un point O mobile de position $x_0(t)=A\cos(\omega t)$. Le point M est soumis aux forces de frottements fluides $\overrightarrow{f}=-\lambda\overrightarrow{v}$.



4 Capacité numérique

Definition : Méthode d'Euler appliquée aux équation d'ordre 2

On considère une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t),y(t),t\right)\qquad\text{avec } t\in[t_0,t_f]\text{ et}y(t_0)=y_0\text{ et }\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)=x_0$$

On peut appliquer la méthode d'Euler en considérant deux équations différentielle d'ordre 1 couplée :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)=x(t)\qquad\text{et}\qquad\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x(t),y(t),t)$$

On peut alors construire les suites de N nombres suivantes :

- $t_k=t_0+k\times\delta t$ avec $k\in[0;N-1]$ et $\delta t=\dfrac{t_f-t_0}{N-1}$
- $y_{k+1}=y_k+x_k\times\delta t$ avec $y_0=y_0$
- $x_{k+1}=x_k+F(,x_k,y_k,t_k)\times\delta t$ avec $x_0=x_0$

Les N couples (t_k, y_k) les coordonnées des N points approchés de la courbe $y(t)$.

Les N couples (t_k, x_k) représentent les coordonnées des N points approchés de la courbe $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$.

Propriété : Capacité numérique 3

À l'aide de python, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non linéaire et faire apparaître l'effet des termes non linéaires.

Propriété : Créaction fonction Euler2

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre y_0, x_0, t_0, t_f, F les paramètres mathématiques et N le paramètre numérique.

```
import numpy as np
def Euler(y0,x0,t0,tf,F,N):
    y,x=np.zeros(N),np.zeros(N)
    dt=(tf-t0)/(N-1)
    t=np.array([t0+k*dt for k in range(N)])
    y[0]=y0
    x[0]=x0
    for k in range(1,N):
        y[k]=y[k-1]+x[k]*dt
        x[k]=x[k-1]+F(y[k-1],x[k-1],t[k-1])*dt
    return t,y,x

def F(y,x,t):
    return ....... #à compléter en fonction du problème à résoudre
```

Mécanique 4 : Énergie, travail, puissance

1 Les grandeurs énergétiques

Definition : Puissance d'une force

La puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point M animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est la grandeur instantanée :

$$\mathscr{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V}_{M/\mathscr{R}} \text{ exprimée en watt (W)}$$

Propriété : Force motrice/résistante

On dit qu'une force $\overrightarrow{F}$ est :

- Motrice si $\mathscr{P} > 0$;
- Résistante si $\mathscr{P} < 0$.

Definition : Travail d'une force

Le travail élémentaire, entre t et $t + \mathrm{d}t$, d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est défini par :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \mathscr{P}\mathrm{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}\mathrm{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

avec $\mathrm{d}l$ le déplacement élémentaire du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$.

Pour obtenir le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel M qui se déplace, dans le référentiel $\mathscr{R}$, de la position M_1 à l'instant t_1 à la position M_2 à l'instant t_2, est défini en faisant la somme des travaux élémentaires :

$$W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}\mathrm{dt} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

La travail d'une force s'exprime en joule (J).

Propriété : Cas d'un point matériel soumis à plusieurs forces

Soit un point matériel soumis à plusieurs forces extérieures $\overrightarrow{F_i}$ dont la somme vaut $\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}$, on montre que :

$$W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{M_1}^{M_2} \left(\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \sum_{i=1}^{N} \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1 \to M_2}$$

On obtient alors la relation :

$$\boxed{W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1 \to M_2}}$$

Propriété : Cas particulier d'une force vectoriellement constante

Soit un point matériel M soumis à une force extérieure $\overrightarrow{F}$ de vecteur constant au cours du mouvement du point A au point B (norme constante, direction constante, sens contant). On calcule alors le travail de la force $\overrightarrow{F}$ au cours du mouvement :

$$W(\overrightarrow{F})_{A \to B} = \int_{A}^{B} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{F} \cdot \int_{A}^{B} \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

On obtient alors la relation :

$$\boxed{W(\overrightarrow{F})_{A \to B} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Valable uniquement dans le cas d'une force constante vectoriellement, le reste du temps il faut calculer l'intégrale du travail élémentaire.

Definition : Énergie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique dun point matériel M de masse m, animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$, est définie par :

$$\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2_{M/\mathscr{R}}}$$

L'énergie cinétique s'exprime en joule (J).

Remarque :

Dépend de $\mathscr{R}$

Remarque :

Le travail exprime l'énergie reçue par le point matériel au cours du mouvement de M_1 vers M_2. C'est un transfert d'énergie. Il ne faut pas confondre l'énergie d'un système comme son énergie cinétique qui est une variable d'état du système et ne dépend donc que de l'état du système.

Tandis qu'une énergie est calculée à un instant donnée, un transfert d'énergie s'effectue au cours d'un mouvement. Le travail n'est donc pas une variable d'état du système.

2 Le théorème de l'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})$$

Démonstration :

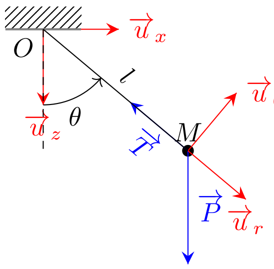
On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ et soumis à N forces $\overrightarrow{F_i}$. On applique le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}$$

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} \cdot \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_g}$$

$$\frac{1}{2} m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}^2_{M/\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i}) \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})$$

Exemple :



On étudie un pendule pensant, on assimile un solide de masse m à un point matériel accroché à un fil idéal de masse négligeable et de longueur l supposée inextensible.

Système : Point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = m[(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u}_r + (\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{u_\theta})\overrightarrow{u}_\theta] = mg(\cos\theta \overrightarrow{u}_r - \sin\theta \overrightarrow{u}_\theta)$;
- $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_r$ avec $T = \|\overrightarrow{T}\|$

Théorème de la puissance cinétique : (TPC)

On exprime la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}_{M/\mathscr{R}_T} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Longrightarrow \mathscr{E}_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

On applique le TPC :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} &= \mathscr{P}(\vec{P}) + \mathscr{P}(\vec{T}) = mgl\dot{\theta}\vec{u_z}\cdot\vec{u_\theta} + \|\vec{T}\|\vec{u_r}\cdot\vec{u_\theta} \\ &= -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) + 0 \\ ml\ddot{\theta}\dot{\theta} &= -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}\end{aligned}$$

On retrouve l'équation du mouvement du pendule pesant.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M qui se déplace de la position M_1 à l'instant t_1 à la position M_2 à l'instant t_2 est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées :

$$\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(t_2) - \mathscr{E}_c(t_1) = \sum_{i=1}^{N} W(\vec{F_i})_{M_1\to M_2}$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ et soumis à N forces $\vec{F_i}$. On applique le théorème de la puissance cinétique au point M :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N}\mathscr{P}(\vec{F_i})$$

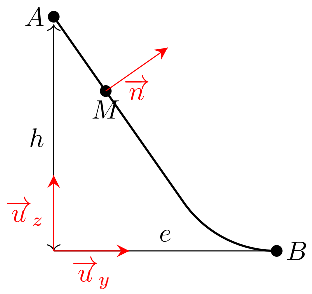
$$\int_{t_1}^{t_2}\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\mathscr{P}(\vec{F_i})\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_c(t_2) - \mathscr{E}_c(t_1) = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{P}(\vec{F_i})\mathrm{d}t$$

$$\Delta\mathscr{E}_c = \sum_{i=1}^{N} W(\vec{F_i})_{M_1\to M_2}$$

Exemple :

Soit un pratiquant du saut à ski, il part ans élan du sommet A d'un tremplin. La vitesse du skieur en B doit être inférieur à $v_{max} = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On réalise une étude pour un skieur qui s'élance sans vitesse initiale en négligeant les frottements pour évaluer la hauteur h_{max} du tremplin et sa longueur e_{max}.



Système : Skieur assimilé à un point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- $\vec{R}_N = \|\overrightarrow{R_N}\|\vec{n} = R_N\vec{n}$

Théorème de l'énergie cinétique : (TEC) On calcule la variation d'énergie cinétique entre l'instant $t_A = 0\,\mathrm{s}$ et l'instant t_B :

$$\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(t_B) - \mathscr{E}_c(t_A) = \mathscr{E}_c(t_B) = \frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}_T}}\|^2(t_B) < \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

On calcule les travaux des forces sur le trajet $A \to B$:

$$W(\vec{P})_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\mathrm{d}z = mgh$$

$$W(\vec{R}_N)_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{R_N}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \int_A^B \|\overrightarrow{R_N}\|\cancel{\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{d}l}} = 0$$

On applique alors le TEC :

$$\frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}_T}}\|^2(t_B) = mgh < \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Longrightarrow h_max = \frac{v_{max}^2}{2g}$$

La hauteur maximale est indépendante de la longueur e du tremplin dans ce modèle. Un modèle plus évolué avec prise en compte du travail des forces de frottements feraient intervenir la longueur e du tremplin.

Definition : Force conservative

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

Propriété : Force conservative

Il existe alors une fonction $\mathscr{E}_\text{p}(\overrightarrow{OM})$ de la position du point M telle que le travail élémentaire d'une force conservative puisse d'écrire :

$$\delta W(\overrightarrow{F_c}) = -\text{d}\mathscr{E}_\text{p}$$

De cette manière le travail ne dépend que des valeurs initiales et finales de la fonction $\mathscr{E}_\text{p}(\overrightarrow{OM})$

Definition : Énergie potentielle

On définit la fonction énergie potentielle $\mathscr{E}_\text{p}(\overrightarrow{OM})$ liée à une force conservative $\overrightarrow{F_c}$ qui dépend de la position du point M telle que définie à une constante près on a :

$$\overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -\text{d}\mathscr{E}_\text{p}$$

L'énergie potentielle $\mathscr{E}_\text{p}$ d'un système se définit comme la somme des énergies potentielles des forces conservatives appliquées.

Propriété : Gradient

Lorsqu'une force est conservative et qu'on peut définir son énergie potentielle, on définit alors l'opérateur vectoriel gradient :

$$\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathscr{E}_\text{p} \qquad \text{avec } \overrightarrow{\text{grad}}\mathscr{E}_\text{p} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = \text{d}\mathscr{E}_\text{p}$$

L'opérateur gradient d'une fonction de plusieurs variable d'espaces dépend du système de coordonnée utilisé. En coordonnée cartésienne il s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à x en considérant y et z comme des constantes, $\frac{\partial f}{\partial y}$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à y en considérant x et z comme des constantes, etc.

Propriété : Travail d'une force conservative

Si un point M possède une énergie potentielle $\mathscr{E}_\text{p}$, alors il est soumis à une force extérieure $\overrightarrow{F_c}$ conservative et son travail entre la position M_1 et la position M_2 s'exprime :

$$W(\overrightarrow{F_c})_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -\int_{M_1}^{M_2} \text{d}E_p = -(E_p(M_2) - E_p(M_1)) = -\Delta\mathscr{E}_\text{p}$$

Definition : Énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, l'énergie mécanique $\mathscr{E}_\text{m}$ d'un système est la somme de son énergie cinétique $\mathscr{E}_\text{c}$ et de son énergie potentielle $\mathscr{E}_\text{p}$:

$$\boxed{\mathscr{E}_\text{m} = \mathscr{E}_\text{c} + \mathscr{E}_\text{p}}$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ et soumis à N forces $\overrightarrow{F_i}$ dont N_c forces conservatives $\overrightarrow{F_i^c}$ et N_{nc} forces non conservatives $\overrightarrow{F_i^{nc}}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique au point M entre le point M_1 à l'instant t_1 et le point M_2 à l'instant t_2 :

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1 \to M_2}$$
$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \sum_{i=1}^{N_c} W(\overrightarrow{F_i^c})_{M_1 \to M_2} + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\overrightarrow{F_i^{nc}})_{M_1 \to M_2}$$
$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = -\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{p}} + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\overrightarrow{F_i^{nc}})_{M_1 \to M_2}$$
$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{m}} = \Delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}} + \Delta\mathscr{E}_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\overrightarrow{F_i^{nc}})_{M_1 \to M_2}$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation $\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{m}}$ de l'énergie mécanique, entre deux position M_1 et M_2, d'un point matériel soumis à des forces conservatives de résultante $\overrightarrow{F_c}$ vaut :

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{m}} = \mathscr{E}_{\mathrm{m}}(M_2) - \mathscr{E}_{\mathrm{m}}(M1) = W(\overrightarrow{F_{\mathrm{nc}}})_{M_1 \to M_2}$$

Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives alors l'énergie mécanique est une constante du mouvement et le système est qualifié de conservatif.

Propriété : Énergie potentielle de pesanteur

Soit un référentiel terrestre de repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ avec $\overrightarrow{u}_z$ orienté vers le haut. La force $\overrightarrow{P}$ d'un point M de masse m s'exprime :

$$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \delta W(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{p,p}}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathscr{E}_{\mathrm{p,p}}$ à partir de l'intégrale :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{p,p}}(z) = \int_{z_0}^{z} mg\mathrm{d}z = mg(z - z_0)}$$

Propriété : Énergie potentielle gravitationnelle

Soit un référentiel galiléen de repère $\mathscr{R}(0, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ avec un point matériel O de masse m_0 qui exerce une force gravitationnelle sur M de masse m :

$$\overrightarrow{F}_{O \to M} = -G\frac{mm_0}{r^2}\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \delta W(\overrightarrow{F}_{O \to M}) = \overrightarrow{F_{O \to M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -G\frac{mm_0}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{p,G}}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $\mathscr{E}_{\mathrm{p,G}}$ à partir de l'intégrale :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{p,G}}(r) = \int_{r_0}^{r} G\frac{mm_0}{r^2}\mathrm{d}r = -Gmm_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Propriété : Énergie potentielle élastique

Soit un référentiel galiléen de repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. La force $\overrightarrow{F}_r$ de rappel qu'exerce un ressort de longueur $\overrightarrow{l} = l\overrightarrow{u}_x$ et de longueur à vide $\overrightarrow{l} = l\overrightarrow{u}_x$ sur un point M s'exprime :

$$\overrightarrow{F}_r = -k(\overrightarrow{l} - \overrightarrow{l_0}) \Longrightarrow \delta W(\overrightarrow{F}_r) = \overrightarrow{F_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -k(l - l_0)\mathrm{d}l = -\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{p,el}}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathscr{E}_{\mathrm{p,el}}$ à partir de l'intégrale :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{p,el}}(l) = \int_{l_1}^{l} k(l - l_0)\mathrm{d}l = \frac{1}{2}(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}(l_1 - l_0)^2}$$

3 Étude qualitative de mouvements à une dimension

Dans cette partie on considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel M de masse m dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$. Le mouvement est selon l'axe Ox de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_x$ et de vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x$ et de résultante des forces $F(x) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}_x$.

Definition : Position d'équilibre

Une position d'équilibre d'un système mécanique est une position telle que si on abandonne sans vitesse le système dans cette position, il y reste.

Propriété : Position d'équilibre

Soit un point matériel M de masse m en mouvement conservatif dans le référentiel $\mathscr{R}_g$. Le point M possède une énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$. À l'équilibre le point M peut alors être aux positions x_{eq} tel que la somme des forces appliquées au point soit nulle :

$$F(x = x_{eq}) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq}) = 0$$

Definition : Stabilité

La stabilité d'une position d'équilibre se définit en abandonnant le système sans vitesse au voisinage de cette position :

- si le système se rapproche de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est stable ;
- si le système s'éloigne de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est instable.

Propriété : Stabilité

Soit un point matériel M de masse m en mouvement conservatif dans le référentiel $\mathscr{R}_g$. Le point M possède une énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$. On étudie la position d'équilibre x_{eq} en posant $x = x_{eq} + \delta x$:

$$F(x_{eq} + \delta x) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x + \delta x) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq}) - \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq})\delta x + o(\delta x)$$

On a alors :

- Un équilibre stable si pour $\delta x > 0$ on a $F(x) < 0$ pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

  $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq}) > 0}$$

  La position d'équilibre correspond à un minimum local de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$.
- Un équilibre instable si pour $\delta x > 0$ on a $F(x) > 0$ pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

  $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq}) < 0}$$

  La position d'équilibre correspond à un maximum local de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$.

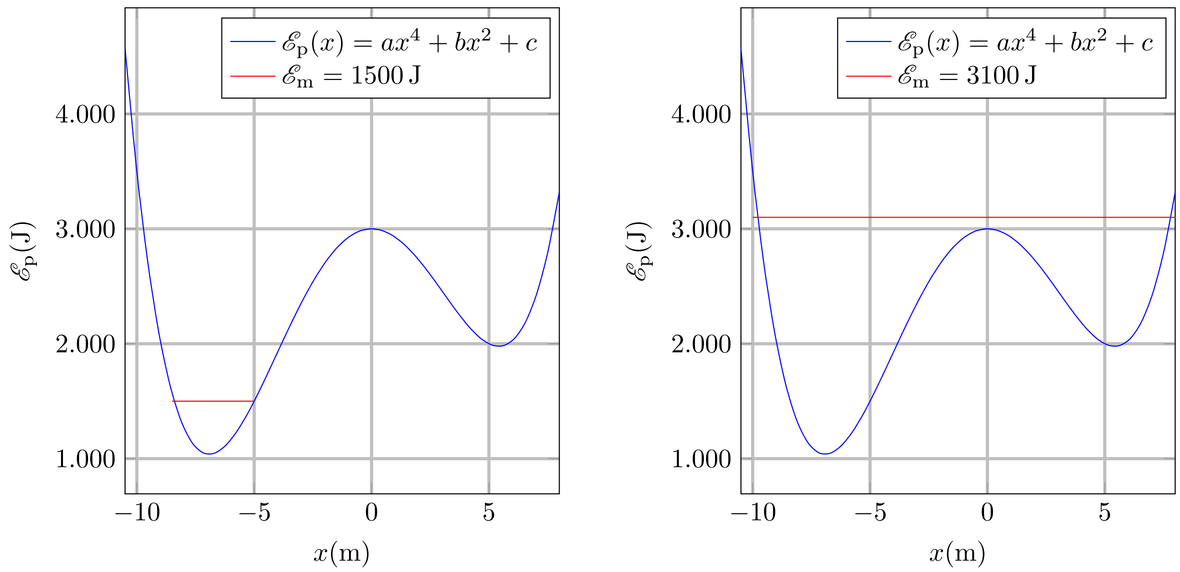
On obtiendrait le même résultat avec $\delta x < 0$.

Propriété : Barrière de potentielle

Soit un point matériel M soumis à une énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$. Si le mouvement est conservatif le point M possède une énergie mécanique $\mathscr{E}_\mathrm{m}$ tel que :

$$\mathscr{E}_\mathrm{m} = \mathscr{E}_\mathrm{c} + \mathscr{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_\mathrm{p}(x) \geqslant \mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$$

Sans énergie cinétique, un point matériel ne peut pas accéder aux régions de l'espace où $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x) > \mathscr{E}_\mathrm{m}$.



4 Application : Oscillation proche de l'équilibre

On considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$. On considère que le point matériel est proche d'une position d'équilibre stable notée x_{eq}. Le système possède alors une énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Il possède également une énergie potentielle dont on fait le développement limité autour de x_{eq} à l'ordre 2 :

$$\mathscr{E}_\mathrm{p}(x) = \mathscr{E}_\mathrm{p}(x_{eq}) + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o\left((x - x_{eq})^2\right)$$

Or par définition de la position d'équilibre stable on a :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq}) = 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq}) = k > 0$$

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et t :

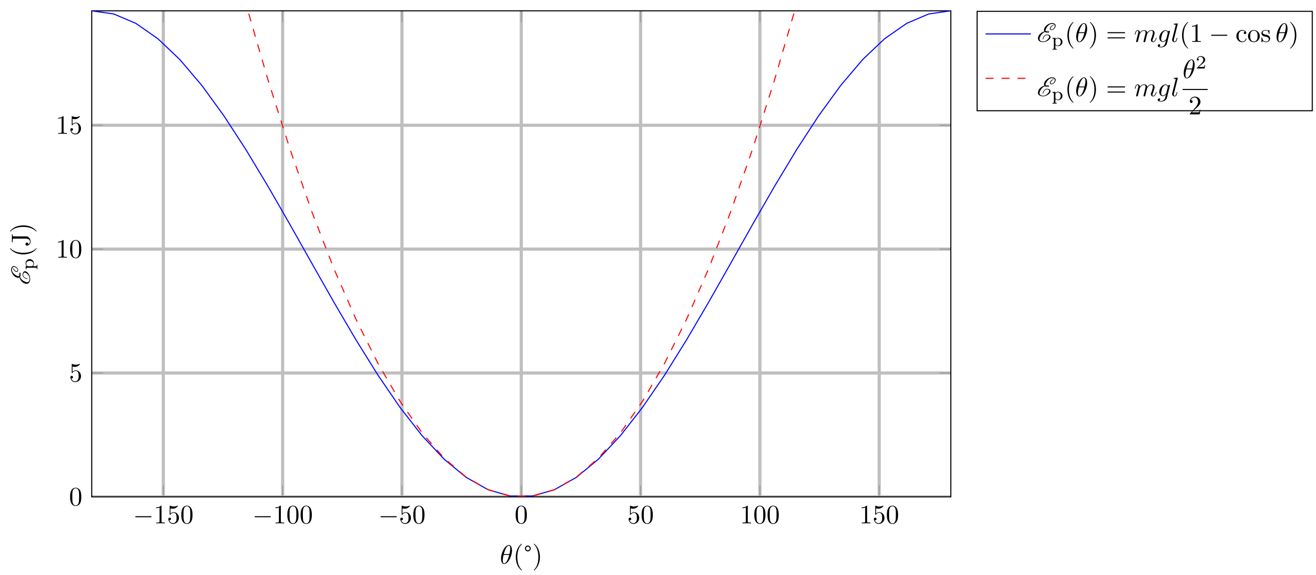
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_\mathrm{p}(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 = \mathscr{E}_\mathrm{m}(t = 0)$$

Si on dérive cette équation on obtient l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = kx_{eq}$$

qui est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique correspondant à un système masse-ressort.

Au voisinage de l'équilibre on peut donc modéliser tout système conservatif par un oscillateur harmonique.



Mécanique 5 : Mouvement de particules chargées

1 Force de Lorentz et notions de champs

Definition : Champ électrostatique

On considère la force coulombienne d'une particule 2 de charge q_2 sur une particule 1 de charge q_1 :

$$\overrightarrow{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{2\to 1} = q_1\overrightarrow{E}_2(r)$$

On appelle alors $\overrightarrow{E}_2(r) = \dfrac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ le champ électrique créé par la particule 2.

Propriété : Champ stationnaire

Un champ stationnaire est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E}(M)$$

Propriété : Champ uniforme

Un champ uniforme est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E}(t)$$

Definition : Champ électrostatique

Un champ électrostatique est un champ stationnaire.

Definition : Champ magnétostatique

Un champ magnétostatique est un champ stationnaire.

Definition : Force de Lorentz

Une particule de charge q, animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans un référentiel, placée dans un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E}$ et magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B}$ subit une force, appelée force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{B}$$

Remarque : Ordre de grandeur

Si on étudie un proton de masse $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et de charge $q = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ plongé dans un champ électrostatique uniforme de module $E = 1{,}0\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ à la surface de la Terre :

- $F_g \approx mg = 1{,}6 \times 10^{-26}\,\mathrm{N}$
- $F_e \approx qE = 1{,}6 \times 10^{-16}\,\mathrm{N}$

On a alors toujours $F_e \gg F_g$.
Ordre de grandeur de champ électrique ou magnétique :

- Antenne mobile $E \sim 10^1\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ à $10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- Condensateur $E \sim 10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ à $10^4\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- Champ de claquage de l'air $E \sim 10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- Champ magnétique terrestre $B \sim 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$;
- Aimants puisants de moteurs $B \sim 0{,}3\,\mathrm{T}$;
- IRM $B \sim 6\,\mathrm{T}$;

Si on compare en ordre de grandeur la force électrique et la force magnétique on a :

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{E}{vB}$$

Pour un champ électrostatique $E \sim 10^3\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ et un champ magnétostatique $B \sim 0{,}3\,\mathrm{T}$ la vitesse pour que les deux forces soient équivalentes doit être de :

$$v \sim 10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

On voit donc que la force magnétique est bien plus efficace pour modifier la trajectoire d'une particule chargée.

2 Aspect énergétique

Propriété : Puissance fournie par un champ électrique

Soit une particule de charge q soumise à un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\boxed{\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}$$

Le champ électrique peut alors augmenter ou diminuer l'énergie cinétique de la particule en fonction de son orientation et du signe de q.

Propriété : Puissance fournie par un champ magnétique

Soit une particule de charge q soumise à un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$, la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\boxed{\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}\wedge\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \overrightarrow{0}}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que : $\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = 0$ L'énergie cinétique de la particule est donc constante, la force de Lorentz magnétique peut donc modifier la trajectoire de la particule sans changer son énergie cinétique.

Propriété : Énergie potentielle électrique

On peut montrer que la force de Lorentz électrique est une force conservative telle que :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathscr{E}_{\mathrm{p,elec}}$$

où $\mathscr{E}_{\mathrm{p,elec}}$ est l'énergie potentielle électrique associée dont l'expression dépend uniquement de la charge de la particule et de la forme du champ électrique $\overrightarrow{E}$ (voir cours de physique de deuxième année).

Definition : Potentiel électrique

On définit le potentiel électrique noté V par la relation :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{p,elec}} = qV \Longrightarrow \mathrm{d}V = -\frac{q}{q}\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Propriété : Potentiel électrique d'un champ uniforme

Soit un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x$, le potentiel électrique est donné par la relation :

$$\boxed{V(x) - V(x_0) = -E_0(x - x_0)}$$

3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

Propriété : Équation du mouvement

Pour une particule assimilée à un point M de masse m et de charge q soumise à un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ uniforme dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. L'équation du mouvement est :

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \frac{q\overrightarrow{E}}{m}$$

On se ramène donc à un vecteur accélération constant, et une résolution identique au champ de pesanteur constant.

Démonstration :

On considère une particule chargée de charge q dans un référentiel $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ placée dans un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_y$ et dans un champ mangétostatique uniformément nul $\overrightarrow{B}_0 = \overrightarrow{0}$.
À l'instant $t = 0$ la particule possède une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0(\cos\alpha\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\overrightarrow{u}_y)$.

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :
- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = qE_0\overrightarrow{u}_y$;
- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z$ avec $\|\overrightarrow{P}\| \ll \|\overrightarrow{F}\|$;

Principe fondamental de la dynamique : On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

On applique alors le PFD :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}_{M/\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = q\overrightarrow{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = q\overrightarrow{E}$$

On obtient alors une accélération constante vectoriellement comme dans le cas de la chute libre :

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}}$$

On peu alors retrouver l'équation de la trajectoire parabolique vu au chapitre Mécanique 2.

Exemple : Vitesse initiale parallèle au champ

Soit un champ électrostatique $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x$ et à $t = 0$: $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u}_x$ et la particule en O.

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x = \frac{q}{m}E_0\overrightarrow{u}_x \Longrightarrow \dot{x}(t) = \frac{qE_0t}{m} + v_0 \Longrightarrow x(t) = \frac{qE_0t^2}{2m} + v_0t$$

Exemple : Vitesse initiale orthogonale au champ

Soit un champ électrostatique $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x$ et à $t = 0$: $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u}_y$ et la particule en O.

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y = \frac{q}{m}E_0\overrightarrow{u}_x \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{qE_0t}{m} \\ \dot{y}(t) = v_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{qE_0t^2}{2m} \\ y(t) = v_0t \end{cases}$$

Propriété : Différence de potentielle entre deux électrodes

En appliquant une différence de potentiel U entre deux électrodes planes, parallèles et distantes de d, on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles, dirigé vers les potentiels décroissants et de norme :

$$E = \frac{U}{d}$$

Propriété : Accélération d'une particule entre deux électrodes

Soit une particule unitialement au repos dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ et assimilée à un point M, de masse m et de charge q soumise à un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x$ tel qu'on impose une différence de potentiel U entre deux électrodes distantes de d. La vitesse de la particule après avoir parcouru la distance d est :

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2|qU|}{m}}}$$

Démonstration :

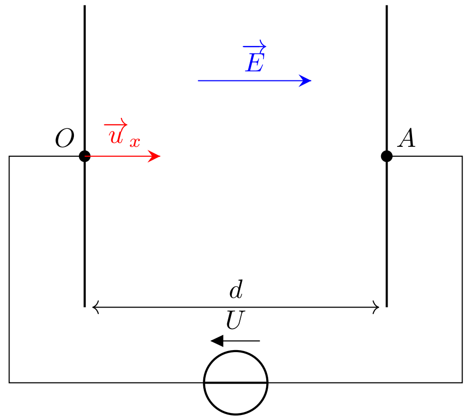
On considère deux plaques métallique séparées d'une distance d soumise à une différence de tension U.
On suppose que le champ électrostatique entre les deux plaques est uniforme :

$$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x \text{ donc } V(x) = V(x=0) - \frac{Ux}{d} \text{ donc } E_0 = \frac{U}{d}$$

et donc que le potentiel électrique est de la forme :

$$V(x) = v(x=0) + \frac{Ux}{d}$$

On étudie une particule chargée de masse m et de charge q sans vitesse initiale à la position $x = 0$.



Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :
- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{B}$;
- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z$ avec $\|\overrightarrow{P}\| \ll \|\overrightarrow{F}\|$;

Théorème de l'énergie cinétique : On applique le TEC entre le point O et le point A :

$$\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(t_A) - \mathscr{E}_c(t_O) = \mathscr{E}_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Le travail de la force de Lorentz électrique s'obtient en faisant la différence de potentiel :

$$W(\overrightarrow{F})_{O\to A} = -\int_O^A \mathrm{d}E_p = -q\int_O^A \mathrm{d}V = qV(x=0) - qV(x=d) = qU$$

D'après le TEC on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = qU \Longrightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

Remarque : Limite relativiste

On considère qu'on peut appliquer les résultat issu de la mécanique Newtonienne tant que la vitesse des particules et inférieure à 0,1c avec $c = 3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

Propriété : Trajectoire circulaire

Soit une particule assimilée à un point M de masse m et de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_z$ perpendiculaire à la trajectoire. À $t = 0$ la particule est placée au point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u}_x$.

On montre que la trajectoire est circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$$

Démonstration : Rayon de la trajectoire

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :
- $\vec{F} = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \vec{B}$;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ avec $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$;

On se place dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ et dans le repère de Frenet $(M, \overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$. Le mouvement est uniforme car on a montré que l'énergie cinétique de la particule était constante. On a alors l'accélération qui vaut :

$$\vec{a}_{M/\mathscr{R}} = \cancel{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$$

On a également l'expression de la vitesse : $\vec{v}_{M/\mathscr{R}} = v_0\overrightarrow{u_T} \Longleftrightarrow \vec{F} = |qB_0|v_0\overrightarrow{u_N}$

Principe fondamental de la dynamique : $m\dfrac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u_N} = |qB_0|v_0\overrightarrow{u_N}$

En projetant sur le vecteur $\overrightarrow{u_N}$ on obtient : $R = \dfrac{mv_0}{|qB_0|}$

Démonstration : Trajectoire circulaire

On considère le mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. À $t = 0$ la particule est placée au point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :
- $\vec{F} = q\vec{E} = qE_0\vec{u}_y$;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ avec $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$;

Principe fondamental de la dynamique : On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \Longrightarrow \vec{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \Longrightarrow \vec{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

On peut alors exprimer la force magnétique dans le repère cartésien :

$$\vec{F} = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \vec{B} = qB_0\dot{x}\overrightarrow{\vec{u}_x} \wedge \overrightarrow{\vec{u}_z} + qB_0\dot{y}\overrightarrow{\vec{u}_y} \wedge \overrightarrow{\vec{u}_z} = qB_0(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y)$$

On applique le PFD :

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}\vec{u}_x + m\ddot{y}\vec{u}_y &= qB_0(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y) \\
/\vec{u}_x \ : \ \ddot{x} &= \frac{qB_0}{m}\dot{y} \\
/\vec{u}_y \ : \ \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m}\dot{x} \text{ et } \ddot{z} = \dot{z} = z = 0
\end{aligned}$$

On intègre entre l'instant $t = 0$ et l'instant t :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - \dot{x}(t=0) &= \frac{qB_0}{m}(y(t) - y(t=0)) \\
\dot{y}(t) - \dot{y}(t=0) &= -\frac{qB_0}{m}(x(t) - x(t=0))
\end{aligned}$$

Or à $t = 0$ on a $x(t=0) = y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{qB_0}{m}y + v_0 \\
\dot{y} &= -\frac{qB_0}{m}x
\end{aligned}$$

On injecte dans les premières équations couplées :

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\left(-\frac{qB_0}{m}x\right) \Longrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x = 0$$
$$\ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\left(\frac{qB_0}{m}y + v_0\right) \Longrightarrow \ddot{y} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 y = -v_0\frac{qB_0}{m}$$

On a alors deux équations du mouvement, on pose $\omega_0 = \left|\frac{qB_0}{m}\right|$ et on a les solutions :

$$x(t) = A_x\cos(\omega_0 t) + B_x\sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = A_y\cos(\omega t) + B_y\sin(\omega_0 t) - v_0\frac{qB_0}{\omega_0^2 m}$$

On utilise les conditions initiales :

$$x(t=0) = A_x = 0 \text{ et } \dot{x}(t=0) = B_x\omega_0 = v_0 \text{ et } y(t=0) = A_y - \frac{mv_0}{|qB_0|} = 0 \text{ et } \dot{y}(t=0) = B_y\omega_0 = 0$$

On obtient alors :

$$x(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|}\sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|}\cos(\omega_0 t) - \frac{mv_0}{qB_0}$$

On obtient une trajectoire circulaire de rayon $R_c = \frac{mv_0}{|qB_0|}$ et de centre $C(0; -\frac{mv_0}{qB_0})$.

Mécanique 6 : Loi du moment cinétique

1 Moment cinétique d'un point matériel

Definition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

On définit le moment cinétique du point matériel M par rapport au point O dans le référentiel $\mathscr{R}$ par :

$$\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathscr{R}}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}$$

Propriété :

Soit le moment cinétique du point M par rapport au point O : $\overrightarrow{L}_O$.
On peut calculer le moment cinétique du point M par rapport au point O' :

$$\overrightarrow{L}_{O'} = \overrightarrow{L}_O + \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathscr{R}}}$$

Propriété : Mouvement plan

Si le mouvement de M s'effectue dans un plan $\mathscr{P}$ et que $O \in \mathscr{P}$. Alors :

$$\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} \perp \mathscr{P} \forall t$$

Propriété : Mouvement rectiligne

Si le point M est en mouvement rectiligne selon une droite $\mathscr{D}$ et que $O \in \mathscr{D}$. Alors :

$$\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{0} \forall t$$

Definition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe

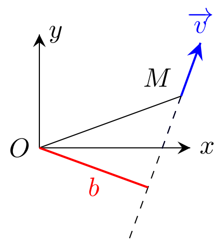
Soit (Δ) un axe orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$ et O un point de cet axe. Le moment cinétique L_Δ de M dans $\mathscr{R}$ par rapport à (Δ) est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{L}_O$ sur (Δ) :

$$L_\Delta(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{L_O(M)_{/\mathscr{R}}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Propriété : Paramètre d'impact de M sur O

Si la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}(M)_{/\mathscr{R}} \perp \Delta = (O, \overrightarrow{u}_z)$, alors on peut calculer le moment cinétique par rapport à Δ en utilisant le paramètre d'impact :

$$L_\Delta(M) = \pm m\|\overrightarrow{v}\| \times b \quad \text{avec} \quad b = \|\overrightarrow{OM}\| \sin(\alpha)$$



- b représente le paramètre d'impact de M sur O.
- Le signe de $L_\Delta(M)$ est déterminé en utilisant la règle de la main droite.

Propriété : Moment cinétique en coordonnées cylindriques suivant (Oz)

Soit un référentiel $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. On se place en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r + z\overrightarrow{u}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

Le moment cinétique par rapport à la droite $\Delta = (O, \overrightarrow{u}_z)$ vaut :

$$L_{(Oz)}(M)_{/\mathscr{R}} = mr^2\dot{\theta}$$

Pour connaître le sens positif de rotation autour d'un axe orienté on utilise la règle de la main droite.

2 Moment d'une force

Definition : Moment d'une force par rapport à un point

Le moment par rapport au point O d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point M est défini par :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

Definition : Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit (Δ) un axe orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$ et O un point de cet axe. On définit le moment par rapport à (Δ) de la force $\overrightarrow{F}$ comme le projeté orthogonal de $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F})$ sur (Δ) :

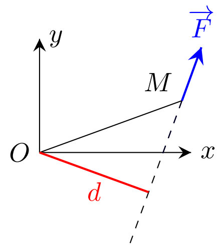
$$\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathscr{M}_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Propriété : Le bras de levier

Si la force $\overrightarrow{F} \perp \Delta = (O, \overrightarrow{u}_z)$, alors on peut calculer le moment de la force par rapport à Δ en utilisant le bras de levier :

$$\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \pm \|\overrightarrow{F}\| \times d \qquad \text{avec} \qquad d = \|\overrightarrow{OM}\| \sin(\alpha)$$

- d représente le bras de levier.
- La droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{F}$ s'appelle la froite d'action de la force $\overrightarrow{F}$.
- Le signe de $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F})$ est déterminé en utilisant la règle de la main droite.



Propriété : Cas où $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = 0$

Soit une droite $\Delta = (O, \overrightarrow{u}_z)$ et une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point M. On a $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = 0$ si :

- $\overrightarrow{F} \parallel \Delta$;
- si la droite d'action de $\overrightarrow{F}$ passe par Δ.

3 Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M calculé en un point fixe O est égale au moment résultant en O des forces appliquées :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F})$$

Démonstration :

On applique le principe fondamental de la dynamique à un point M de masse m dans un référentiel supposé galiléen $\mathscr{R}$:

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F} \Longrightarrow m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M/\mathscr{R}}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F})$$

Sachant que : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M/\mathscr{R}}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M/\mathscr{R}}}$

On obtient : $m \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \mathscr{M}_O(\overrightarrow{F})$

Propriété : Conservation du moment cinétique

Lorsque $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{C^{te}}$ on a deux situations possibles :

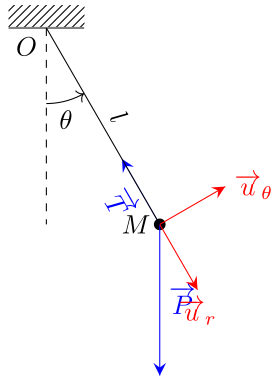
- $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$ alors le système est pseudo-isolé.
- $\sum_i \overrightarrow{F_i} \parallel \overrightarrow{OM}$ alors la résultante des forces est orientée vers O à tout instant.

Propriété : Projection sur un axe

On peut projeter la relation précédente sur un axe orienté (Δ) de direction $\overrightarrow{u}_\Delta$ et passant par O :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta(M)_{/\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F})$$

4 Application : le pendule simple



On considère un point matériel M de masse m attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l. On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.

Système : Point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = m[(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u}_r + (\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{u_\theta})\overrightarrow{u}_\theta] = mg(\cos\theta \overrightarrow{u}_r - \sin\theta \overrightarrow{u}_\theta)$;
- $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_r$ avec $T = \|\overrightarrow{T}\|$

Théorème du moment cinétique (TMC) :

$$\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{u}_r \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \Longrightarrow \overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} = l^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$

On obtient alors :

$$ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} + mgl\cos\theta\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_r} - mgl\sin\theta\overrightarrow{\overrightarrow{u}_r} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{u}_\theta}$$

On a alors : $l\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_z = -g\sin\theta\overrightarrow{u}_z$

On fait la projection suivant $\overrightarrow{u}_z$ et on retrouve l'équation du mouvement d'un pendule simple :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Mécanique 7 : Champ de force centrale conservatif

1 Champ newtonien

Definition : Champ newtonien

Un champ de force newtonien est un champ de force centrale de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u}_r$$

avec k une constante.

Le champ est attractif lorsque k est positive, et répulsif lorsque k est négative.

Exemple :

La force d'interaction gravitationnelle avec $\mathscr{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ exercée par $O(m_1)$ sur $M(m_2)$:

$$\overrightarrow{F} = -\mathscr{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_r$$

La force d'interaction coulombienne exercée par une particule en O de charge q_1 sur une particule en M de charge q_2 avec $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ la permittivité du vide :

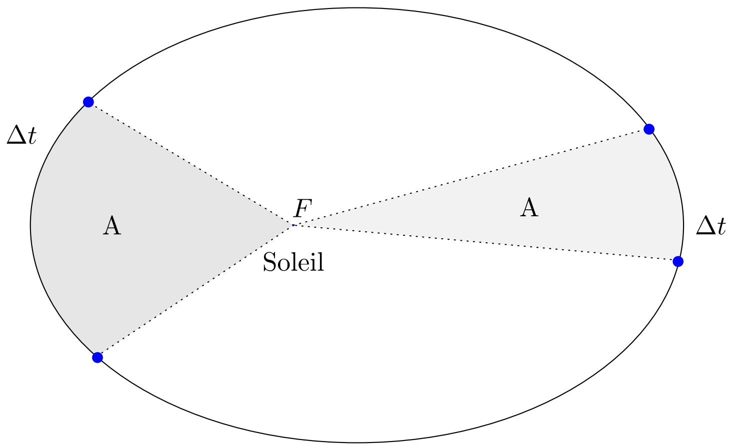
$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u}_r$$

Loi de Kepler des orbites (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique, dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Loi de Kepler des aires (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-planète est proportionnel au temps mis pour la décrire.



Loi de Kepler des périodes (1618)

Dans le référentiel héliocentrique, le carré de la période de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit.

$$T^2 \propto a^3$$

Remarque : Ordre de grandeurs

- Le nom et l'ordre des planètes du système solaire : «**M**e **V**oilà **T**out **M**ouillé, **J**'étais **S**ous **U**n **N**uage» pour Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune ;
- Pour la Terre on a : $M_\mathrm{T} = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{T} = 6{,}4 \times 10^3\,\mathrm{km}$;

- Pour le Soleil on a : $M_\odot = 2{,}0\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, $D_{\mathrm{TS}} = 150\times10^6\,\mathrm{km} = 1\,\mathrm{ua}$
- Pour le système solaire : $\dfrac{T^2}{a^3} = 1\,\mathrm{an}^2\cdot\mathrm{ua}^{-3} = 2{,}9\times10^{-19}\,\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{m}^{-3}$

Remarque :

Ces lois sont basées sur l'observation expérimentale de Tycho Brahé. Elles sont démontrée par Newton ensuite.
Toutes ces lois découlent des démonstrations suivantes ainsi que de calcul de l'étude des coniques hors programme.

2 Force centrale conservative

Definition : Rappel d'une force conservative

Une force est dite conservative s'il est possible de lui associer une énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ telle que son travail élémentaire s'exprime

$$\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{d}\mathscr{E}_p$$

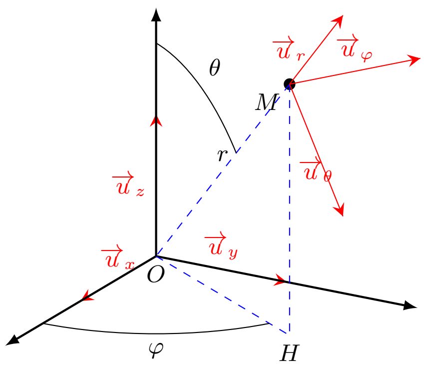
Definition : Force centrale et coordonnées sphériques

Un point matériel M est soumis à un champ de force centrale de centre O si, tout au long de son mouvement, la force qui lui est appliquée est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. La force étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$, le système de coordonnée préférentiel est le système de coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{F} = F(\overrightarrow{OM})\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

$$\overrightarrow{F} = F(M)\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

$$\overrightarrow{F} = F(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u}_r$$



Propriété : Force centrale conservative

Une force centrale conservative dérive d'une énergie potentielle $\mathscr{E}_p(r)$ telle que :

$$\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{u}_r = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u}_r$$

Exemple :

La force gravitationnelle créée par un corps de masse M_O en O :

$$\overrightarrow{F}_g = -G\frac{mM_O}{r^2}\overrightarrow{u}_r = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{pg}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u}_r \Longrightarrow \mathscr{E}_{pg}(r) = -\frac{GmM_O}{r}$$

La force électrostatique créée par une charge Q_O en O :

$$\overrightarrow{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ_O}{r^2}\overrightarrow{u}_r = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{pe}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u}_r \Longrightarrow \mathscr{E}_{pe}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ_O}{r}$$

Avec à chaque fois l'énergie potentielle prise nulle lorsque $r\to+\infty$.

Propriété : Conservation du moment cinétique

Soit un point M de masse m soumis à une force centrale de centre O $\overrightarrow{F}$ en mouvement dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$.
On applique le théorème du moment cinétique au point O :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{L}_O(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{C^{te}}$$

On en déduit que le moment cinétique du point M calculé au centre O est une constante du mouvement.

Propriété : Mouvement plan

D'après la définition du moment cinétique :

$$\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}$$

Le vecteur moment cinétique est à chaque instant orthogonal au vecteur position et au vecteur vitesse. Si le moment cinétique est constant vectoriellement alors le mouvement reste dans le même plan orthogonal au moment cinétique. On peut alors définir un repère cylindrique d'axe (Oz) orthogonal au plan du mouvement.

Propriété : Loi des aires

Comme le mouvement est plan, on se place en coordonnée cylindriques avec $z = 0$. On obtient :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \Longrightarrow \overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$

D'après le théorème du moment cinétique on a vu que $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{C^{te}}$. On en déduit alors que :

$$C = r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

Cette loi est appelée loi des aires car l'aire balayée par la vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle au temps.

3 Aspects énergétiques

Propriété : Application du TEM

Soit un point M de masse m soumis à une force centrale conservative de centre O $\overrightarrow{F}$ en mouvement dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. La force centrale conservative dérive d'une énergie potentielle $\mathscr{E}_p(r)$ et on applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = C^{te}$$

Propriété : Énergie cinétique

On calcule alors l'énergie cinétique en coordonnées cylindriques avec $z = 0$:

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r} + \frac{C^2}{r^2}\right)$$

On obtient alors :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathscr{E}_p(r) = C^{te}$$

Definition : Énergie potentielle effective

On définit alors l'énergie potentielle effective par :

$$\mathscr{E}_{\text{peff}}(r) = \mathscr{E}_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

Le terme $\mathscr{E}_{\text{ceff}} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$ est appelé énergie cinétique effective.

Propriété : Étude du mouvement radial

On utilise la conservation de l'énergie mécanique pour étudier le mouvement radial, c'est-à-dire les valeurs de r accessibles pour une particule en fonction de son énergie mécanique totale.

On reprend la méthode de l'étude énergétique d'un point en posant :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{\text{ceff}} + \mathscr{E}_{\text{peff}}(r) \geqslant \mathscr{E}_{\text{peff}}(r)$$

Definition : État lié/État de diffusion

On cherche à résoudre l'inégalité : $\mathscr{E}_m \geqslant \mathscr{E}_{\text{peff}}(r)$

- On définit l'état lié d'un point M si la solution se met sous la forme d'un interval fermé $[r_1, r_2]$ tel que :

$$\mathscr{E}_{\text{peff}}(r_1) = \mathscr{E}_{\text{peff}}(r_2) = \mathscr{E}_m$$

Dans ce cas là, la trajectoire du point M est elliptique ou circulaire autour du point O.

- On définit l'état de diffusion d'un point M si la solution se met sous la forme d'un interval semi-ouvert $[r_1, +\infty[$ tel que :

$$\mathscr{E}_{\text{peff}}(r_1) = \mathscr{E}_m$$

Dans ce cas là, la trajectoire du point M est hyperbolique ou parabolique et sort du puit de potentiel.

Exemple : Force d'attraction gravitationnelle

L'énergie potentielle gravitationnelle d'une particule M de masse m autour d'un astre O de masse m_O est :

$$\mathscr{E}_p(r) = -\mathscr{G}\frac{mm_O}{r}$$

D'où l'énergie potentielle effective :

$$\mathscr{E}_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathscr{G}\frac{mM_O}{r}$$

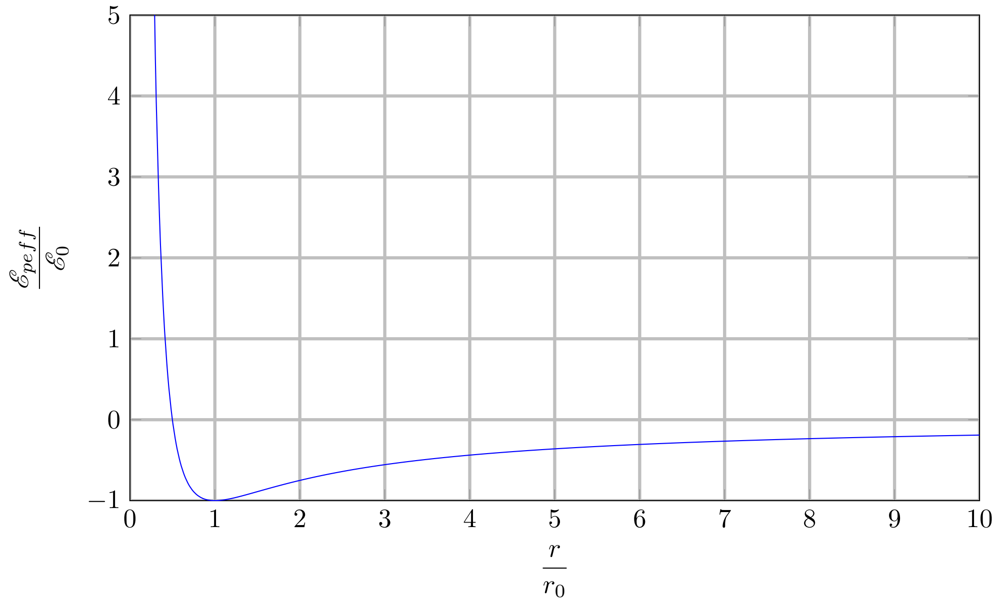
Elle possède un minimum en $r = r_0$ où :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{peff}}}{\mathrm{d}r}(r_0) = -\frac{mC^2}{r_0^3} + \mathscr{G}\frac{mm_O}{r^2} = 0 \Longrightarrow r_0 = \frac{C^2}{\mathscr{G}m_O}$$

L'énergie mécanique minimale pour laquelle on a une trajectoire circulaire vaut donc :

$$\mathscr{E}_{\text{min}} = -\frac{\mathscr{G}m_O m}{2r_0} = -\mathscr{E}_0$$

On trace la courbe de $\dfrac{\mathscr{E}_{\text{peff}}}{\mathscr{E}_0}$ en fonction de $\dfrac{r}{r_0}$:



avec $\mathscr{E}_0$ l'énergie potentielle effective minimale et r_0 le rayon pour une énergie potentielle effective minimale ($\mathscr{E}_{peff}(r_0) = \mathscr{E}_0$).

On observe alors deux types d'états :

- Les états liés pour lesquels l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{m,\text{lié}} < 0$. La particule est alors confinée entre les positions r_1 et r_2 tel que $\mathscr{E}_{peff}(r_{1/2}) = \mathscr{E}_{m,\text{lié}}$.
- Les états de diffusions pour lesquels l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{m,\text{diffusion}} \geqslant 0$. La particule est alors libre dans tout l'espace $r \geqslant r_3$ tel que $\mathscr{E}_{peff}(r_3) = \mathscr{E}_{m,\text{diffusion}}$.

Propriété : Trajectoires

On observe plusieurs types de trajectoires :

- Trajectoire circulaire de rayon r_0 si $\mathscr{E}_m = -\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_{peff}(r_0)$ l'énergie potentielle effective minimale.
- Trajectoire elliptique de demi grand axe $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ si $-\mathscr{E}_0 < \mathscr{E}_m < 0$.
- Trajectoire parabolique si $\mathscr{E}_m = 0$.
- Trajectoire hyperbolique si $\mathscr{E}_m > 0$.

L'ensemble de ces trajectoire forme la famille des coniques.

4 Trajectoire circulaire

Propriété : Uniformité du mouvement

On applique la loi des aires et on obtient :

$$C = r_0\dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r_0} = C^{te}$$

Le mouvement est alors circulaire uniforme.

Propriété : Vitesse

On applique le PFD au point M dans le référentiel géocentrique :

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F} \Longrightarrow -mr_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r = -\frac{\mathscr{G}m_O m}{r_0^2}\overrightarrow{u}_r$$

car $\dot{\theta} = C^{te}$. On obtient alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mathscr{G}m_O}{r_0^3} \Longrightarrow \boxed{v_0 = r_0\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathscr{G}m_O}{r_0}}}$$

avec v_0 la vitesse du satellite/astre le long de la trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_0.

Propriété : Énergie mécanique minimale

On a vu que la trajectoire circulaire correspond à un minimum de l'énergie mécanique. On calcule la valeur du minimum en utilisant les propriétés précédentes :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{\min} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathscr{G}m_O m}{r_0}$$

On utilise alors l'expression de v_0 :

$$\mathscr{E}_m = -\mathscr{G}\frac{m_O m}{2r_0}$$

Propriété : Période

On en déduit la période de révolution de l'astre :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \Longrightarrow \boxed{T = 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{\mathscr{G}m_0}}}$$

Propriété : Loi de Kepler

On retrouve la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G}m_O}}$$

Propriété : Cas d'une trajectoire elliptique

Pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe $a = r_1 + r_2$ tel que $\mathscr{E}_{\text{peff}}(r_1) = \mathscr{E}_{\text{peff}}(r_2) = \mathscr{E}_m$, on a :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G} m_O}}$$

$$\boxed{\mathscr{E}_m = -\frac{\mathscr{G} m_O m}{2a}}$$

5 Satellites terrestres

Remarque : Les différents types de satellites terrestres

La terre possède plusieurs types de satellites :

- 1 satellite naturel : la Lune. Orbite quasi-circulaire de rayon $D_{\text{TL}} = 384 \times 10^3$ km et de période $T_{\text{L}} \simeq 27{,}3$ jour et de vitesse moyenne $v_{\text{L}} \simeq 3{,}7 \times 10^3\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- Les satellites artificiels en orbite basse (environ 1500). Leurs altitudes sont situées entre 300 km (limité par le freinage de l'atmosphère) et 2000 km pour des période de révolution entre 1 h et 2 h. La mise en orbite est moins coûteuse en énergie. Les communications sont plus facile et plus rapide.
- Les satellites artificiels en orbite moyenne (environ 100 dont le GPS). Leurs altitudes est autour de 20×10^3 km et leurs période est autour de 12 h.
- Les satellites géostationnaire situé à une altitude de $3{,}6 \times 10^3$ km pour une période de révolution d'environ 24 h.

Definition : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre.

Propriété : Plan d'orbite

Les trajectoires, dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$, du satellite géostationnaire et du point M de la Terre considéré doivent être dans le même plan. Celle du satellite est dans un plan contenant le centre O de la Terre. Celle du point M est dans le plan normal à l'axe de rotation de la Terre et contenant la projection orthogonale de M sur cet axe. Ces deux plans ne sont confondus qu'à l'équateur. Ainsi un satellite géostationnaire est nécessairement équatorial.

Propriété : Altitude

Il n'existe qu'une orbite géostationnaire, elle est donnée par la troisième loi de Kepler. La période de révolution du satellite T doit être égale à la période du jour sidéral que met la Terre pour faire un tour complet sur elle-même $T_{\text{sid}} = 86\,164$ s. On en déduit :

$$T_{\text{sid}}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3$$

où $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg est la masse de la Terre, m la masse du satellite, et $r_0 = R_T + h$ où $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km est le rayon de la Terre, et h l'altitude du satellite géostationnaire.

On obtient alors :

$$h = \left(\frac{GM_T T_{sid}^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_T = 35\,786\,\text{km}$$

Definition : Vitesse en orbite basse

Une orbite basse est une orbite dont l'altitude h est faible. On calcule la vitesse d'un tel satellite :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_t + h}}$$

On suppose maintenant que $h \ll R_T$ et on obtient la première vitesse cosmique :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7{,}9\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Definition : Vitesse de libération

La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant de passer de la surface de la Terre à un état de diffusion. On cherche donc v_2 tel que $\mathscr{E}_m = 0$ à la surface de la Terre :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = 0 \Longrightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = 11{,}2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

6 Capacité numérique

Propriété : Capacité numérique 5

À l'aide de python, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.

```python
def Fcentrale(X,t):
    C=v0*b
    dtheta=C/X[1]**2
    dr=X[2]
    ddr=C**2/X[1]**3-G*MT/X[1]**2
    return [dtheta,dr,ddr]
def CI(v0,b):
    r0=b
    dr0=0
    theta0=0
    return [theta0,r0,dr0]
G=6.67e-11 #cste de gravitation universelle
MT=5.98e24 # masse de la Terre
R=6.4e6 # rayon de la Terre
m=2e3 #masse du satellite artificielle
b=2*R # Param d'impact
vlib=np.sqrt(2*G*MT/b) #vitesse de liberation en b
vcirc=np.sqrt(G*MT/b) # vitesse trajectoire circulaire
v=np.array([vcirc,vcirc+0.5*(vlib-vcirc),vlib,vcirc+0.9*(vlib-vcirc),vlib,1.1*
  vlib,10*vlib])
N=1000
plt.figure()
plt.plot([0],[0],'ko')
for k in range(len(v)):
    v0=v[k]
    C=b*v0 #constante des aires
    Em=0.5*m*v0**2-G*MT*m/b # energie mecanique initiale
    if Em<0:
        a=-0.5*G*MT*m/Em
        T=np.sqrt(a**3*4*np.pi**2/(G*MT))
    else:
        T=50*b/v0
    dt=T/(N-1)
    t=np.array([k*dt for k in range(N)])
    sol=odeint(Fcentrale,CI(v0,b),t)
    r,theta=sol[:,1],sol[:,0]
    x,y=r*np.cos(theta),r*np.sin(theta)
    plt.plot(x,y)
plt.axis('scaled')
plt.xlabel('$x$ en m')
plt.ylabel('$y$ en m')
plt.show()
```

Mécanique 8 : Introduction à la mécanique du solide

1 Cinématique du solide

Definition : Solide indéformable

Un solide est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres.

Remarque :

On oppose les solides aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres. Les déformations ou les ruptures du solide sont exclues de cette étude.

Definition : Centre de masse d'un solide

Soit un solide (S) composé de M_i points de masse m_i. On définit le centre de masse G du solide par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{m}$$

avec $m = \sum_i m_i$.

On obtient la relation suivante :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

Definition : Translation

Un solide (S) est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.

Si le solide est en translation, tous ses points ont à chaque instant le même vecteur vitesse. On décide alors d'étudier le mouvement d'un seul point du solide, celui du centre de masse G :

$$\overrightarrow{v}_{G\in S/\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}$$

Exemple : Translation rectiligne

Lors d'une translation rectiligne, tous les points du solide (S) ont une trajectoire rectiligne selon des droites parallèle entre elles.

Exemple : Translation circulaire

Lors d'une translation circulaire, tous les points du solide (S) ont une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différents.

Definition : Rotation autour d'un axe fixe

Un solide indéformable (S) est en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathscr{R}$ si tous les points le constituant ont une trajectoire circulaire dans $\mathscr{R}$ centrée sur un point de Δ.

Definition : Vitesse angulaire d'un solide

La vitesse angulaire d'un solide (S) est la dérivée temporelle $\omega = \dot{\theta}$ de l'angle repérant sa position. L'accélération angulaire du solide est la dérivée temporelle de sa vitesse angulaire $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$.

Propriété : Description cinématique d'un solide en rotation

On se place en coordonnée cylindrique avec le point O du centre du repère appartenant l'axe de rotation Δ. On pose $\overrightarrow{u}_z$ colinéaire à Δ et on définit la vitesse d'un point M appartenant (S) dans $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{v}_{M\in S/\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\Omega_{S/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\overrightarrow{u}_\theta$$

avec $\Omega_{S/\mathscr{R}} = \omega\overrightarrow{u}_z$.

2 Loi du moment cinétique scalaire

Definition : Moment d'inertie d'un point par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique de M de masse m par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ dans $\mathscr{R}$ en coordonnées cylindriques est la projection de $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}}$ sur l'axe Δ :

$$L_\Delta(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{L_O(M)_{/\mathscr{R}}} \cdot \overrightarrow{u_z} = m(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}) \cdot \vec{u}_z$$

On utilise alors les coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \Longrightarrow \vec{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

On obtient alors :

$$L_\Delta(M)_{/\mathscr{R}} = mr^2\dot{\theta} = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}$$

et on appelle $J_{(Oz)}(M) = mr^2$ le moment d'inertie du point M.

Definition : Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté

Le moment cinétique d'un solide (S) en rotation à la vitesse $\omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe fixe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ s'écrit :

$$L_\Delta(S) = J_\Delta(S)\omega$$

avec $J_\Delta(S)$ le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Δ en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Remarque :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est toujours positif.

Le moment d'inertie dépend de la répartition des masses. Plus la masse du solide est éloigné de l'axe Δ, plus le moment d'inertie augmente.

On vous donnera toujours $J_\Delta(S)$.

Loi scalaire du moment cinétique du solide

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ d'un solide (S) en rotation autour de cet axe est égale au moment résultant par rapport à (Δ) des forces extérieures :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta(S)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext\to S}})$$

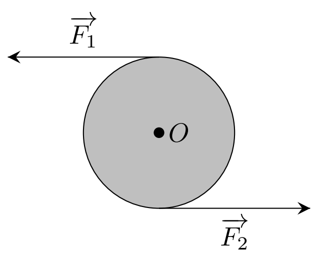
En utilisant le moment d'inertie $J_\Delta(S)$ par rapport à Δ on obtient :

$$\boxed{J_\Delta(S)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext\to S}})}$$

avec $\omega = \dot{\theta}$.

Definition : Couple de forces

Un couple de forces est un système de forces (au minimum 2) dont la résultante $\overrightarrow{F_{ext\to S}} = \vec{0}$ est nulle et dont le moment résultant est non nul et indépendant du point où on le calcul.



$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$$

Definition : Liaison pivot

Une liaison pivot est une liaison entre deux solides en rotation l'un par rapport à l'autre (un rotor en rotation par rapport à un stator), sans translation possible. Le moment de l'action du stator sur le rotor est forcément nul :

$$\mathscr{M}_{(Oz)}(\overrightarrow{F}_{\text{stator}\to\text{rotor}}) = 0$$

3 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Definition : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique d'un solide en rotation dans un référentiel $\mathscr{R}$ autour d'un axe fixe $\Delta = (O, \overrightarrow{u}_z)$ à la vitesse angulaire ω s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta(S)\omega^2$$

Definition : Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

La puissance d'une force $\overrightarrow{F}_{ext\to S}$ appliquée à un point M d'un solide (S) en rotation dans le référentiel $\mathscr{R}$ autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire ω est définie par :

$$\mathscr{P}(\overrightarrow{F}_{ext\to S}) = \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F}_{ext\to S})\omega$$

Definition : Travail d'une force appliquée à un solide en rotation

Le travail d'une force $\overrightarrow{F}_{ext\to S}$ appliquée à un point M entre la position M_1 et M_2 d'un solide (S) en rotation dans le référentiel $\mathscr{R}$ autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire ω est définie par :

$$W(\overrightarrow{F}_{ext\to S})_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathscr{P}(\overrightarrow{F}_{ext\to S})\mathrm{d}t = \int_{M_1}^{M_2} \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F}_{ext\to S})\mathrm{d}\theta$$

Loi de la puissance cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la loi de la puissance cinétique appliquée à un solide soumis aux forces extérieures $\overrightarrow{F}_{ext\to S}$ s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \mathscr{P}(\overrightarrow{F}_{ext\to S})$$

Loi de l'énergie cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la loi de l'énergie cinétique appliquée à un solide soumis aux forces extérieures $\overrightarrow{F}_{ext\to S}$ entre t_1 et t_2 s'écrit :

$$\Delta\mathscr{E}_c = W(\overrightarrow{F}_{ext\to S})_{M_1\to M_2}$$

4 Le pendule pesant

Exemple : Le pendule pesant

Considérons une tige homogène, de longueur l et masse m, attachée en O par une liaison pivot parfaite de direction $\overrightarrow{u}_z$. Sa position est reprérée par l'angle θ par rapport à la vecticale. La tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0.

La tige est caractérisée par son centre de masse G et son moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz), elle est soumise à l'action de la réaction de la liaison pivot, et à l'action du poids qui s'exerce en G.

Le moment des actions de la liaison pivot en O est nul, on ne considère donc que le moment de l'action du poids :

$$\mathscr{M}_{(Oz)}(\overrightarrow{P}) = -mgd\sin\theta$$

avec d la distance OG. On applique la règle de la main droite pour connaître le signe du moment.

Propriété : Équation du mouvement

On applique maintenant le théorème du moment cinétique pour un solide :

$$J_{(Oz)}(S)\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}(S)}\sin\theta = 0}$$

On retrouve l'équation différentielle du pendule simple, mais cette fois on a des propriétés solides !

Propriété : Intégrale première du mouvement d'un pendule pesant

Si on multiplie l'équation du mouvement du pendule pesant par $\dot{\theta}$ et qu'on intègre entre $t=0$ et t on obtient :

$$\frac{1}{2}J_{(Oz)}(S)\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = C^{te} = E_m = -mgd\cos\theta_0$$

Si $\omega(t=0) = 0$.

5 Capacité numérique

Definition : Intégration numérique par la méthode des rectangles

À l'aide de python, on peut calculer une valeur approchée d'une intégrale d'une fonction f en séparant un intervalle $[a;b]$ en N intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ tel que $x_{i+1} - x_i = (b-a)/N$ et où la fonction f est considérée comme constant sur l'intervalle $[x_i;x_{i+1}]$ et dont la valeur vaut $f(x_i)$. De cette manière :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \left(\frac{b-a}{N}\right)\sum_{i=1}^{i=N} f(x_i)$$

Propriété : Création d'une fonction python

On définit la fonction **RectG(a,b,N,f)** qui calcule l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ avec une division en N intervalles $[x_i;x_{i+1}]$:

```python
def RectG(a,b,N,f):
    h = (b-a)/N
    I = 0
    for i in range(N):
        I = I + h * f(a+i*h)
    return I

def f(x):
    return .... # a completer
```

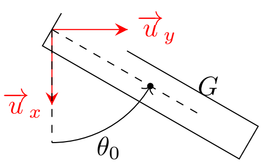
Propriété : Capacité numérique 6

À l'aide de python, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.

Exemple : Calcul de la période d'un pendule

Considérons une tige homogène, de longueur l et masse m, attachée en O par une liaison pivot parfaite de direction $\vec{u}_z$. Sa position est reprérée par l'angle θ par rapport à la vecticale. La tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0.

La tige est caractérisée par son centre de masse G et son moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz), elle est soumise à l'action de la réaction de la liaison pivot, et à l'action du poids qui s'exerce en G.



Système :{Pendule S (J_{Oz}, m, d)}
Référentiel : Terrestre supposé galiléen $\mathscr{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
Bilan : $\mathscr{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgd\sin\theta$ et $\mathscr{M}_{(Oz)}(\text{Pivot}) = 0$

TMC scalaire : $J_{(Oz)}(S)\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}(S)}\sin\theta = 0} \times \dot{\theta}$

On intègre entre $t=0$ où $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ et un instant t quelconque, on obtient :
$\dot{\theta}^2(t) = 2\omega_0^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega_0\sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$

On applique alors la méthode de séparation des variables pour exprimer dt :

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega_0\sqrt{2(\cos(\theta)-\cos(\theta_0))}}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \int_0^{T/4}\omega_0\sqrt{2}\mathrm{d}t = \int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_0)}} = I(\theta_0) \Longrightarrow \boxed{T = \frac{T_0\sqrt{2}}{\pi}I(\theta_0)}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return 1/np.sqrt(np.cos(x)-np.cos(theta0))
T0=1
N=100000
n=10
theta=np.array([k*np.pi/(2*n) for k in range(1,n+1)])
T=np.zeros(n)
for k in range(n):
    theta0=theta[k]
    T[k]=(np.sqrt(2)*T0/np.pi)*RectG(0,theta0,N,f)
plt.plot(theta,T,'+')
plt.xlabel($theta en rad$)
plt.ylabel($T$ en s)
plt.show()
```