

CB1 du 15/01 : Physique (Durée : 4h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements.

Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.

Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.

Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).

Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**. La calculatrice est autorisée, le téléphone interdit.

Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

Exercice 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie

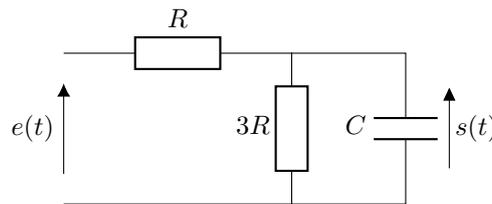
Un pH-mètre est composé d'une électrode de verre qui délivre un signal électrique fonction affine du pH :

$$U_0 = A + B \times \text{pH} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes ajustées par étalonnage du pH-mètre}$$

Du fait de la proximité de dispositifs d'agitation, un signal sinusoïdal de fréquence égale à 4 Hz se superpose au signal utile. Ainsi le signal s'écrit $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Q.1 Le signal parasite n'étant pas utile, on souhaite l'éliminer tout en conservant la partie utile du signal, à savoir U_0 . Quel type de filtre faut-il utiliser ? Estimer alors sa fréquence de coupure.

On propose de réaliser le quadripôle ci-dessous en sortie ouverte avec $C = 1,0 \times 10^{-6}$ F et $R = 5,3 \times 10^5 \Omega$, alimenté par un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω .



Q.2 Déterminer sans calculs la nature du filtre. On donnera la valeur du signal de sortie $s(t)$ à basses et hautes fréquences.

Q.3 Montrer que la fonction de transfert complexe en sortie ouverte se met sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ la pulsation réduite}$$

Déterminer l'expression et la signification des constantes H_0 et ω_0 . En déduire l'ordre du filtre.

Q.4 Exprimer le gain linéaire $G(x)$ et le déphasage $\phi(x)$ introduit par le filtre à la pulsation réduite x .

Q.5 Après avoir défini la pulsation de coupure ω_c , établir son expression en fonction de R et C . Calculer la fréquence de coupure f_c et vérifier que cette valeur permet de réaliser ce que l'on souhaite.

Q.6 Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain et en phase. Représenter le diagramme asymptotique sur votre copie.

Q.7 À partir des valeurs du gain en décibels et du déphasage à la pulsation de coupure, représenter les diagrammes de Bode réels.

Q.8 Ce filtre présente-t-il un caractère pseudo-dérivateur ? Pseudo-intégrateur ? Justifier.

Le filtre précédent est maintenant alimenté par le signal issu du pH-mètre : $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ tel que $f = 4$ Hz. On cherche à déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$.

Q.9 Donner l'écriture générale de $s(t)$ en introduisant une amplitude S_m une phase à l'origine des temps φ_s et une composante continue S_0 .

Q.10 En utilisant la fonction de transfert, déterminer précisément :

- la valeur de S_0 en fonction de U_0 ;
- la valeur de S_m en fonction de E_m ;
- la valeur de φ_s en fonction de φ_e .

- Q.11** En déduire l'expression du signal de sortie $s(t)$. Représenter sur le même graphique les signaux $e(t)$ et $s(t)$.
A-t-on réalisé ce que l'on souhaitait ?

Exercice 2 : Lunette astronomique

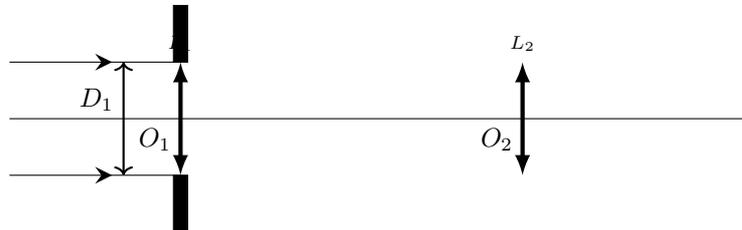
La lunette astronomique est un système centré constitué d'un objectif et d'un oculaire. L'objectif est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique O_1 , de distance focale f'_1 et de diamètre D_1 . L'oculaire est une lentille mince convergente de centre optique O_2 de distance focale f'_2 et de diamètre D_2 .

L'objectif donne, d'un objet éloigné, une image réelle appelée image objective. Cette dernière est observée au moyen de l'oculaire.

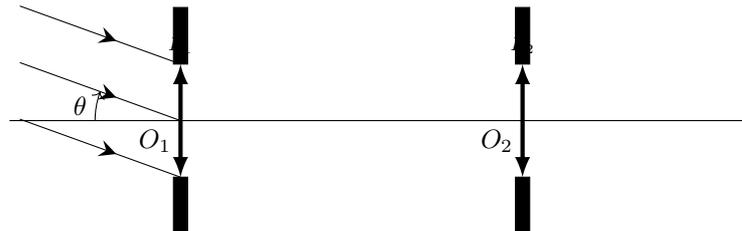
- Q.1** A quelle condition l'œil d'un observateur, supposé sans défaut, n'accomode pas (ne se fatigue pas)? En déduire la position relative de l'objectif et de l'oculaire. Ce système optique possède-t-il des foyers ? Comment se nomme un tel système optique ?
- Q.2** Réaliser un schéma, sans respecter les échelles, montrant le devenir d'un rayon incident faisant un angle θ avec l'axe optique et émergeant sous un angle θ' dans les conditions de Gauss.



- Q.3** Déterminer l'expression du grossissement de la lunette $G = \frac{\theta'}{\theta}$ en fonction de f'_1 et f'_2 et calculer ce grossissement si $f'_1 = 1,0\text{ m}$ et $f'_2 = 20\text{ mm}$.
- Q.4** On considère un faisceau lumineux issu d'un point objet A à l'infini sur l'axe optique de la lunette (figure 8). Sans respect des échelles, représenter le devenir d'un tel faisceau lumineux limité par la monture de la lentille objectif (encore appelée diaphragme d'ouverture).



- Q.5** Exprimer le diamètre D du faisceau de rayons issu de l'oculaire en fonction du grossissement G de la lunette ainsi que du diamètre D_1 du diaphragme d'ouverture.
- Q.6** Après avoir calculé la valeur numérique du diamètre D du faisceau de rayons issu de l'oculaire, montrer que c'est le diaphragme d'ouverture, de diamètre D_1 , qui le limite et non l'oculaire de diamètre D_2 . On donne $D_1 = 10\text{ cm}$ et $D_2 = 6\text{ mm}$.
- Q.7** On considère un objet ponctuel situé à l'infini en dehors de l'axe optique et dans la direction θ par rapport à ce dernier. Expliquer, de façon qualitative, ce qu'il advient des rayons lumineux lorsque l'angle θ devient trop important. On dit de la monture de l'oculaire qu'elle est le diaphragme de champ de la lunette. Pouvez-vous justifier cette affirmation ?



- Q.8** L'objectif d'une lunette astronomique doit être capable de donner une image parfaite d'un point infiniment éloigné. Pour cela, il doit, notamment, être achromatique. D'où provient l'aberration chromatique d'une lentille ? Comment, en physique, qualifie-t-on ce type de milieu ?

Problème :

De nombreux systèmes de récupération d'énergie sont aujourd'hui utilisés pour alimenter des capteurs ou des petits dispositifs électroniques. Ces systèmes récupèrent de l'énergie de l'activité humaine, de la chaleur ambiante, de la lumière ou des vibrations. On étudie dans cette partie un système conçu et mis en œuvre par des ingénieurs néerlandais afin de récupérer de l'énergie issue de la danse, dans le contexte d'une discothèque. Ce système a fait l'objet d'un brevet, publié en 2010 par l'entreprise *Energy Floors*[®].

La piste de danse est composée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles, convertissant une partie de l'énergie cinétique des danseurs en énergie électrique. Cette énergie est ensuite utilisée pour éclairer, entre autres, une assemblée de diodes électroluminescentes (LED) multicolores situées sur les dalles et autour de la piste de danse.

- Les 4 exercices suivants sont indépendants.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).

Exercice 3 : Mouvement de la dalle : mise en équation

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on se place à l'échelle d'un module unique, constitué d'une dalle de dimensions $65\text{ cm} \times 65\text{ cm} \times 14,5\text{ cm}$ suspendue par des ressorts mécaniques. Pour simplifier, on la modélise par une masse m reliée à un ressort équivalent de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k , ainsi qu'à un amortisseur mécanique (frottement fluide) de coefficient $D > 0$ (voir figure 3). On note $\vec{g} = -g\vec{u}_x$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

La dalle est repérée par sa position x sur un axe vertical ascendant de vecteur unitaire \vec{u}_x , l'origine O étant liée au bâti. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen ; on note $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ son vecteur vitesse dans ce référentiel. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est ensuite converti en mouvement de rotation par un engrenage de type pignon-crémaillère.

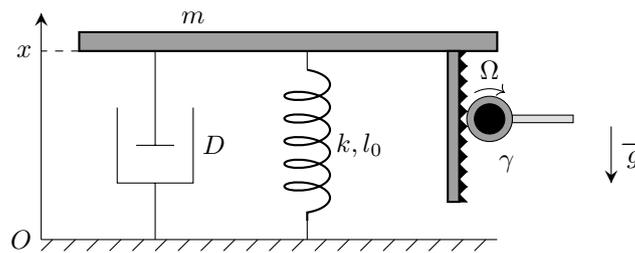


Figure 3 - Modèle mécanique de la dalle mobile : schéma et notations.

- Q.1** Exprimer la force de rappel \vec{F}_r exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.
- Q.2** La dalle étant supposée au repos dans un premier temps, déterminer sa position d'équilibre x_{eq} en fonction de l_0 , k , m et g . Vérifier l'homogénéité dimensionnelle et la pertinence physique de l'expression obtenue.

Un danseur de masse M monte sur la dalle : cette dernière se met alors en mouvement, avant de se stabiliser à une nouvelle position d'équilibre x'_{eq} .

- Q.3** Exprimer littéralement x'_{eq} , puis l'affaissement de la dalle $\delta = x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}}$.

Le constructeur précise ci-dessous un critère de dimensionnement du ressort équivalent :

Document 1. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry applications magazine, 2011 :

Although the dancer is aware that energy is generated from the dance floor, the dancing experience should only be disturbed a little. Therefore, only little movement (several millimeters) of the suspended floor is allowed, and a high spinrg^a stiffness^b has been selected to achieve this.

^aressort
^braideur

- Q.4** En choisissant une valeur raisonnable pour M (adulte de corpulence moyenne), proposer une valeur de constante de raideur permettant de répondre en régime quasi-statique à la contrainte imposée.

On cherche à présent à décrire la dynamique du mouvement de la dalle. Outre son poids, la force de rappel du ressort et la force exercée par l'amortisseur mécanique, la dalle subit également :

- une force exercée par le danseur en mouvement, notée \vec{F} ;
- une force d'amortissement électromagnétique $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$, avec $\alpha > 0$; on justifiera son expression dans la partie suivante.

Q.5 Après avoir posé $X = x - x_{\text{eq}}$, montrer que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme

$$\ddot{X} + \left(\frac{D + \alpha}{m} \right) \dot{X} + a_0 X = b_0$$

où on donnera les expressions de a_0 et b_0 en fonction de k , m et F .

Exercice 4 : Puissance électrique reçue par les LED

Le mouvement de translation de la dalle, de vitesse $\dot{x}(t)$, entraîne la rotation de la roue dentée schématisée sur la figure 3. On admet que sa vitesse angulaire de rotation s'exprime $\Omega = \gamma \dot{x}(t)$, avec γ le rapport de transmission. L'énergie cinétique de la roue dentée est par la suite convertie en énergie électrique au moyen d'une génératrice, servant alors à éclairer un réseau de LED disposées sur la partie supérieure des dalles.

On modélise dans un premier temps la génératrice par l'association série d'une force électromotrice (fem) $u = K_t \Omega$, d'une résistance R et d'une inductance propre L . On s'intéresse à la puissance débitée par ce dipôle dans le réseau de LED, assimilé à une résistance de charge R_L (voir figure 4).

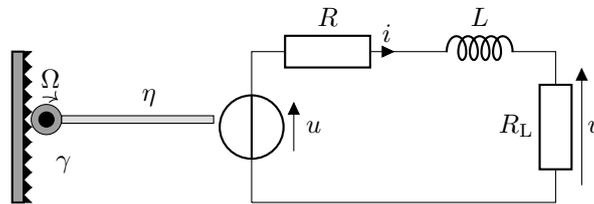


Figure 4 - Circuit électrique équivalent : schéma et notations.

- Q.1** Donner sans démonstration l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R , puis d'une bobine idéale d'inductance propre L en fonction de la pulsation d'excitation du circuit ω .
- Q.2** Si on considère que $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, quelle forme aura la réponse en courant $i(t)$? Associer alors à $i(t)$ un signal complexe $\underline{i}(t)$.
- Q.3** Exprimer l'amplitude et le déphasage de la réponse en courant $i(t)$ en fonction de ω , R , R_L , L et U_0 .
- Q.4** La pulsation ω étant celle imposée par les pas du danseur, estimer son ordre de grandeur.
- Q.5** Sachant que $R = 19,2 \Omega$, justifier l'approximation proposée ci-dessous par le constructeur :

Document 2. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry applications magazine, 2011 :

As such, the armature winding inductance ($L = 1,67 \text{ mH}$) has been neglected because of the low excitation frequency of the system.

- Q.6** Dans le cadre de l'approximation précédente, exprimer la tension v aux bornes de la résistance R_L en fonction de u , R et R_L .
- Q.7** Dédire de la question précédente que la puissance électrique instantanée $P_L(t)$ reçue par le réseau de LED peut s'écrire

$$P_L(t) = A[K_t \gamma \dot{x}(t)]^2$$

avec A un facteur à exprimer en fonction de R et R_L uniquement.

La génératrice concède des pertes au cours de son fonctionnement. Son rendement est défini par

$$\eta = \frac{P_u(t)}{P_P(t)} \quad (0 < \eta < 1)$$

où $P_u(t)$ et $P_P(t)$ désignent respectivement la puissance instantanée fournie par la fem et la puissance instantanée prélevée par la génératrice à la dalle mobile.

- Q.8** Exprimer $P_u(t)$, puis $P_P(t)$ en fonction de K_t , γ , R , R_L , $\dot{x}(t)$ et η .
- Q.9** On donne $\eta = 50\%$, $K_t = 7,28 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$. En prenant $R_L = 150 \Omega$ et $\gamma = 2,2 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$, calculer la valeur de α . Sachant que $D = 10 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, justifier le commentaire du constructeur reporté ci-dessous :

Document 3. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry applications magazine, 2011 :

When energy is generated for lighting, the damping^a of the system is determined by the dc generator and its electrical load. In that case, the mechanical damping may be neglected.

^aamortissement.

Exercice 5 : Réponse indicielle

Durant les phases de conception du dispositif, des simulations numériques ont été réalisées dans le but d'optimiser la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique, tout en respectant les exigences de puissance et de sécurité.

Dans cette partie, on impose à la dalle, initialement à sa position d'équilibre et immobile, un échelon de force $F = F_0$ à partir de l'instant $t = 0$, et on cherche à quantifier la puissance fournie au réseau de LED. En utilisant les parties précédentes, l'équation du mouvement de la dalle peut être approchée par

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F_0}{m}$$

où $X = x - x_{\text{eq}}$ (voir exercice ...). On donne la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35 \text{ kg}$, $k = 1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. On prendra numériquement $\alpha = 3,0 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q.1 Identifier ω_0 et Q dans l'équation différentielle.

Q.2 Exprimer la solution particulière de l'équation différentielle précédente. Donner ensuite l'expression d'une solution de l'équation différentielle (on ne cherchera pas à déterminer les valeurs des constantes d'intégrations).

Compte tenu des ordres de grandeur, on admet que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire de façon approchée

$$X(t) \simeq \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{1}{1 - Q^2} \left(e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\omega_0 t / Q} \right) \right]$$

Q.3 Vérifier que cette solution satisfait aux conditions initiales précisées en début de partie.

Q.4 En déduire la loi d'évolution de la vitesse $\dot{x}(t)$ de la dalle.

Q.5 Montrer finalement que dans le cadre du modèle développé à la question **Q.7** de l'exercice 2, la puissance électrique instantanée reçue par les LED s'écrit sous la forme

$$P_L(t) = K F_0^2 \left(e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q} \right)^2$$

avec K un facteur constant qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Q.6 Dans l'expression de $P_L(t)$, une exponentielle converge beaucoup plus vite que l'autre : déterminer laquelle. Montrer alors qu'aux « temps longs », $P_L(t)$ décroît exponentiellement, selon un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de ω_0 et Q .

La figure 6, adaptée de la notice constructeur, représente l'évolution de la puissance électrique prédite (signal de sortie) sous l'effet de plusieurs échelons de force successifs d'intensité différente (signal d'entrée).

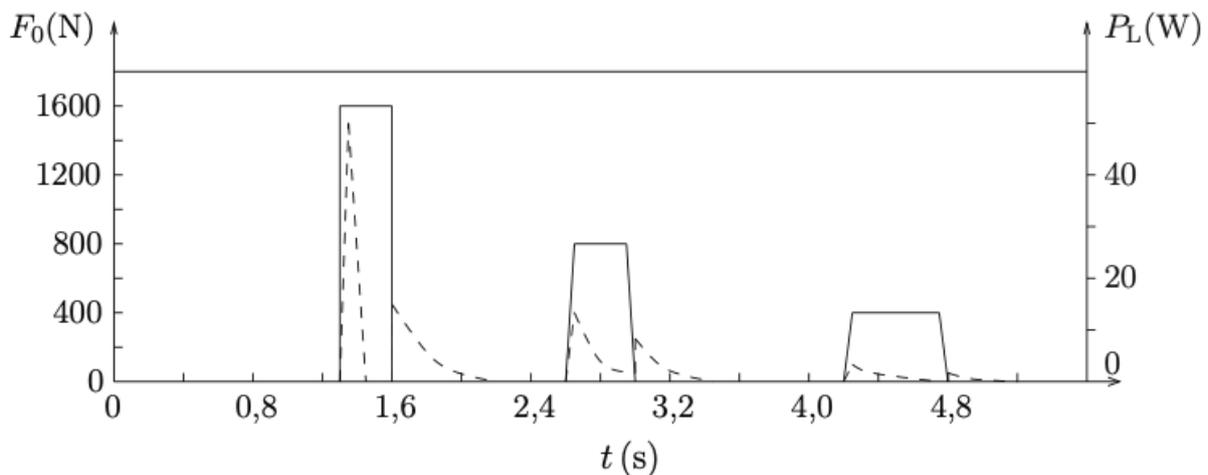


Figure 6 - Évolutions temporelles de la force et de la puissance électrique : simulations numériques (adapté de *Energy Floors*[®])

Q.7 Associer chaque courbe (en trait plein, en pointillés) à la grandeur correspondante : F_0 , P_L . Indiquer les intervalles temporels pendant lesquels sont appliqués des échelons de force, ainsi que les valeurs de F_0 associées.

Le constructeur précise :

Document 4. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry applications magazine, 2011 :
Energy is both generated when the tile^a moves downward due to the force applied by the dancer and when the tile moves upward due to the spring even when there is no contact with the dancer.

^adalle

Q.8 Ce commentaire est-il en cohérence avec la figure 6 ? Comment justifier que la puissance électrique tende vers zéro au bout d'un temps suffisamment long, même en présence d'une force appliquée non nulle ?

Q.9 Analyser l'influence de l'échelon de force F_0 sur l'allure de $P_L(t)$, en lien avec la question **Q.5**.

Exercice 6 : Forçage sinusoïdal

On teste à présent le système au plus proche de ses conditions de réelles d'utilisation. Un expérimentateur danse sur la dalle et exerce sur elle une force \vec{F} , dont la norme est mesurée au moyen d'un capteur de force placé sur celle-ci (voir figure 7). Le signal obtenu montre qu'en dansant, l'expérimentateur reste à tout instant en contact avec la dalle. On modélise ce signal de manière approximative par l'équation

$$F(t) = F_0 + F_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

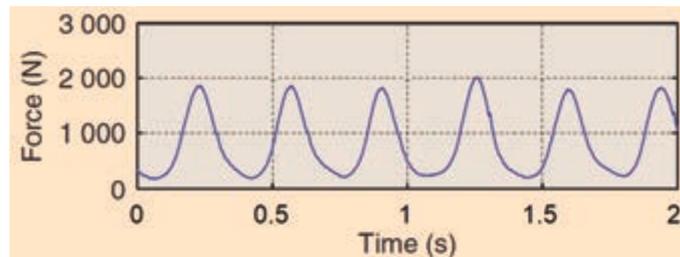


Figure 7 - Évolution expérimentale de la force F exercée par le danseur (de masse 83 kg) sur la dalle au cours du temps (*Energy Floors*[®])

Q.1 Estimer la valeur des coefficients de modélisation F_0 , F_1 et ω pour le signal représenté sur la figure 7.

En redéfinissant X comme l'écart entre la position de la dalle et sa position d'équilibre atteinte lorsque le danseur est immobile, l'équation du mouvement de la dalle peut s'écrire

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_1}{m} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et } Q = \frac{\eta(R + R_L)\sqrt{km}}{(K_t\gamma)^2}$$

On rappelle la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35 \text{ kg}$, $k = 1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. En régime établi, la solution de cette équation différentielle est de la forme

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$$

On lui associe la grandeur complexe $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \psi)}$ telle que $X(t) = \Re e(\underline{X}(t))$.

Q.2 Déterminer l'expression de l'amplitude X_0 des oscillations de la dalle en fonction de ω_0 , Q , m , ω et F_1 .

Q.3 Exprimer l'amplitude de vitesse V_0 de la dalle en fonction de X_0 et ω .

En utilisant les résultats des parties précédentes, il est possible de montrer (non demandé) que la moyenne temporelle de la puissance fournie aux LED s'exprime

$$\langle P_L \rangle = \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2K_t^4 \gamma^4 + 2\eta^2 k m (R + R_L)^2 [(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega)]^2}$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'influence de l'un des paramètres suivants, ω , γ ou R_L , sur la puissance moyenne récupérée $\langle P_L \rangle$, les autres paramètres étant maintenus constants.

Q.4 Analyser les comportements asymptotiques de $\langle P_L \rangle$ aux basses et aux hautes fréquences. Déterminer, littéralement puis numériquement, la pulsation ω pour laquelle $\langle P_L \rangle$ est maximale, ainsi que l'expression littérale de la puissance moyenne récupérée maximale notée $\langle P_L \rangle_{\max}$. Tracer alors l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de ω .

Ce système a été testé en 2015 dans l'émission scientifique télévisée *On n'est pas que des cobayes*, à l'occasion de la Fête de la Science. Deux équipes, composées chacune de deux danseurs et deux danseuses, s'affrontent sur la piste de danse, avec pour objectif de générer le maximum d'énergie électrique pendant une durée fixée (30 secondes environ) :

- l'équipe 1 danse sur un morceau de salsa, de tempo 115 Battements/min.
- l'équipe 2 danse sur un morceau de disco, de tempo 125 Battements/min.

Q.5 En faisant l'hypothèse que les deux équipes ont même masse totale et dansent de la même façon, quelle équipe a selon vous gagné ce duel, en vous fiant aux résultats établis à la question précédente ?

Dans les questions suivantes, on considère que la pulsation ω imposée par le danseur est fixée. Le graphique 3D ci-dessous, fourni par le constructeur, montre que la puissance de sortie dépend fortement du rapport de transmission γ et de la résistance de charge R_L .

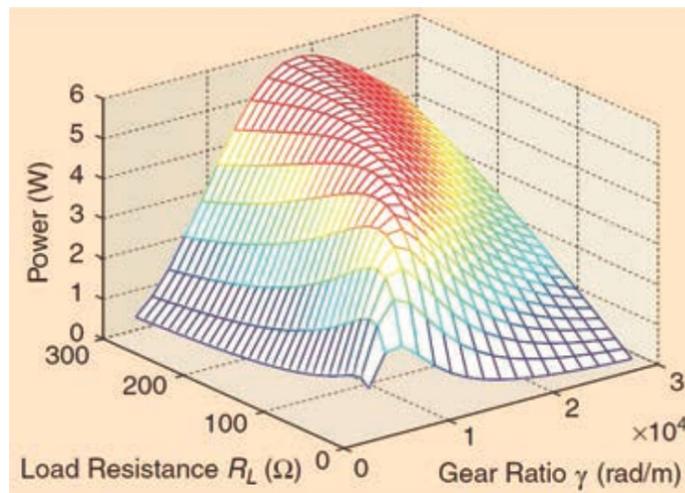


Figure 8 - Évolution de la puissance électrique de sortie en fonction du rapport de transmission et de la résistance de charge (*Energy Floors*[®]).

- Q.6** En exploitant l'expression de la puissance moyenne donnée à la page précédente, tracer, en la justifiant, l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de γ , les paramètres ω et R_L étant fixés.
- Q.7** De la même manière, tracer, en la justifiant, l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de R_L , les paramètres ω et γ étant fixés.
- Q.8** Confronter vos prédictions d'évolution de $\langle P_L \rangle$ en fonction de γ (question **Q.6**), puis en fonction de R_L (question **Q.7**) à la figure 8.
- Q.9** Quel jeu de valeurs (γ, R_L) proposeriez-vous pour dimensionner ce système ? Justifier.

... **FIN** ...