DM1 du 7/11 : Physique-chimie (2 semaines)

Solution de l'exercice 1 : Interprétation énergétique du facteur de qualité d'un oscillateur

Q.1 On applique la loi des mailles pour $t \geqslant 0$: $0 = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C(t) \Longrightarrow E = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = 0}$$

Q.2 On a identifie : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \Longrightarrow Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

On cherche les racines de l'équation caractéristiques : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \qquad \text{AN : } Q = 10,0 \Longrightarrow \Delta < 0$$

Les racines sont alors :

$$\underline{r_+} = \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \underline{r_-} = \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

et on a la solution : $u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$

Q.3 Soit $u_C(t=0) = E$ et $u_C(t=0) = A \Longrightarrow A = E$

Soit $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = \dfrac{i(t=0)}{C} = 0$ or $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\left[E\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + \omega e^{-\frac{t}{\tau}}\left[-E\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right]$

$$-\frac{E}{\tau} + B\omega = 0 \Longrightarrow B = \frac{E}{\tau\omega} \Longrightarrow \boxed{B = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

Q.4 On a $u_C(t) = Ee^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[\cos(\omega t) + \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right]$ on sait que :

$$\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t) = C\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec } C = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2-1}} \qquad \text{et } \tan(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

Sachant que $Q = 10$: $\dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \simeq \dfrac{1}{20} \ll 1$ d'où $\omega \simeq \omega_0$, $C \simeq 1$ et $\varphi \simeq 0$.

Alors : $u_C(t) \simeq Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)$ comme $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$:

$$i(t) \simeq -CEe^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t) + \omega_0\sin(\omega_0 t)\right) = -CE\omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{2Q}\cos(\omega_0) + \sin(\omega_0)\right)$$

Comme $\dfrac{1}{2Q} \ll 1$ on a $i(t) \simeq -\omega_0 CEe^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)$

Q.5 La courbe blue correspond à $\mathscr{E}_c(t)$, la courbe rouge à $\mathscr{E}_b(t)$ et noir à $\mathscr{E}(t)$.

Q.6 Soit $\mathscr{E}(t) = \dfrac{1}{2}Cu_C^2(t) + \dfrac{1}{2}Li^2(t) = \dfrac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}}$

Q.7 Soit $\dfrac{\Delta E}{E} = \left|e^{-\frac{2T_0}{\omega_0}} - 1\right|$ on fait un DL_1 de l'exponentielle

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2T_0}{\omega_0} = \frac{2\pi}{Q} \sim \frac{1}{Q}$$

Q.8 Q à l'ordre de grandeur du nombre d'oscillation avant d'atteindre le régime permanent. Sur la courbe on compte bien une dizaine d'oscillations dont l'amplitude est significativement plus élevé que les autres.

Solution de l'exercice 2 : Prisme

Q.1 Attention, dans cet exercice les angles ne sont pas orientés.
On sait d'après les lois de Snell-Descartes que

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

et

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

De plus, la somme des angles du triangle $I_1 I_2 A$ fait π donc $\frac{\pi}{2} - r_1 + \frac{\pi}{2} - r_2 + A = \pi$, soit :

$$A = r_1 + r_2$$

Enfin, la déviation est donnée par $D = i_1 - r_1 + i_2 - r_2$, donc :

$$D = i_1 + i_2 - A$$

Q.2 Si les angles i_1 et A sont faibles, alors

$$\sin i_1 \approx i_1 \approx n \sin r_1 \approx n r_1$$

De plus, comme $A = r_1 + r_2 \ll 1$ et que r_1 est très faible, alors r_2 également. D'où

$$n \sin r_2 \approx n r_2 \approx \sin i_2 \approx i_2$$

On en déduit que $D = nr_1 + nr_2 - A$, donc

$$D = A(n-1)$$

Q.3 Les phénomènes pouvant avoir lieu en I_2 sont la réflection et la réfraction.

Q.4 L'emergence n'a lieu que si $i_2 \leq \frac{\pi}{2}$. À la limite, on a donc $\sin i_2 = 1$, soit :

$$n \sin r_2 \leq 1$$

donc

$$r_2 \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $A = r_1 + r_2$, il vient :

$$A - r_1 \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

soit

$$r_1 \geq A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit donc que

$$\sin i_1 \geq n \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

puis finalement :

$$i_1 \geq \arcsin\left(n \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = i_0$$

Q.5 En inversant les rayons incident et sortant, on doit aussi avoir par retour inverse de la lumière :

$$r_1 \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$A = r_1 + r_2 \leq 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Les applications numériques pour $n = 1.5$ et $A = 60°$ donnent $i_0 = 28°$ et la condition sur A s'écrit $A \leq 83°$.

Q.6 Si on éclaire le prisme en lumière blanche, celui-ci va dévier différement les différentes longueurs d'onde puisque l'indice n'est pas le même : il y a décomposition de la lumière. Ce phénomène s'appelle la dispersion.

Q.7 On raisonne dans l'hypothèse des petits angles. Comme $D = A(n-1)$, D est une fonction croissante de n. Comme n est une fonction décroissante de λ alors D est une fonction décroissante de λ. Cette conclusion reste valable sans l'hypothèse des petits angles.

Q.8 D'après le retour inverse de la lumière : si l'angle d'émergence vaut i' dans le cas où l'angle d'incidence vaut i, alors un angle d'incidence i' donne un angle d'émergence i. On en déduit que $D = D'$.

Q.9 Il existe donc toujours deux angles d'incidence (i et i' dans l'exemple de la question précédente) qui donnent le même angle de déviation, sauf si $i = i'$.

Q.10 Oui, cet angle de déviation existe. Dans ce cas, $i_1 = i_2 = i$ donc $r_1 = r_2 = \dfrac{A}{2}$ et on a :

$$i = \arcsin\left(n\sin\frac{A}{2}\right)$$

et

$$D = 2\arcsin\left(n\sin\frac{A}{2}\right) - A$$

Les applications numériques donnent : $i = 49°$ et $D = 37°$.

Q.11 D'après la question précédente, on peut écrire :

$$D_m = 2\left(\arcsin\left(n\sin\frac{A}{2}\right) - \frac{A}{2}\right)$$

Q.12 Pour déterminer n, on mesure d'abord A. On se place ensuite au minimum de déviation et on mesure la déviation. On en déduit alors l'indice par la formule :

$$n = \frac{\sin\left(\dfrac{D_m}{2} + \dfrac{A}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}$$

· · · **FIN** · · ·