DM2 du 9/1 : Physique-chimie (2 semaines)

Solution de l'exercice 1 : Montée des bulles de champagne

Q.1 Soit $\|\vec{P}\| = \rho(\mathrm{CO_2})Vg = \dfrac{M(\mathrm{CO_2})P}{RT}Vg$ et $\|\vec{\Pi}\| = \rho_{\text{liq}}Vg$ d'où

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\Pi}\|} = \frac{M(\mathrm{CO_2})P}{\rho_{\text{liq}}RT} \qquad \underline{\text{AN : }\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\Pi}\|} = 1{,}78\times10^{-3} \ll 1}$$

Q.2 **Système :** $\{M(m)\{$ la bulle assimilée à un point M
Référentiel : terrestre supposé galiléen noté $\mathscr{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
Bilan des forces :

- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ négligeable
- $\vec{\Pi} = \rho_{\text{liq}}Vg\vec{u}_z$
- $\vec{f} = -6\pi\eta r\dot{z}\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique : $\quad m\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}} \simeq \vec{\Pi} + \vec{f}$.

$$/\vec{u}_z \quad : \quad m\ddot{z} = \rho_{\text{liq}}\frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi\eta r\dot{z} \quad \iff \quad m\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} + 6\pi\eta r\dot{z} = \rho_{\text{liq}}\frac{4}{3}\pi r^3 g$$

$$\frac{M(\mathrm{CO_2})P}{RT}\frac{4}{3}\pi r^3\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} + 6\pi\eta r\dot{z} = \rho_{\text{liq}}\frac{4}{3}\pi r^3 g \quad \iff \quad \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} + \frac{9\eta RT}{2M(\mathrm{CO_2})Pr^2}\dot{z} = \frac{RT}{M(\mathrm{CO_2})P}\rho_{\text{liq}}g$$

Q.3 On cherche une solution de la forme $\dot{z} = C^{te}$ tel que $\dot{z} = v_{\text{lim}} > 0$:

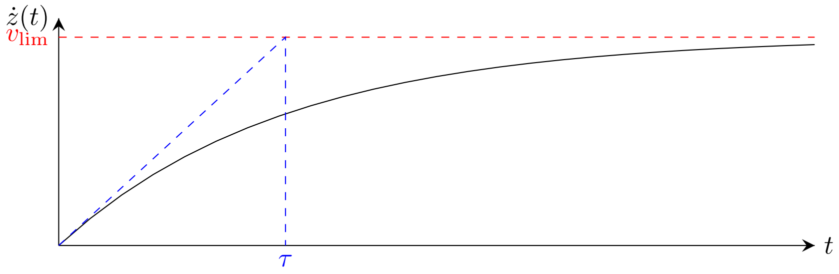
$$\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{2\rho_{\text{liq}}gr^2}{9\eta}$$

Q.4 On définit le temps caractéristique comme le temps pour atteindre v_{lim} sans vitesse initiale en suivant la pente initiale :

$$v_{\text{lim}} = \frac{RT}{M(\mathrm{CO_2})P}\rho_{\text{liq}}g\tau \quad \iff \quad \tau = \frac{2M(\mathrm{CO_2})Pr^2}{9\eta RT}$$

Q.5 Soit $\dot{z}(t) = \dot{z}_h(t) + v_{\text{lim}}$ avec $\dot{z}_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ comme $\dot{z}(0) = 0 \Longrightarrow A = -v_{\text{lim}}$

$$\dot{z}(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)$$



Q.6 AN : $\tau = 3{,}1\times10^{-4}\,\mathrm{s}$ et $v_{\text{lim}} = 6{,}9\times10^{-4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ on peut calculer la distance parcourue sans frottements pendant la durée τ :

$$d = \frac{1}{2}v_{\text{lim}}\tau \qquad \underline{\text{AN : } d = 1\times10^{-7}\,\mathrm{m} \ll r}$$

On peut donc considérer que la bulle atteint instantanément la vitesse limite.

Q.7 Les bulles sont émises de manière périodiques avec une période T. On peut alors confondre la distance entre deux bulles à un instant t avec le déplacement d'une bulle entre l'instant t et l'instant $t+T$ sur une photo.

Q.8 On verrait alors les bulles se déplacer d'un flash à l'autre.

Q.9 On peut calculer expérimentalement la vitesse :

$$v_n(t_n) = \frac{OM_n(t_{n+1}) - OM_n(t_{n-1})}{t_{n+1} - t_{n-1}}$$

En utilisant la questions précédente on confond la position à l'instant t_{n_1} avec la position de la bulle suivante à la position h_{n-1} et idem pour l'instant t_{n+1}. Sachant que $t_{n+1} - t_{n-1} = 2T = \dfrac{2}{f_n}$:

$$v_n = f_n \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2}$$

Q.10 On reprend l'expression de v_{lim} et on applique log() :

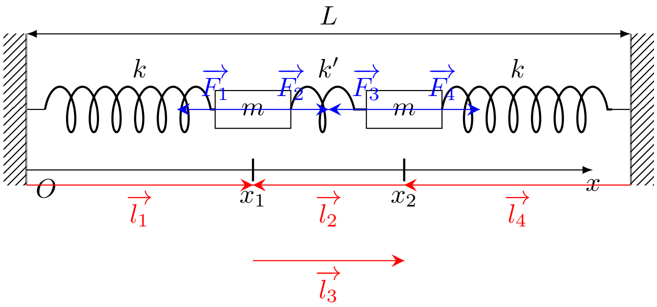
$$v_{\text{lim}} = \frac{2\rho_{\text{liq}} g r^2}{9\eta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log(v_{\text{lim}}) = \log\left(\frac{2\rho_{\text{liq}} g}{9\eta}\right) + 2\log(r)$$

Sur la courbe on repère la pente de la droite :

$$\frac{\log(10) - \log(0,2)}{\log(300) - \log(40)} = 1,94 \simeq 2$$

Solution de l'exercice 2 : Oscillateurs couplés

Q.1 Soit la situation suivante :



On fait le bilan des forces sur la masse 1 :
- $\overrightarrow{P_1} = -mg\overrightarrow{u_y}$;
- $\overrightarrow{R_{N1}} = R_{N1}\overrightarrow{u_y}$;
- $\overrightarrow{F_1} = -k(\overrightarrow{l_1} - \overrightarrow{l_{01}})$ avec $\overrightarrow{l_1} = x_1(t)\overrightarrow{u_x}$;
- $\overrightarrow{F_2} = -k'(\overrightarrow{l_2} - \overrightarrow{l_{02}})$ avec $\overrightarrow{l_2} = (x_1(t) - x_2(t))\overrightarrow{u_x}$;

On fait le bilan des forces sur la masse 2 :
- $\overrightarrow{P_2} = -mg\overrightarrow{u_y}$;
- $\overrightarrow{R_{N2}} = R_{N2}\overrightarrow{u_y}$;
- $\overrightarrow{F_3} = -k(\overrightarrow{l_3} - \overrightarrow{l_{03}})$ avec $\overrightarrow{l_3} = (x_2(t) - x_1(t))\overrightarrow{u_x}$;
- $\overrightarrow{F_4} = -k'(\overrightarrow{l_4} - \overrightarrow{l_{04}})$ avec $\overrightarrow{l_4} = (x_2(t) - L)\overrightarrow{u_x}$;

On applique la principe fondamental de la dynamique sur la masse 1 que l'on projette suivant $\overrightarrow{u_x}$:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext\to 1}} \cdot \overrightarrow{u_x} = m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}(t)$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x_1(t) - l_0) - k'(x_1(t) - x_2(t) + l_0)$$

On applique la principe fondamental de la dynamique sur la masse 2 que l'on projette suivant $\overrightarrow{u_x}$:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext\to 2}} \cdot \overrightarrow{u_x} = m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}(t)$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x_2(t) - L + l_0) - k'(x_2(t) - x_1(t) - l_0)$$

On cherche les positions d'équilibre en prenant $\dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0$:

$$-k(x_{1eq} - l_0) - k'(x_{1eq} - x_{2eq} + l_0) = 0$$
$$-k(x_{2eq} - L + l_0) - k'(x_{2eq} - x_{1eq} - l_0) = 0$$

En faisant la somme on obtient :

$$x_{1eq} + x_{2eq} = L$$
$$-k(x_{2eq} - L + l_0) - k'(2x_{2eq} - L - l_0) = 0 \Longrightarrow x_{2eq} = \frac{(k + k')L + (k' - k)l_0}{k + 2k'}L$$

On divisant par k et L on obtient :

$$x_{2eq} = \frac{1+\alpha+(\alpha-1)\beta}{1+2\alpha}L \qquad x_{1eq} = \frac{\alpha+(1-\alpha)\beta}{1+2\alpha}L$$

Q.2 Soit $x_2(t) = X_2(t) + x_{2eq}$ et $x_1(t) = X_1(t) + x_{1eq}$:

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -k(x_2(t) - L + l_0) - k'(x_2(t) - x_1(t) - l_0)\\
m\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -k(X_2(t) + x_{2eq} - L + l_0) - k'(X_2(t) + x_{2eq} - X_1(t) - x_{1eq} - l_0)\\
&= -(k+k')X_2(t) + k'X_1(t) \underbrace{-k(x_{2eq} - L + l_0) - k'(x_{2eq} - x_{1eq} - l_0)}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -k(x_1(t) - l_0) - k'(x_1(t) - x_2(t) + l_0)\\
m\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -k(X_1(t) + x_{1eq} - l_0) - k'(X_1(t) + x_{1eq} - X_2(t) - x_{2eq} + l_0)\\
&= -(k+k')X_1(t) + k'X_2(t) \underbrace{-k(x_{1eq} - l_0) - k'(x_{1eq} - x_{2eq} + l_0)}_{=0}
\end{aligned}$$

On obtient alors les équation différentielles suivantes :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = -(k+k')X_1(t) + k'X_2(t) \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -(k+k')X_2(t) + k'X_1(t)$$

Q.3 Soit $X_S(t) = X_1(t) + X_2(t)$ et $X_A(t) = X_1(t) - X_2(t)$:

a) On fait la soustraction des deux équation différentielles précédentes et on obtient :

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}t^2}(t) - m\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -(k+k')X_1(t) + k'X_2(t) + (k+k')X_2(t) - k'X_1(t)\\
m\frac{\mathrm{d}^2 X_A}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -(k+2k')X_A(t)
\end{aligned}$$

On fait l'addition des deux équation différentielles précédentes et on obtient :

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}t^2}(t) + m\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -(k+k')X_1(t) + k'X_2(t) - (k+k')X_2(t) + k'X_1(t)\\
m\frac{\mathrm{d}^2 X_S}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -kX_S(t)
\end{aligned}$$

b) On introduit $\omega_S = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_- = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 X_S}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_S^2 X_S(t) = 0 &\Longrightarrow X_S(t) = A\cos(\omega_S t) + B\sin(\omega_S t)\\
\frac{\mathrm{d}^2 X_A}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_-^2 X_A(t) = 0 &\Longrightarrow X_A(t) = C\cos(\omega_- t) + D\sin(\omega_- t)
\end{aligned}$$

On applique les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
X_S(t=0) &= x_1(t=0) + x_2(t=0) = a + 0 = A\\
\frac{\mathrm{d}X_S}{\mathrm{d}t}(t=0) &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t=0) + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0 = B\omega_S\\
X_A(t=0) &= x_1(t=0) - x_2(t=0) = a + 0 = C\\
\frac{\mathrm{d}X_A}{\mathrm{d}t}(t=0) &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t=0) - \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0 = D\omega_-
\end{aligned}$$

On a alors :

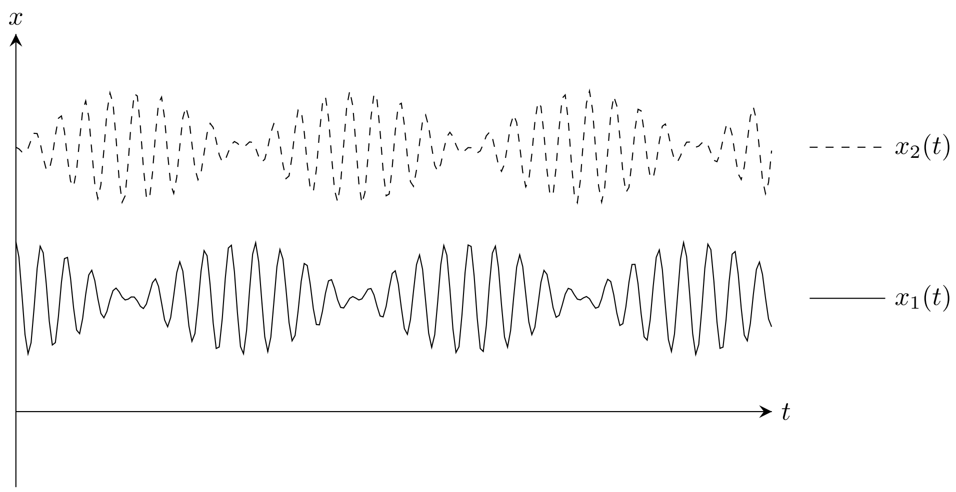
$$X_S(t) = a\cos(\omega_S t) \qquad X_A(t) = a\cos(\omega_- t)$$

Q.4 On en déduit :

$$
\begin{aligned}
X_1(t) &= \frac{X_S(t)+X_A(t)}{2} = \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_S t)+\cos(\omega_- t)\right] = a\cos\left(\frac{(\omega_S+\omega_-)}{2}t\right)\cos\left(\frac{(\omega_S-\omega_-)}{2}t\right)\\
X_2(t) &= \frac{X_S(t)-X_A(t)}{2} = \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_S t)-\cos(\omega_- t)\right] = -a\sin\left(\frac{(\omega_S+\omega_-)}{2}t\right)\sin\left(\frac{(\omega_S-\omega_-)}{2}t\right)\\
x_1(t) &= x_{1eq} + a\cos\left(\frac{(\omega_S+\omega_-)}{2}t\right)\cos\left(\frac{(\omega_S-\omega_-)}{2}t\right)\\
x_2(t) &= x_{2eq} - a\sin\left(\frac{(\omega_S+\omega_-)}{2}t\right)\sin\left(\frac{(\omega_S-\omega_-)}{2}t\right)
\end{aligned}
$$

Q.5 a) Si $k \gg k'$ alors $\omega_S \approx \omega_- - \delta\omega$.

b) On a alors un cosinus qui varie très vite devant un cosinus qui varie lentement, l'amplitude du cosinus rapide varie comme un cosinus (idem pour la fonction sinus) :



· · · FIN · · ·