Corrigé du DM 17

Formule de Poincaré

Partie A - Formule du crible ou de Poincaré

On rappelle que $\mathbb{1}_{\overline{C}} = 1 - \mathbb{1}_C$ et $\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I} C_i} = \prod\limits_{i\in I} \mathbb{1}_{C_i}$ et $\mathrm{Card}(C) = \sum\limits_{e\in E} \mathbb{1}_C(e)$.

1. On a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\le i\le n} B_i} &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{\bigcup\limits_{1\le i\le n} B_i}} && \text{par propriété de l'indicatrice d'un complémentaire}\\
&= 1 - \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{1\le i\le n} \overline{B_i}} && \text{par de Morgan}\\
&= 1 - \prod_{1\le i\le n} \mathbb{1}_{\overline{B_i}} && \text{par propriété de l'indicatrice d'une intersection}\\
&= 1 - \prod_{1\le i\le n} (1 - \mathbb{1}_{B_i}) && \text{par propriété de l'indicatrice d'un complémentaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\le i\le n} B_i} = 1 - \prod\limits_{1\le i\le n} (1 - \mathbb{1}_{B_i}).}$

2. On a $\boxed{\prod\limits_{j\in J} (-\mathbb{1}_{B_j}) = (-1)^{\mathrm{Card}(J)} \prod\limits_{j\in J} \mathbb{1}_{B_j} = (-1)^{\mathrm{Card}(J)} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} B_j}.}$

3. Le cas $J = \emptyset$ donne le terme -1 qui simplifie le 1 en amont. Ainsi par disjonction de cas suivant le sous-ensemble J de $[\![1, n]\!]$, il vient $\boxed{\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\le i\le n} B_i} = \sum\limits_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{\mathrm{Card}(J)+1} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} B_j}.}$

4. Effectuons une disjonction de cas suivant le cardinal de J, noté k, qui varie de 1 à n.

Il vient $\boxed{\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\le i\le n} B_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum\limits_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(J) = k}} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} B_j}.}$

5. Comme le cardinal d'un sous-ensemble se déduit des évaluations de son indicatrice sur tout les éléments de E, une sommation pour $e \in E$ des évaluations en e de la relation précédente donne :

$$\boxed{\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(J) = k}} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)}$$

6. Autre approche : Procédons par récurrence.

- <u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, on a le relation est $\mathrm{Card}(B_1) = \mathrm{Card}(B_1)$.
Pour $n = 2$, $B_1 \cup B_2 = (B_1 \backslash B_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \backslash B_2)$
La réunion étant disjointe deux à deux alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(B_1 \cup B_2) &= \mathrm{Card}(B_1 \backslash B_2) + \mathrm{Card}(B_1 \cap B_2) + \mathrm{Card}(B_2 \backslash B_2)\\
&= \mathrm{Card}(B_1) - \mathrm{Card}(B_1 \cap B_2) + \mathrm{Card}(B_1 \cap B_2) + \mathrm{Card}(B_2) - \mathrm{Card}(B_1 \cap B_2)\\
&= \underbrace{\mathrm{Card}(B_1) + \mathrm{Card}(B_2)}_{k=1} - \underbrace{\mathrm{Card}(B_1 \cap B_2)}_{k=2}
\end{aligned}$$

- <u>Hérédité :</u> Soit $n \geq 1$; on suppose la relation vraie au rang n.

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = \operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right) = \operatorname{Card}(B_{n+1}) + \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) - \operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right)$$

Par distributivité, on a :

$$\operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right) = \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_{n+1} \cap B_i\right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) &= \operatorname{Card}(B_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = \ell}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_{n+1} \cap B_j\right) \\
&= \underbrace{\operatorname{Card}(B_{n+1})}_{\ell=0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = \ell}} \operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) + \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = \ell}} \operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)\right)$$

On pose $k = \ell + 1$:

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k-1}} \operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)\right)$$

Ce qui se réécrit en

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \setminus \{n+1\} \\ \operatorname{Card}(J) = k}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k-1}} \operatorname{Card}\left(B_{n+1} \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)\right)$$

Ce qui est la disjonction de cas suivant le critère $n+1 \in J$ de

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ \operatorname{Card}(J) = k}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$$

- <u>Conclusion :</u> La propriété est vrai pour tout $n \geq 1$.

Partie B - Applications

7. Étude des mains possédant les quatre couleurs :

a) On a $\boxed{Q = H \cap C \cap T \cap P.}$

b) On note qu'un mains est une 5-combinaison dans l'ensemble des cartes. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 cartes par couleur et donc 24 cartes qui ne sont pas des coeurs, 16 cartes qui ne sont pas rouges, etc ...
Par passage au complémentaire puis par la formule de de Morgan et enfin par la formule du crible, il vient :

$$\begin{array}{ll} \overline{Q} & = \overline{H \cap C \cap T \cap P} = \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{T} \cup \overline{P} \\ \text{Card}(\overline{Q}) & = \text{Card}(\overline{H}) + \text{Card}(\overline{C}) + \text{Card}(\overline{T}) + \text{Card}(\overline{P}) - \text{Card}(\overline{H} \cap \overline{C}) - \text{Card}(\overline{H} \cap \overline{T}) \\ & -\text{Card}(\overline{H} \cap \overline{P}) - \text{Card}(\overline{C} \cap \overline{T}) - \text{Card}(\overline{C} \cap \overline{P}) - \text{Card}(\overline{T} \cap \overline{P}) \\ & +\text{Card}(\overline{H} \cap \overline{C} \cap \overline{T}) + \text{Card}(\overline{H} \cap \overline{C} \cap \overline{P}) + \text{Card}(\overline{H} \cap \overline{T} \cap \overline{P}) + \text{Card}(\overline{C} \cap \overline{T} \cap \overline{P}) \\ & -\text{Card}(\overline{H} \cap \overline{C} \cap \overline{T} \cap \overline{P}) \\ & = 4\binom{24}{5} - 6\binom{16}{5} + 4\binom{8}{5} - 0 \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Card}(Q) = \binom{32}{5} - 4\binom{24}{5}56\binom{16}{5} - 4\binom{8}{5}.}$

8. Notons $F = \{y_i, i \in [\![1, n]\!]\}$, S l'ensemble des surjections de F^E et pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$F_i = \{f \in F^E ; f(E) \subset F \backslash \{y_i\}\}$$

On note que $\overline{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$.
La formule du crible donne :

$$\text{Card}\left(\overline{S}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \text{Card}(I) = k}} \text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} F_j\right)$$

Or, une application d'un ensemble à j éléments dans un ensemble à ℓ éléments est un j-liste sur les k éléments ; il y en a ℓ^j. Ainsi, il vient :

- pour $k = 1$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, alors $\text{Card}(F_i) = (n-1)^p$
- pour $k = 2$ et pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, alors $\text{Card}(F_i \in F_i) = (n-2)^p$ et il y a $\binom{n}{2}$ parties I de deux éléments dans $[\![1, n]\!]$.
- pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $\text{Card}(I) = k$, alors

$$\text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} F_j\right) = \text{Card}\left(\left\{f \in F^E, f(E) \subset F \backslash \{y_i ; i \in I\}\right\}\right) = (n-k)^p$$

  et il y a $\binom{n}{k}$ parties I à k éléments dans $[\![1, n]\!]$.

Ce qui donne : $\text{Card}\left(\overline{S}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^p$.

Et donc : $\text{Card}\left(S\right) = \underbrace{n^p}_{k=0} - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^p = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p$.

Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de surjections de } F^E \text{ est } \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p.}$

Partie C - Étude des permutations

9. a) Il deux points à établir :

• L'espace d'arrivé est-il bien A_n ? Soit $f \in A_i$ donc f est un bijection de E telle que $f(i) = i$. Comme h_i est une bijection de E, par composition d'applications bijectives, $h_i \circ f \circ h_i$ est bijective sur E. De plus, $(h_i \circ f \circ h_i)(n) = h_i(f(i)) = h_i(i) = n$ donc $h_i \circ f \circ h_i \in A_n$.

• φ est-elle bijective ? (On pourrais montrer qu'elle est injective, puis surjective).
Utilisons la caractérisation d'une bijection en introduisant la fonction suivant :

$$\psi_i : \begin{array}{ccc} A_n & \to & A_i \\ f & \mapsto & h_i \circ f \circ h_i \end{array}$$

Montrons que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{A_n}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{A_i}$:
En effet, pour $f \in A_i$, $\psi(\varphi(f)) = \psi(h_i \circ f \circ h_i) = h_i \circ h_i \circ f \circ h_i \circ h_i$.
Or $h_i \circ h_i = \mathrm{Id}_E$ donc $\psi(\varphi(f)) = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E = f$. Ainsi, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{A_i}$
On trouve de même $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{A_n}$. Ainsi φ est bijective.

Ainsi, $\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ réalise une bijection entre } A_i \text{ et } A_n.}$

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, φ_i est une bijection entre A_i et A_n, donc ils sont équipotents.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Card}(A_i) = \mathrm{Card}(A_n).}$

c) Considérons $\beta : \begin{array}{ccc} A_n & \to & \mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]} \\ f & \mapsto & f_{|[\![1,n-1]\!]} \end{array}$.

Il deux points à établir :

• L'espace d'arrivé est-il bien $\mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]}$?
Soit $f \in A_n$, donc f est un bijection de E telle que $f(n) = n$. Ainsi $f([\![1, n-1]\!]) = [\![1, n-1]\!]$ et donc $f_{|[\![1,n-1]\!]} \in \mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]}$.

• β est-elle bijective ?
Considérons l'application α qui construit le prolongement d'une application sur $[\![1, n-1]\!]$ en affectant à n l'image n : $\alpha : \begin{array}{ccc} \sigma([\![1, n-1]\!]) & \to & A_n \\ g & \mapsto & \boxed{G : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x < n \\ n & \text{si } x = n \end{cases} \end{array}} \end{array}$

Ainsi, par caractérisation, $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{A_n}$ et $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]}}$. Donc β est bijective.

Ainsi, $\boxed{\text{l'application } \beta \text{ réalise une bijection entre } A_n \text{ et } \mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]}.}$

d) D'après 1c) la bijectivité de β sur des ensembles finis donne

$$\mathrm{Card}\,(A_n) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]}\right) = (n-1)!$$

Ainsi, d'après 1b) $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Card}\,(A_i) = (n-1)!.}$

10. Soient $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, considérons l'application suivante :

$$\delta : \begin{array}{ccc} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} & \to & \mathcal{S}_{[\![1,n]\!] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i-k\}} \\ f & \mapsto & f_{|\mathcal{S}_{[\![1,n]\!] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i-k\}}} \end{array}$$

Comme dans la question 1c) on peut montrer que cette application est une bijection entre deux ensembles finis. Or $\mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!] \setminus \{i_1, i_2, _ldots, i-k\}}$ est l'ensemble des bijection sur un ensemble à $n-k$ éléments, donc de cardinal $(n-k)!$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \text{ alors } \mathrm{Card}\,(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!.}$

11. a) Montrons que $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$:

$\boxed{\supset}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \subset A$ donc $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$.

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in A$, alors f possède un point fixe : $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $f(i) = i$ ou encore $f \in A_i \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Ainsi, $\boxed{A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.

b) ⇛ Pour $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\text{Card}\,(A) &= \text{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\
&= \text{Card}\,(A_1) + \text{Card}\,(A_2) + \text{Card}\,(A_3) + \text{Card}\,(A_4) \\
&\quad - \text{Card}\,(A_1 \cap A_2) - \text{Card}\,(A_1 \cap A_3) - \text{Card}\,(A_1 \cap A_4) \\
&\quad - \text{Card}\,(A_2 \cap A_3) - \text{Card}\,(A_2 \cap A_4) - \text{Card}\,(A_3 \cap A_4) \\
&\quad + \text{Card}\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \text{Card}\,(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \text{Card}\,(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \text{Card}\,(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&\quad - \text{Card}\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= 4 \times 3! - 6 \times 2! + 4 \times 1! - 1 \times 1 = 15
\end{aligned}$$

⇛ Les ensembles de la réunion ne sont pas deux à deux disjoints ; on utilise la formule du crible :

$$\text{Card}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1, n]\!] \\ \text{Card}(J) = k}} \text{Card}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

- Si $\text{Card}\,(J) = k$ alors d'après 2) : $\text{Card}\left(\displaystyle\bigcap_{j \in J} A_j\right) = (n-k)!$.
- La somme $\displaystyle\sum_{\substack{J \subset [\![1, n]\!] \\ \text{Card}(J) = k}}$ contient $\displaystyle\binom{n}{k}$ termes : c'est le nombre de sous-ensembles de k éléments dans un ensemble de n éléments.

Il vient : $\text{Card}\,(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$.

Ainsi, $\boxed{\text{Card}\,(A) = n! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}}$