DM 17

à rendre le mardi 12 mars 2024

Formule de Poincaré

Partie A - Formule du crible ou de Poincaré

Objectif : Démontrer la formule du crible

Théorème – **formule du crible**
Soit $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ des sous-ensembles de E un ensemble fini alors :

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{\substack{J\subset [\![1,n]\!]\\ \operatorname{Card}(J)=k}} \overbrace{\operatorname{Card}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)}^{\text{intersection } k \text{ à } k}}_{\binom{n}{k} \text{ termes}}$$

1. Montrer que $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} B_i} = 1 - \prod\limits_{1\leq i\leq n}(1-\mathbb{1}_{B_i})$

En développant le produit ci-dessus, nous obtenons 2^n termes, choisissant tantôt 1, tantôt $-\mathbb{1}_{B_i}$.
A chaque terme du produit développé, nous pouvons associer la partie J de $[\![1,n]\!]$ des entiers j pour lesquels le terme $-\mathbb{1}_{B_j}$ apparaît : $\prod\limits_{j\in J}(-\mathbb{1}_{B_j})$.

2. Montrer que $\prod\limits_{j\in J}(-\mathbb{1}_{B_j}) = (-1)^{\operatorname{Card}(J)}\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} B_j}$

3. En déduire que $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} B_i} = \sum\limits_{\substack{J\subset [\![1,n]\!]\\ J\neq\emptyset}} (-1)^{\operatorname{Card}(J)+1}\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} B_j}$

4. En déduire que $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} B_i} = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum\limits_{\substack{J\subset [\![1,n]\!]\\ \operatorname{Card}(J)=k}} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{j\in J} B_j}$

5. Conclure.

6. Autre approche : Procéder par récurrence.

Partie B - Applications

7. Considérons les mains de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On note H les mains ayant au moins un coeur, C celles ayant au moins un carreau, T celle ayant au moins un trèfle, P celle ayant au moins un pique et Q les mains ayant au moins une carte de chaque couleur.

a) Exprimer Q en fonction de H, C, T et P.
b) Déterminer le cardinal de Q.

8. Soit E, F deux ensembles finis de cardinale respectif $p, n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le nombre surjection de F^E.

Partie C - Étude des permutations

Soit E un ensemble fini. Une permutation de E est une application $f : E \to E$ qui est bijective. Notons $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des permutations et rappelons que, lorsque $\operatorname{Card}(E) = n$:

$$\operatorname{Card}(\mathcal{S}_E) = n!$$

9. Soit $E = [\![1, n]\!]$. Pour tout $i \in E$, l'ensemble des permutations qui fixent le point i est noté

$$A_i = \left\{ f \in \mathcal{S}_E \middle| f(i) = i \right\}$$

a) Soit h_i l'application définie sur E et qui échange i et n : $\begin{cases} i & \text{si } x = n \\ n & \text{si } x = i \\ x & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $\varphi_i : f \mapsto h_i \circ f \circ h_i$ réalise une bijection de A_i sur A_n.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\operatorname{Card}(A_i) = \operatorname{Card}(A_n)$$

c) Démontrer que l'application définie sur A_n qui, à une permutation f de $[\![1, n]\!]$ qui fixe le point n associe sa restriction à $[\![1, n-1]\!]$ définit une bijection de A_n sur $\mathcal{S}_{[\![1,n-1]\!]}$.

d) En déduire que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{Card}(A_i) = (n-1)!$$

10. Démontrer brièvement que, si $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ sont k entiers distincts de $[\![1, n]\!]$, alors

$$\operatorname{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$$

11. Soit A l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ qui ont au moins un point fixe.

a) Décrire A en fonction des $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

b) Expliciter $\operatorname{Card}(A)$ premièrement pour $n = 4$, puis pour n quelconque.